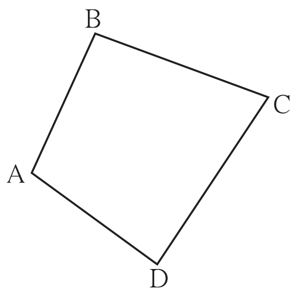
# 5 चतुर्भुज

CGNV97

## आओ, सीखें

- समांतर चतुर्भुज
- समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ
- समचर्तुभुज
- आयत
- वर्ग
- समलंब चतुर्भुज
- त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं का प्रमेय

## थोड़ा याद करें




**आकृति** 5.1

1. □ABCD के संदर्भ में निम्नलिखित जोड़ियाँ लिखिए ।

| संलग्न भुजाओं की जोड़ियाँ : | | संलग्न कोणों की जोड़ियाँ : | |
|---|---|---|---|
| (1) ... , ... | (2) ... , ... | (1) ... , ... | (2) ... , ... |
| (3) ... , ... | (4) ... , ... | (3) ... , ... | (4) ... , ... |

सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ (1) ..... , ..... (2) ..... , .....

सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ (1) ..... , ..... (2) ..... , .....

जरा याद करते हैं मेरा प्रकार तथा मेरे गुणधर्म हैं ।

मैं चतुर्भुज हूँ

मेरी सम्मुख भुजाओं की दोनों जोड़ियाँ समांतर

मेरे गुणधर्म

- सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम
- सम्मुख कोण . . . .
- विकर्ण . . . .

मेरे सभी कोण समकोण

मेरे गुणधर्म

- सम्मुख भुजा . . . .
- विकर्ण . . . . .

मेरी सभी भुजाओं की लंबाई समान

मेरे गुणधर्म

- सम्मुख कोण . . . .
- विकर्ण . . . . .

मेरे सभी कोण तथा सभी भुजाएँ समान

मेरे गुणधर्म

- विकर्ण . . . . .

मेरे सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर

चतुर्भुज के विभिन्न प्रकार तथा उनके गुणधर्म हमें पता हैं । भुजा तथा कोण का माप नापना उन्हें मोड़ना आदि कृतियों द्‌वारा वे आपने ज्ञात किया है । इन गुणधर्मों को तर्कों की सहायता से किस प्रकार सिद्‌ध कर सकते हैं । इस बात का अध्ययन करेंगे ।

जिस गुणधर्मों को तर्कों की सहायता से सिद्‌ध करते हैं उसी गुणधर्म को प्रमेय कहते हैं ।

आयत, समचर्तुभुज तथा वर्ग विशिष्ट प्रकार के समांतर चतुर्भुज होते हैं । यह इस पाठ का अध्ययन करने पर आप समझ सकते हैं । इसलिए पहले समांतर चतुर्भुज के अध्ययन से प्रारंभ करेंगे ।

**आओ, जानें**

### समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की दोनों जोड़ियाँ समांतर हों उसे समांतर चतुर्भुज कहते हैं ।

प्रमेय सिद्‌ध करते समय तथा उदाहरण हल करते समय बार-बार समांतर चतुर्भुज की आकृति खींचनी पड़ती है । अब हम देखेंगे कि आकृति कैसे खींचते हैं ।

माना □ABCD एक समांतर चतुर्भुज बताना है ।

**विधि I :**

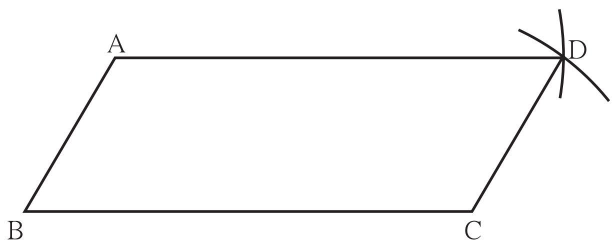
- सर्वप्रथम किसी भी लंबाई के रेखाखंड AB तथा रेखाखंड BC इस प्रकार खींचिए कि उनके मध्य (किसी भी माप का) कोण निर्मित हो ।
- अब रेख AD तथा रेख BC यह समांतर होने चाहिए । अत: बिंदु A से रेख BC के समांतर एक रेखा खींचिए ।

**आकृति** 5.2

- उसी तरह रेख AB || रेख DC अर्थात बिंदु C से रेख AB के समांतर रेखा खींचिए ।
  दोनों रेखाएँ परस्पर जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है, उसे D नाम दो । इस प्रकार बनने वाला चतुर्भुज ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

**विधि II :**

- किसी भी लंबाईवाली रेख AB तथा रेख BC इस प्रकार खींचिए कि उनके मध्य (किसी भी माप का) कोण निर्मित हो ।
- कंपास में BC के बराबर दूरी लेकर तथा बिंदु A ले बिंदु A को केंद्र मानकर चाप खींचिए ।
- कंपास में AB के समान माप लेकर बिंदु C को केंद्र मानकर चाप खींचिए ।
- चापों के प्रतिच्छेदन बिंदु को D नाम दीजिए। रेख AD तथा रेख CD मिलाइए ।
  इस तरह बना □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।



**आकृति** 5.3

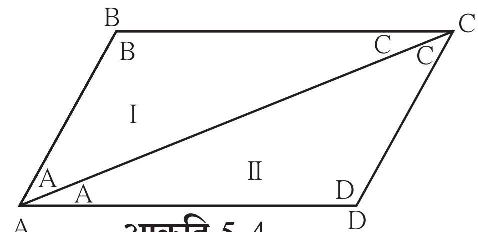
दूसरी विधि से बनाए गए चतुर्भुज में हमने सम्मुख भुजाओं को समान लेकर रचना की है । इसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर क्यों होती है, यह प्रमेय सिद्ध करने पर समझ में आएगा ।

**कृति I** संलग्न भुजाओं और कोणों के भिन्न-भिन्न माप लेकर पाँच विभिन्न समांतर चतुर्भुज बनाइए ।

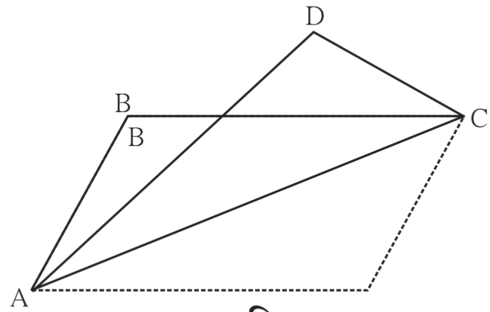
समांतर चतुर्भुज का प्रमेय सिद्ध करने के लिए सर्वांगसम त्रिभुजों का उपयोग होता है । उसे किस प्रकार करना है यह समझने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

**कृति II**

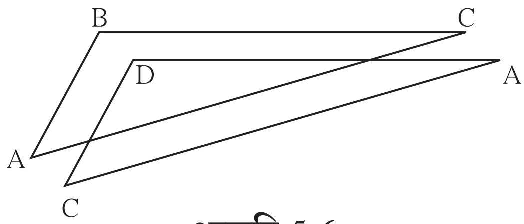
- एक मोटे कागज पर समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए । इसका विकर्ण AC खींचें । आकृति में दर्शाए अनुसार चर्तुभुज के शीर्षबिंदुओं के नाम चतुर्भुज के अंदर भी लिखिए ।
- $\square ABCD$ को विकर्ण AC पर मोड़ने से $\Delta ADC$ तथा $\Delta CBA$ एक-दूसरे को पूर्णतः ढँकते हैं क्या, देखें ।
- $\square ABCD$ को विकर्ण AC पर काटकर $\Delta ADC$ तथा $\Delta CBA$ अलग कीजिए । $\Delta CBA$ को घुमाकर देखिए कि वे $\Delta ADC$ को पूर्णतः ढ़कते हैं क्या? देखें ।



**आकृति** 5.4



**आकृति** 5.5



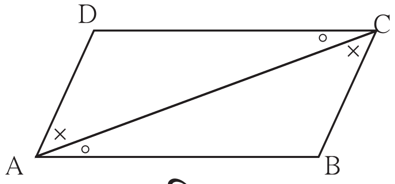
**आकृति** 5.6

क्या समझें ? $\Delta CBA$ की कौन-सी भुजाएँ $\Delta ADC$ की कौन-सी भुजाओं को पूर्णता ढँकती हैं? $\Delta CBA$ का कौन-सा कोण यह $\Delta ADC$ के कौन-से कोण को पूर्णतः ढँकता है?

भुजा DC यह भुजा AB को और भुजा AD यह भुजा CB को पूर्णतः ढँकती है । उसी प्रकार $\angle B$ यह $\angle D$ से मिलता है ।

अर्थात ऐसा दिखता है कि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं । समांतर चतुर्भुज के इसी गुणधर्म को अब हम सिद्ध करेंगे ।

**प्रमेय 1.** समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।




**आकृति** 5.7

**दत्त** : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

अर्थात भुजा AB || भुजा DC, भुजा AD || भुजा BC

**साध्य** : रेख AD ≅ रेख BC ; रेख DC ≅ रेख AB

$\angle ADC \cong \angle CBA$, तथा $\angle DAB \cong \angle BCD$

**रचना** : कर्ण AC खींचिए ।

**उपपत्ति** : रेख DC || रेख AB तथा विकर्ण AC तिर्यक रेखा है ।

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ \angle DCA \cong \angle BAC \ ................(1) \\ \text{तथा } \angle DAC \cong \angle BCA \ ..............(2) \end{array}\right\} ......\text{एकांतर कोण}$$

अब, $\Delta ADC$ तथा $\Delta CBA$ में,

$\angle DAC \cong \angle BCA$ .......... कथन (2) से

$\angle DCA \cong \angle BAC$ .......... कथन (1) से

भुजा AC ≅ भुजा CA ........ सामान्य भुजा

$\therefore\ \Delta ADC \cong \Delta CBA$ ...... कोभुको कसौटी

$\therefore$भुजा AD ≅ भुजा CB .... सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

तथा भुजा DC ≅ भुजा AB ........ सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

इसी प्रकार, $\angle ADC \cong \angle CBA$ ......... सर्वांगसम त्रिभुज का संगत कोण

इसी प्रकार $\angle DAB \cong \angle BCD$ सिद्‌ध कर सकते हैं ।

**थोड़ा, सोचें**

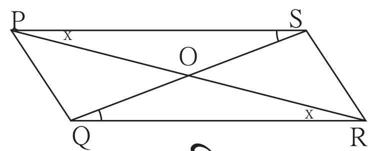
उपर्युक्त प्रमेय में $\angle DAB \cong \angle BCD$ सिद्‌ध करने के लिए रचना में परिवर्तन करना पड़ेगा क्या? वह परिवर्तन कर उपपत्ति किस प्रकार लिखेंगे ।

समांतर चतुर्भुज का एक और गुणधर्म समझने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

**कृति** : समांतर चतुर्भुज □PQRS बनाइए ।

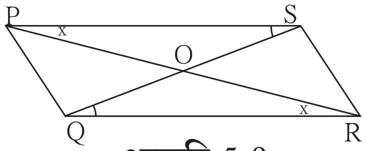
विकर्ण PR तथा विकर्ण QS खींचिए । उनके प्रतिच्छेदत बिंदु को O यह नाम दीजिए ।

प्रत्येक विकर्ण के हुए दो भागों की लंबाई की तुलना विभाजक की सहायता से कीजिए, क्या समझा?




**आकृति** 5.8

**प्रमेय :** समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।



आकृति 5.9

**दत्त :** □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।
विकर्ण PR तथा विकर्ण QS पपरस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

**साध्य :** रेख PO ≅ रेख RO, रेख SO ≅ रेख QO

**उपपत्ति :** $\Delta$POS तथा $\Delta$ROQ में

$\angle$OPS ≅ $\angle$ORQ .......... एकांतर कोण

भुजा PS ≅ भुजा RQ ......... समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

$\angle$PSO ≅ $\angle$RQO .......... एकांतर कोण

$\therefore \Delta$POS ≅ $\Delta$ROQ ....... कोभुको कसौटी

$\therefore$ रेख PO ≅ रेख RO ..............

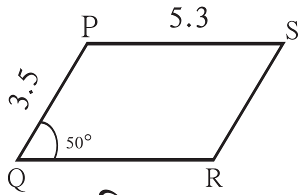
तथा रेख SO ≅ रेख QO .......... } ..... सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

**इसे ध्यान में रखें**

- समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।
- समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है । PQ = 3.5, PS = 5.3 $\angle$Q = 50° तो □PQRS की अन्य भुजाओं तथा कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 5.10

**हल :** □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$ ........अंतःकोण

$\therefore 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

$\therefore \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

अब, $\angle P = \angle R$ तथा $\angle Q = \angle S$ ........समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण

$\therefore \angle R = 130^\circ$ तथा $\angle S = 50^\circ$

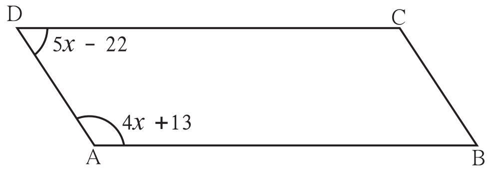
उसी प्रकार, PS = QR तथा PQ = SR ........समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

$\therefore$ QR = 5.3 तथा SR = 3.5

**उदा. (2)** □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = (4x + 13)^\circ$ तथा $\angle D = (5x - 22)^\circ$ तो $\angle B$ तथा $\angle C$ के माप ज्ञात कीजिए ।

**हल :** समांतर चतुर्भुज के संलग्न कोण संपूरक होते हैं ।

$\angle A$ तथा $\angle D$ संलग्न कोण है ।




**आकृति** 5.11

$\therefore (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180$

$\therefore 9x - 9 = 180$

$\therefore 9x = 189$

$\therefore x = 21$

$\therefore \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad \therefore \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore \angle B = 83^\circ$

## प्रश्नसंग्रह 5.1

1. समांतर चतुर्भुज □WXYZ के विकर्ण बिंदु O में प्रतिच्छेदित करते हैं ।
$\angle XYZ = 135^\circ$ तो $\angle XWZ = ?$, $\angle YZW = ?$ यदि $l(OY) = 5$ सेमी तो $l(WY) = ?$

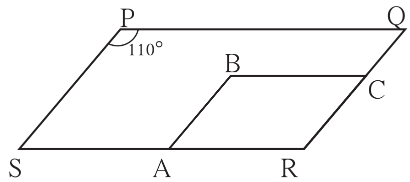
2. समांतर □ABCD में $\angle A = (3x + 12)^\circ$, $\angle B = (2x - 32)^\circ$ तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए । इस आधार पर $\angle C$ तथा $\angle D$ के माप ज्ञात कीजिए ।

3. किसी समांतर चतुर्भुज की परिमिति 150 सेमी है । उसकी एक भुजा दूसरी भुजा से 25 सेमी बड़ी है । तो उस चतुर्भुज की सभी भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए ।

4. किसी समांतर चतुर्भुज के दो संलग्न कोणों के मापों का अनुपात 1 : 2 हो तो उस समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

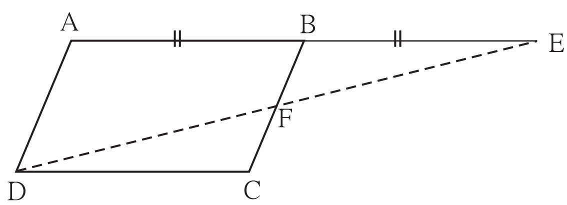
5*. समांतर □ABCD के विकर्ण एक-दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि AO = 5, BO = 12 तथा AB = 13 तो सिद्ध कीजिए कि □ABCD समचतुर्भुज है ।

6. आकृति 5.12 में □PQRS तथा □ABCR दो समांतर चतुर्भुज है । $\angle P = 110^\circ$ तो □ABCR के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।




**आकृति** 5.12

7. आकृति 5.13 में □ABCD समांतर चतुर्भुज है । किरण AB पर बिंदु E इस प्रकार है कि BE = AB तो सिद्ध कीजिए कि रेखा ED यह रेख BC को बिंदु F पर समद्विभाजित करती है ।




**आकृति** 5.13

**थोड़ा याद करें**

**समांतर रेखाओं की कसौटियाँ**

1. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर तथा बनने वाली संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
2. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले एकांतर कोणों की जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
3. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले अंतःकोणों को एक जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

**आओ, जानें**

## समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ (Tests for parallelogram)

माना, □PQRS में PS = QR और PQ = SR है । सिद्‌ध करना है कि □PQRS समांतर चतुर्भुज है । उसके लिए चतुर्भुज के भुजाओं की कौन-सी जोड़ी समांतर है यह दिखाना होगा ? उसके लिए समांतर रेखाओं की किस कसौटी का उपयोग करना पड़ेगा ?

कसौटी के लिए आवश्यक कोण प्राप्त करने के लिए किस तिर्यक रेखा का उपयोग सुविधाजनक होगा ?

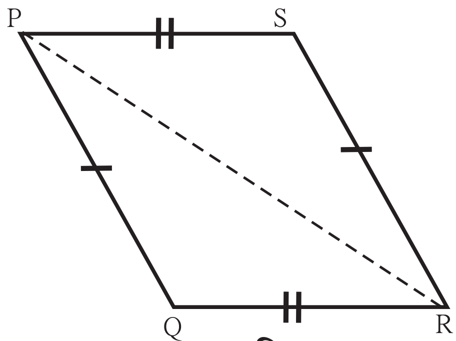

**आकृति** 5.14

**प्रमेय** : चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

**दत्त** : □PQRS में
भुजा PS $\cong$ भुजा QR
भुजा PQ $\cong$ भुजा SR

**साध्य** : □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

**रचना** : विकर्ण PR खींचें




**आकृति** 5.15

**उपपत्ति** : $\Delta$ SPR तथा $\Delta$ QRP में,
भुजा SP $\cong$ भुजा QR ........(दत्त)
भुजा SR $\cong$ भुजा QP ........ (दत्त)
भुजा PR $\cong$ भुजा RP ........ सामान्य भुजा
$\therefore \Delta$ SPR $\cong \Delta$ QRP ...... भुभुभु कसौटी
$\therefore \angle$SPR $\cong \angle$QRP ....... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण
उसी प्रकार $\angle$PRS $\cong \angle$RPQ ..... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

$\angle$SPR और $\angle$QRP यह रेख QR और रेख PS की तिर्यक रेखा PR द्‌वारा बने एकांतर कोण है ।

$\therefore$ भुजा PS || भुजा QR ......(I) समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

उसी प्रकार $\angle$PRS और $\angle$RPQ रेख PQ तथा रेख SR की तिर्यक रेखा PR द्‌वारा बने एकांतर कोण है ।

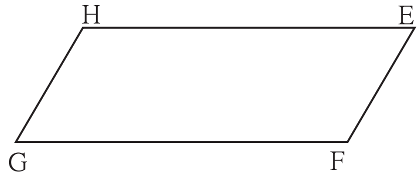
$\therefore$ भुजा PQ || भुजा SR ......(II) समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

$\therefore$ (I) तथा (II) के आधार पर $\square$PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

प्रारंभ में समांतर चतुर्भुज की रचनाओं की दो विधियाँ दी गई हैं । दूसरी विधि में समान सम्मुख भुजाओंवाले चतुर्भुज की रचना की है ।

ऐसा चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज क्यों होता है, यह ध्यान में आया क्या ?

**प्रमेय :** चतुर्भुज की सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।



**आकृति** 5.16

नीचे दिए गए दत्त, साध्य तथा उपपत्ति में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए ।

**दत्त** : $\square$EFGH मे $\angle E \cong \angle G$

तथा $\angle$.......... $\cong$ $\angle$..........

**साध्य :** $\square$EFGH यह ............

**उपपत्ति** : माना $\angle E = \angle G = x$ तथा $\angle H = \angle F = y$

चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल ........ होता है ।

$\therefore \angle E + \angle G + \angle H + \angle F =$ .........

$\therefore x + y +$ .......... $+$ .......... $=$ ..........

$\therefore \square x + \square y =$ .....

$\therefore x + y = 180^\circ$

$\therefore \angle G + \angle H =$ ..........

रेख HE तथा रेख GF की तिर्यक रेखा HG के प्रतिच्छेदन से $\angle$G तथा $\angle$H यह अंतःकोण बनते हैं ।

$\therefore$ भुजा HE || भुजा GF .......... (I) समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी

उसी प्रकार $\angle G + \angle F =$ ..........

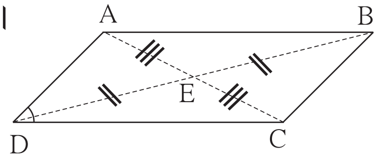
$\therefore$ भुजा .......... || भुजा .......... .......... (II) समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी

$\therefore$ (I) तथा (II) से $\square$EFGH यह .................... है ।

**प्रमेय** : यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

**दत्त** : □ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु E पर समद्विभाजित करते हैं ।
अर्थात रेख AE ≅ रेख CE, रेख BE ≅ रेख DE

**साध्य** : □ABCD यह समांतर चतुर्भुज है ।




**आकृति** 5.17

**उपपत्ति** : नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कर तथा उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

1. रेख AB || रेख DC यह सिद्ध करने हेतु एकांतर कोणों की कौन-सी जोड़ी सर्वांगसम दर्शानी होगी? एकांतर कोणों की वह जोड़ी कौन-सी तिर्यक रेखा द्वारा प्राप्त होगी ?
2. एकांतर कोणों की चुनी गई जोड़ियों के कोण कौन-से त्रिभुजों के कोण हैं?
3. उनमें से कौन-से त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार सर्वांगसम हैं?
4. इस प्रकार विचार कर रेख AD || रेख BC सिद्ध कर सकते हैं । ना ?

**कोई चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है यह सिद्ध करने के लिए उपर्युक्त प्रमेय का उपयोग होता है । इसीलिए इन प्रमेयों को समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ कहते हैं ।**

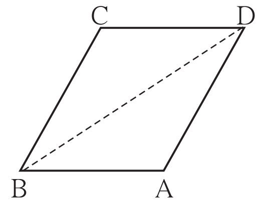
**एक प्रमेय का उपयोग समांतर चतुर्भुज की कसौटी के रूप में होता है ।**

**प्रमेय** : किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी सर्वांगसम तथा समांतर हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

**दत्त** : □ABCD में रेख CB ≅ रेख DA तथा रेख CB || रेख DA

**साध्य** : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

**रचना** : विकर्ण BD खींचिए ।




**आकृति** 5.18

नीचे दी गई संक्षिप्त उपपत्ति को विस्तार से लिखिए ।

$\Delta$ CBD ≅ $\Delta$ ADB .......भु-को-भु कसौटी

$\therefore$ $\angle$CDB ≅ $\angle$ABD ..... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

$\therefore$ रेख CD || रेख BA ..... समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

**इसे ध्यान में रखें**

- जिस चतुर्भुज की सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो, वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ सर्वांगसम होती हैं वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हो, वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी सर्वांगसम तथा समांतर हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

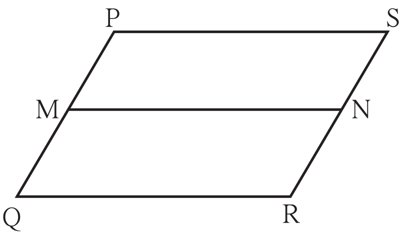
इन प्रमेयों को समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ कहते हैं ।

**थोड़ा, सोचें**

कॉपी में छपी गई रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं । इन रेखाओं का उपयोग कर समांतर चतुर्भुज की रचना कैसे कर सकते हैं?

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है । बिंदु M यह भुजा PQ का तथा बिंदु N भुजा RS का मध्यबिंदु है । तो सिद्ध कीजिए कि □MQRN समांतर चतुर्भुज हैं ।




आकृति 5.19

**दत्त** : □PQRS समांतर चतुर्भुज है । भुजा PQ तथा भुजा RS के मध्यबिंदु क्रमशः M तथा N है ।

**साध्य** : □PMNS समांतर चतुर्भुज है ।
□MQRN समांतर चतुर्भुज है ।

**उपपत्ति** : भुजा PQ || भुजा SR

$\therefore$ भुजा PM || भुजा SN ...... ($\because$ P-M-Q; S-N-R) ......(I)

उसी प्रकार भुजा PQ $\cong$ भुजा SR

$\therefore \frac{1}{2}$ PQ = $\frac{1}{2}$ SR ($\because$ PQ = SR)

$\therefore$ PM = SN

$\therefore$ भुजा PM $\cong$ भुजा SN ..... ($\because$ M तथा N मध्यबिंदु हैं)......(II)

$\therefore$ (I) तथा (II) से □PMNQ यह समांतर चतुर्भुज है,

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि □MQRN समांतर चतुर्भुज हैं ।

**उदा. (2)** $\Delta$ ABC की भुजाओं AB तथा AC के मध्यबिंदु क्रमशः D तथा E है । किरण ED पर बिंदु F इस प्रकार है कि ED = DF । तो सिद्ध कीजिए कि □AFBE समांतर चतुर्भुज है । इस उदाहरण के लिए दत्त तथा साध्य स्वयं लिखें और उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

**दत्त** : --------------------

**साध्य** : -----------------------

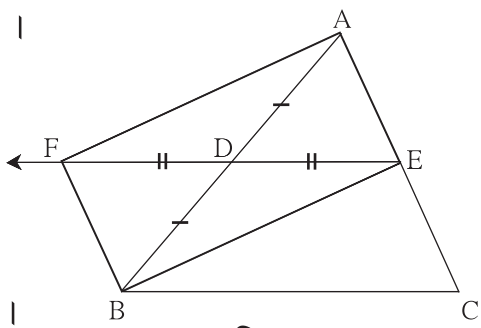
**उपपत्ति** : रेख AB तथा रेख EF यह □AFBE का $\boxed{\quad\quad}$ है ।

रेख AD $\cong$ रेख DB....... $\boxed{\quad\quad}$

रेख $\boxed{\quad\quad}$ $\cong$ रेख $\boxed{\quad\quad}$.......रचना ।

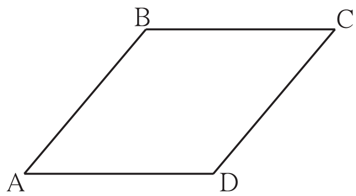
$\therefore$ □AFBE के विकर्ण एक-दूसरे का $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore$ $\boxed{\quad\quad}$ कसौटी से □AFBE समांतर चतुर्भुज है ।




आकृति 5.20

**उदा. (3)** सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समचर्तुभुज, समांतर चतुर्भुज होता है ।




आकृति 5.21

**दत्त** : □ABCD समचर्तुभुज है

**साध्य** : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

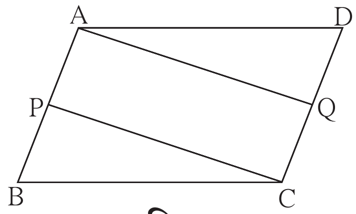
**उपपत्ति** : AB = BC = CD = AD (दत्त)

$\therefore$भुजा AB $\cong$ भुजा CD तथा भुजा BC $\cong$ भुजा AD

$\therefore$ □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।.... (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा कसौटी )

## प्रश्नसंग्रह 5.2

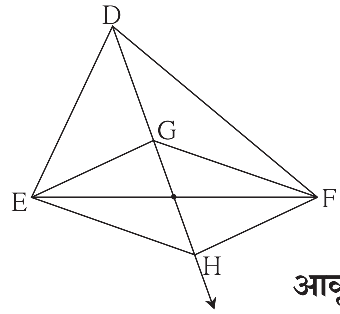
1. आकृति 5.22 में, □ABCD समांतर चतुर्भुज है । बिंदु P तथा बिंदु Q क्रमशः भुजा AB तथा भुजा DC के मध्यबिंदु हैं तो सिद्ध कीजिए कि □APCQ समांतर चतुर्भुज है ।



आकृति 5.22

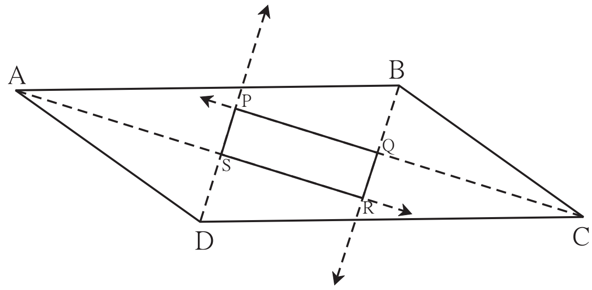
2. सिद्ध कीजिए कि, आयत एक समांतर चतुर्भुज होता है ।

3. आकृति 5.23 में, बिंदु G, Δ DEF की माध्यिकाओं का संगामी बिंदु है । किरण DG पर बिंदु H इस प्रकार लें कि D-G-H तथा DG = GH, हो तो सिद्ध कीजिए कि □GEHF समांतर चतुर्भुज है ।



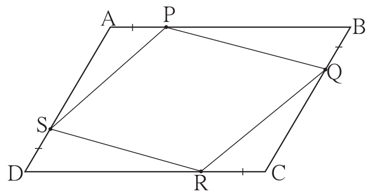
आकृति 5.23

4*. सिद्ध कीजिए कि, समांतर चतुर्भुज के चारों कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज आयत होता है । (आकृति 5.24)

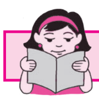


आकृति 5.24

5. संलग्न आकृति 5.25 में समांतर चतुर्भुज □ABCD की भुजाओं पर P, Q, R, S इस प्रकार है कि, AP = BQ = CR = DS तो सिद्ध कीजिए कि □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।



आकृति 5.25



### आओ, जानें

### आयत, समचर्तुभुज तथा वर्ग के विशिष्ट गुणधर्म
### (Properties of rectangle, rhombus and square)

आयत, समचतुर्भुज तथा वर्ग भी समांतर चतुर्भुज ही होते हैं । इसीलिए उनकी सम्मुख भुजाओं का समान होना, सम्मुख कोणों का समान होना तथा विकर्णों का परस्पर समद्विभाजित होना ये गुणधर्म तीनों प्रकार के चतुर्भुजों में होते हैं ।

किंतु इनसे भी अधिक गुणधर्म इन तीनों प्रकार के चतुर्भुजों में होते हैं । उसे हम देखेंगे । आगे इन गुणधर्मों की उपपत्ति संक्षेप में दी गई है । दिए गए सोपानों को ध्यान में रखते हुए उपपत्ति को विस्तार में लिखिए ।

**प्रमेय** : आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।

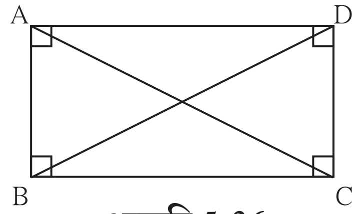
**दत्त** : □ABCD एक आयत है ।

**साध्य** : विकर्ण AC ≅ विकर्ण BD

**उपपत्ति** : संक्षिप्त में दी गई उपपत्ति को कारण सहित लिखिए ।

$\Delta$ ADC ≅ $\Delta$ DAB ...... भुकोभु कसौटी

विकर्ण AC ≅ विकर्ण BD..... (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भुजा)



**आकृति** 5.26

**प्रमेय** : वर्ग के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

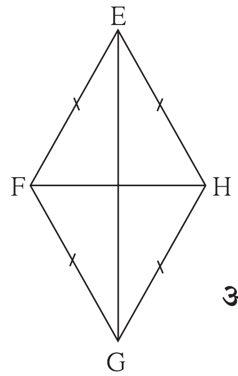
दत्त, साध्य तथा उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

**प्रमेय** : समचर्तुभुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

**दत्त** : □EFGH एक समचतुर्भुज है ।

**साध्य** : (i) विकर्ण EG, विकर्ण HF का लंबसमद्विभाजक है ।

(ii) विकर्ण HF, विकर्ण EG का लंबसमद्विभाजक है ।



**आकृति** 5.27

**उपपत्ति** : (i) रेख EF ≅ रेख EH
रेख GF ≅ रेख GH } दत्त

रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समदूरस्थ प्रत्येक बिंदु उस रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर होता है ।

∴ बिंदु E तथा बिंदु G यह रेख HF के लंबसमद्विभाजक पर है ।

दो भिन्न बिंदु से एक और केवल एक ही रेखा जाती है ।

∴ रेखा EG यह विकर्ण HF की लंबसमद्विभाजक रेखा है ।

∴ विकर्ण EG यह विकर्ण HF की लंबसमद्विभाजक है ।

(ii) इसी प्रकार हम सिद्‌ध कर सकते हैं कि विकर्ण HF यह विकर्ण EG का लंबसमद्विभाजक है ।

नीचे दिए गए प्रमेयों की उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

- वर्ग के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण उसके सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण उसके सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।

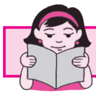
**इसे ध्यान में रखें**

- आयत के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण उसके सम्मुख कोण को समद्विभाजित करते हैं ।

## प्रश्नसंग्रह 5.3

1. आयत ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि AC = 8 सेमी तो BO = ? यदि $\angle CAD = 35^\circ$ तो $\angle ACB$ = ?
2. समचतुर्भुज PQRS में, यदि PQ = 7.5 सेमी, तो QR = ? यदि $\angle QPS = 75^\circ$ तो $\angle PQR$ = ?, $\angle SRQ$ = ?
3. वर्ग IJKL के विकर्ण बिंदु M पर परस्पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो $\angle IMJ$, $\angle JIK$ तथा $\angle LJK$ के माप ज्ञात कीजिए ।
4. किसी समचतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई क्रमशः 20 सेमी, 21 सेमी है तो उस चतुर्भुज की भुजा तथा परिमिति ज्ञात कीजिए ।
5. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य, कारण सहित लिखिए ।

(i) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है ।
(ii) प्रत्येक समचतुर्भुज आयत होता है ।
(iii) प्रत्येक आयत समांतर चतुर्भुज होता है ।
(iv) प्रत्येक वर्ग आयत होता है ।
(v) प्रत्येक वर्ग समचतुर्भुज होता है ।
(vi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज, आयत होता है ।

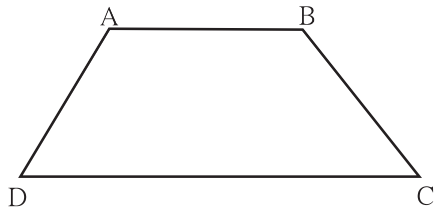


## आओ, जानें

### समलंब चतुर्भुज (Trapezium)

जिस चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर होती है उस चर्तुभुज को समलंब चतुर्भुज कहते हैं ।

संलग्न आकृति में □ABCD की केवल भुजा AB तथा भुजा DC यह जोड़ी परस्पर समांतर है अर्थात यह समलंब चतुर्भुज है ।

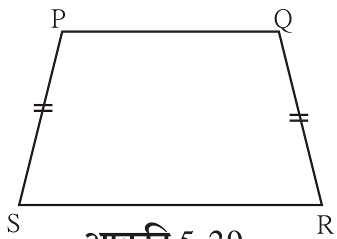


आकृति 5.28

समांतर रेखाओं के गुणधर्म के अनुसार संलग्न कोणों की जोड़ी $\angle A$ तथा $\angle D$ संपूरक है । इसी प्रकार $\angle B$ तथा $\angle C$ संलग्न कोणों की जोड़ी भी संपूरक होती है ।

समलंब चतुर्भुज में संलग्न कोणों की दोनों जोड़ियाँ संपूरक होती हैं ।

जिस समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाओं की जोड़ी सर्वांगसम हो तो उस चतुर्भुज को **समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज** (Isosceles trapezium) कहते हैं ।

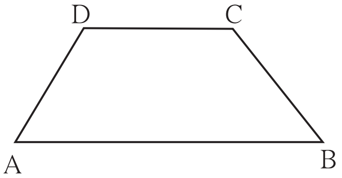


आकृति 5.29

**किसी भी समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को उस समलंब चतुर्भुज की माध्यिका होती है ।**

**हल किए गए उदाहरण :**

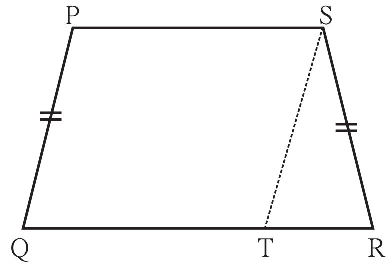
**उदा. (1)** □ABCD के कोणों के मापों का अनुपात 4 : 5 : 7 : 8 है । तो सिद्ध कीजिए कि □ABCD समलंब चतुर्भुज है ।



**आकृति** 5.30

**हल :** माना, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ के माप क्रमशः
$(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, तथा $(8x)^\circ$ है ।
चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल $360^\circ$होता है ।
$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$
$\therefore\ 24x = 360 \quad \therefore\ x = 15$
$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,
तथा $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$
अब, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$
$\therefore$ भुजा CD $\parallel$ भुजा BA...... (I) (समांतर रेखाओं की अंत:कोणों की कसौटी)
परंतु $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$
$\therefore$ भुजा BC तथा भुजा AD परस्पर समांतर नहीं है । .........(II)
$\therefore$ □ABCD समलंब चतुर्भुज है । ..........(I) तथा (II) से

**उदा. (2)** समलंब □PQRS में भुजा PS $\parallel$ भुजा QR तथा भुजा PQ $\cong$ भुजा SR,
भुजा QR > भुजा PS तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQR \cong \angle SRQ$



**आकृति** 5.31

**दत्त** : □PQRS में भुजा PS $\parallel$ भुजा QR
तथा भुजा PQ $\cong$ भुजा SR

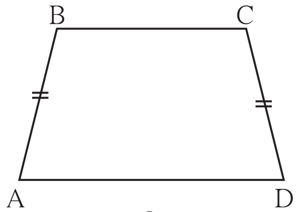
**साध्य** : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

**रचना** : बिंदु S से भुजा PQ के समांतर एक रेखाखंड खींचिए । जो भुजा QR को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है ।

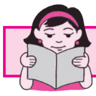
**उपपत्ति** : □PQRS में,
रेख PS $\parallel$ रेख QT ........दत्त तथा Q-T-R
रेख PQ $\parallel$ रेख ST ........रचना
$\therefore$ □PQTS समांतर चतुर्भुज है ।
$\therefore \angle PQT \cong \angle STR$ ..... संगत कोण (I)
इसी प्रकार रेख PQ $\cong$ रेख ST
परंतु रेख PQ $\cong$ रेख SR ......(दत्त)
$\therefore$ रेख ST $\cong$ रेख SR
$\therefore \angle STR \cong \angle SRT$.....समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय (II)
$\therefore \angle PQT \cong \angle SRT$ .......(I) तथा (II) से
$\therefore\ \angle PQR \cong \angle SRQ$ ........ Q-T-R
इस आधार पर सिद्ध होता है कि समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के आधार के कोण सर्वांगसम होते हैं ।

## प्रश्नसंग्रह 5.4

1. यदि □IJKL में भुजा IJ || भुजा KL हो और $\angle I = 108°$ $\angle K = 53°$ तो $\angle J$ तथा $\angle L$ के माप ज्ञात कीजिए ।
2. □ABCD में भुजा BC || भुजा AD, हो और भुजा AB ≅ भुजा DC, $\angle A = 72°$ तो $\angle B$, तथा $\angle D$ के माप निश्चित कीजिए ।
3. आकृति 5.32 में □ABCD में भुजा BC < भुजा AD, भुजा BC || भुजा AD तथा यदि भुजा BA ≅ भुजा CD हो तो सिद्‌ध कीजिए कि $\angle ABC \cong \angle DCB$



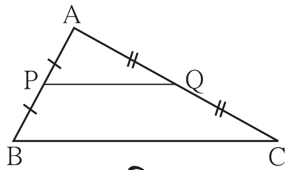
आकृति 5.32


**आओ, जानें**

**त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं का प्रमेय**
**(Theorem of midpoints of two sides of a triangle)**

**कथन** : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा लंबाई में तीसरी भुजा का आधा होता है ।

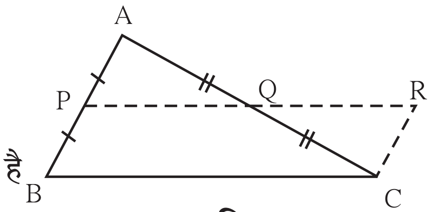
**दत्त** : $\Delta$ ABC की भुजाओं AB तथा BC के मध्यबिंदु क्रमशः P तथा Q है ।



आकृति 5.33

**साध्य** : रेख PQ || रेख BC तथा $PQ = \frac{1}{2}$ BC

**रचना** : रेख PQ को बिंदु R तक इस प्रकार बढ़ाइए कि PQ = QR रेख RC खीचें ।



आकृति 5.34

**उपपत्ति** : $\Delta$ AQP तथा $\Delta$ CQR में
रेख PQ ≅ रेख QR ...... रचना
रेख AQ ≅ रेख QC ...... Q यह AC का मध्यबिंदु है
$\angle AQP \cong \angle CQR$ ..... शीर्षाभिमुख कोण
∴ $\Delta$ AQP ≅ $\Delta$ CQR ....... भुकोभु कसौटी
$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ ..... (1) सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण
∴ रेख AP ≅ रेख CR ......(2) सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ
कथन (1) से रेखा AB || रेखा CR.........एकांतर कोण कसौटी
कथन (2) से रेख AP ≅ रेख CR
किंतु रेख AP ≅ रेख PB ≅ रेख CR तथा रेख PB || रेख CR
∴ □PBCR समांतर चतुर्भुज है ।
∴ रेख PQ || रेख BC तथा PR = BC .....(समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ लंबाई में समान होती है)

$PQ = \frac{1}{2}\ PR$ ...... रचना

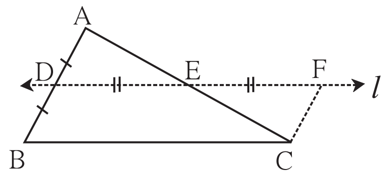
$\therefore\ PQ = \frac{1}{2}\ BC \qquad \because\ PR = BC$

## त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं के प्रमेय का विलोम

**प्रमेय** : त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिंदु से जाने वाला तथा दूसरी भुजा के समांतर रेखाखंड तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है ।

इस कथन के लिए आकृति, दत्त, साध्य, रचना दी गई है । इस आधार पर उस कथन की उपपत्ति लिखने का प्रयत्न कीजिए ।

**दत्त** : $\Delta$ ABC में बिंदु D यह भुजा AB का मध्यबिंदु है । बिंदु D से भुजा BC के समांतर खींची गई रेखा यह भुजा AC को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती है ।



**आकृति** 5.35

**साध्य** : AE = EC

**रचना** : बिंदु C से रेख AB के समांतर रेख खींचिए । यह रेखा रेख $l$ को जिस बिंदु में प्रतिच्छेदित करती है उस बिंदु को F नाम दीजिए।

**उपपत्ति** : रेखा $l \parallel$ रेख BC (दत्त) तथा की गई रचना का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि □BCFD समांतर चतुर्भुज है । $\Delta$ ADE $\cong$ $\Delta$ CFE सिद्ध कर उस आधार पर साध्य सिद्ध कीजिए ।

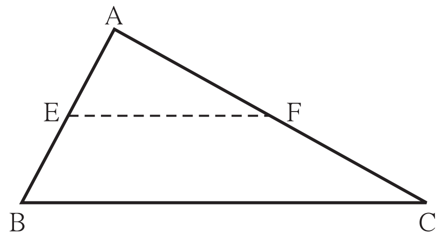
### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** $\Delta$ ABC में बिंदु E तथा बिंदु F यह क्रमशः भुजा AB तथा AC के मध्यबिंदु हैं । यदि EF = 5.6 तो BC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**हल :** $\Delta$ ABC में बिंदु E तथा बिंदु F क्रमशः भुजा AB तथा भुजा AC के मध्यबिंदु हैं ।

$EF = \frac{1}{2}\ BC$ .......मध्यबिंदु का प्रमेय

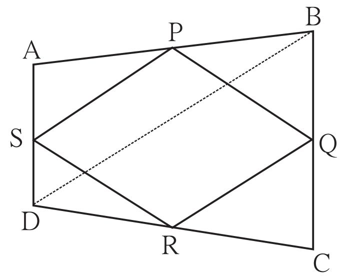
$5.6 = \frac{1}{2}\ BC \qquad \therefore\ BC = 5.6 \times 2 = 11.2$



**आकृति** 5.36

**उदा. (2)** सिद्ध करें कि किसी भी चतुर्भुज के भुजाओं के मध्यबिंदुक्रम से जोड़ने पर बनने वाला चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

**दत्त** : □ABCD में बिंदु P, Q, R तथा S यह क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा AD के मध्यबिंदु हैं ।



**आकृति** 5.37

**साध्य** : □PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

**रचना** : विकर्ण BD खींचिए ।

**उपपत्ति:** $\Delta$ ABD में बिंदु S तथा बिंदु P यह क्रमशः भुजा AD तथा AB के मध्यबिंदु हैं ।

$\therefore$ मध्यबिंदु के प्रमेयानुसार, PS $\parallel$ DB तथा PS = $\frac{1}{2}$ BD ........... (1)

उसी प्रकार $\Delta$ DBC में बिंदु Q तथा बिंदु R यह क्रमशः भुजा BC तथा भुजा DC के मध्यबिंदु हैं ।

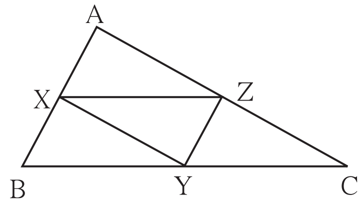
$\therefore$ QR $\parallel$ BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD ........... (2) मध्यबिंदु के प्रमेयानुसार

$\therefore$ PS $\parallel$ QR, PS = QR ................ (1) तथा (2) से

$\therefore$ $\square$PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

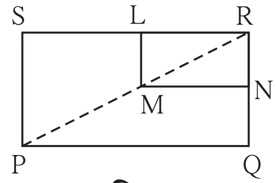
## प्रश्नसंग्रह 5.5

1. आकृति 5.38 में $\Delta$ ABC मे बिंदु X, Y, Z यह क्रमशः भुजाओं AB, BC तथा AC के मध्यबिंदु है । AB = 5 सेमी, AC = 9 सेमी तथा BC = 11 सेमी, तो XY, YZ, XZ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



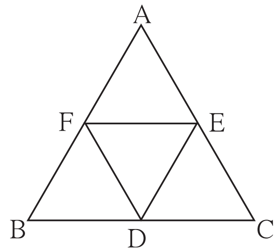
आकृति 5.38

2. आकृति 5.39 में $\square$PQRS तथा $\square$MNRL आयत है । बिंदु M यह PR का मध्यबिंदु है । तो सिद्ध कीजिए कि (i) SL = LR, (ii) LN = $\frac{1}{2}$SQ ।



आकृति 5.39

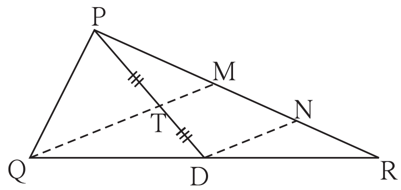
3. आकृति 5.40 में $\Delta$ ABC समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु F, D, E यह क्रमशः भुजा AB, भुजा BC, भुजा AC के मध्यबिंदु हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta$ FED यह समबाहु त्रिभुज है ।



आकृति 5.40

4. आकृति 5.41 में रेख PD यह $\Delta$ PQR की माध्यिका है । बिंदु T यह PD का मध्यबिंदु है । QT को आगे बढ़ाने पर यह PR को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करता है । तो सिदघ कीजिए कि $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$

[सूचना : DN $\parallel$ QM खींचें ।]



आकृति 5.41

## प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. नीचे दिए गए बहु वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरों में से सही विकल्प चुनिए ।

(i) जिस चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं की सभी जोड़ियाँ सर्वांगसम हों तो उस चतुर्भुज का नाम क्या होगा?

(A) आयत (B) समांतर चतुर्भुज (C) समलंब चतुर्भुज (D) समचतुर्भुज

(ii) किसी वर्ग के विकर्ण की लंबाई $12\sqrt{2}$ सेमी हो तो उसकी परिमिति कितनी होगी ?

(A) 24 सेमी (B) $24\sqrt{2}$ सेमी (C) 48 सेमी (D) $48\sqrt{2}$ सेमी

(iii) किसी समचर्तुभुज के सम्मुख कोणों के माप $(2x)^\circ$ तथा $(3x - 40)^\circ$ हो तो $x$ = ?

(A) $100^\circ$ (B) $80^\circ$ (C) $160^\circ$ (D) $40^\circ$

**2.** किसी आयत की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी तथा 24 सेमी हैं तो उस चतुर्भुज की विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

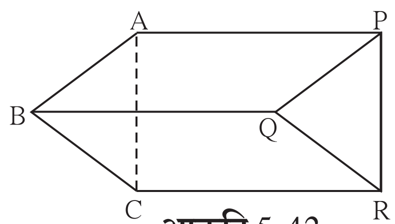
**3.** वर्ग के विकर्ण की लंबाई 13 सेमी है तो वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**4.** समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं का अनुपात 3:4 है । उसकी परिमिति 112 सेमी हो तो उसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**5.** समचर्तुभुज PQRS के विकर्ण PR तथा विकर्ण QS की लंबाई क्रमशः 20 सेमी तथा 48 सेमी है तो समचर्तुभुज की भुजा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**6.** आयत PQRS के विकर्ण परस्पर बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि $\angle QMR = 50^\circ$ तो $\angle MPS$ का माप ज्ञात कीजिए ।

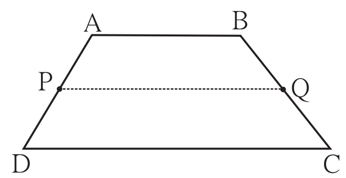
**7.** संलग्न आकृति 5.42 में
रेख AB || रेख PQ , रेख AB ≅ रेख PQ,
रेख AC || रेख PR, रेख AC ≅ रेख PR
तो सिद्ध कीजिए कि
रेख BC || रेख QR तथा रेख BC ≅ रेख QR



**आकृति** 5.42

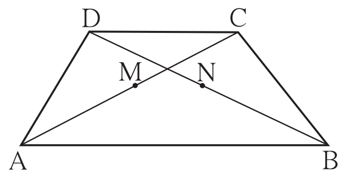
**8*.** संलग्न आकृति 5.43 में □ABCD समलंब चतुर्भुज है । AB || DC है । रेख AD तथा रेख BC के मध्यबिंदु क्रमशः P तथा Q हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$PQ \parallel AB \text{ तथा } PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$$



**आकृति** 5.43

**9.** संलग्न आकृति 5.44 में □ABCD यह समलंब चतुर्भुज है । AB || DC, बिंदु M तथा बिंदु N क्रमशः विकर्ण AC तथा विकर्ण DB के मध्यबिंदु है तो सिद्ध कीजिए कि MN || AB



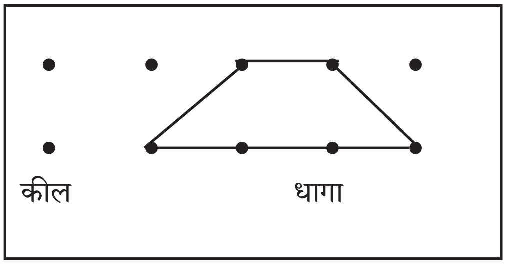
**आकृति** 5.44

**कृति**

चतुर्भुज की विभिन्न प्रमेयों की जाँच करना ।

साहित्य : 15 सेमी × 10 सेमी का प्लायवुड का टुकड़ा; 12 से 15 किल, मोटा धागा, कैंची

सूचना : 15 सेमी × 10 सेमी प्लायवुड के टुकड़े पर सरल रेखा में 2 सेमी की दूरी पर 5 कील ठोकिए उसी तरह नीचे की सरल रेखा में भी 2 सेमी की दूरी पर कील ठोकिए । धागे से भिन्न-भिन्न चतुर्भुज (किल का आधार लेकर) बनाइए । भुजा संबंधी गुणधर्मों की जाँच धागे से कीजिए । इस आधार पर कोण संबंधी गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।



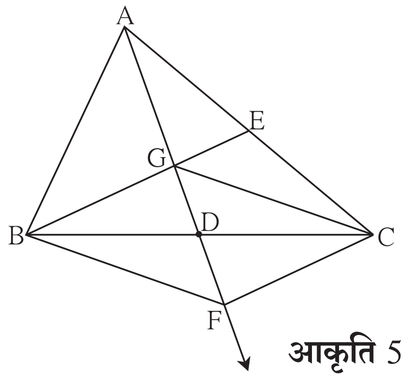
**आकृति** 5.45

**अधिक जानकारी हेतु**

**त्रिभुज की माध्यिकाओं का संगामी बिंदु, माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है ।**

इस गुणधर्म की जानकारी आपको है ।

इसे सिद्‌ध करने की विधि का अध्ययन कीजिए ।



**आकृति** 5.46

**दत्त** : $\Delta$ ABC की माध्यिकाएँ रेख AD तथा रेख BE परस्पर बिंदु G पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

**साध्य** : AG : GD = 2 : 1

**रचना** : किरण AD पर बिंदु F इस प्रकार लीजिए कि G-D-F तथा GD = DF

**उपपत्ति** : □BGCF के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ।. .......... दत्त तथा रचना

$\therefore$ □BGCF समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore$ रेखा BE || रेखा FC ......समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं को समाविष्ट करने वाली रेखा

अब $\Delta$ AFC में बिंदु E, भुजा AC का मध्यबिंदु है । .......... (दत्त)

रेख EB || रेखा FC

त्रिभुज की किसी एक भुजा के मध्यबिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है ।

$\therefore$ रेख AF का G यह मध्यबिंदु है ।

$\therefore$ AG = GF

परंतु AG = 2 GD

$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ अर्थात AG : GD = 2 : 1