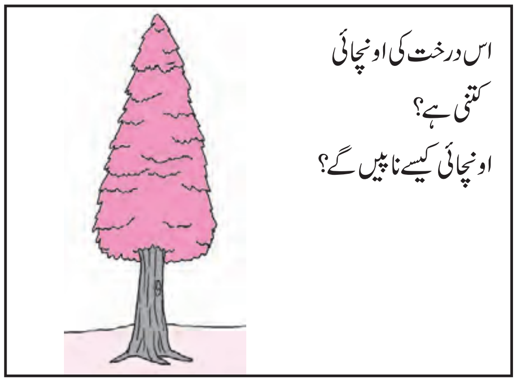
8 علم مثلث Trigonometry

آیئے، سیکھیں

- علم مثلث کا تعارف
- مثلثیاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق
- مثلثیاتی نسبتیں
- مخصوص زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

علم مثلث کا تعارف (Introduction to trigonometry)



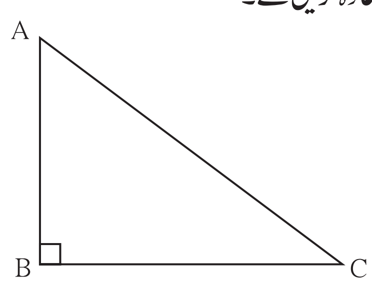
ہم زمین پر فاصلہ ڈوری سے یا چلتے ہوئے ناپ سکتے ہیں۔لیکن سمندر میں جہاز کا روشنی کے مینار سے فاصلہ کس طرح ناپ سکتے ہیں؟ درخت کی اونچائی کیسے ناپیں گے؟

اوپر دی ہوئی تصاویر کا مشاہدہ کیجیے۔تصاویر میں سوال ریاضی سے تعلق رکھتا ہے۔ان سوالوں کے جوابات حاصل کرنے کے لیے ریاضی مضمون کی علم مثلث، شاخ کا استعمال ہوتا ہے۔علم مثلث کا استعمال انجینئرنگ، علم فلکیات، جہازرانی وغیرہ شاخوں میں کیا جاتا ہے۔

علم مثلث (Trigonometry) یہ لفظ تین لاطینی الفاظ سے بنایا گیا ہے۔Tri یعنی تین، gona یعنی ضلع اور metron یعنی ناپ تول۔

آیئے ذرا یاد کریں

ہم مثلث کا مطالعہ کر چکے ہیں۔قائمۃ الزاویہ مثلث، فیثا غورث کا مسئلہ، مشابہ مثلثوں کی خصوصیات پر مبنی علم مثلث مضمون کی ابتدا ہوتی ہے۔ ان کا اعادہ کریں گے۔



شکل 8.1

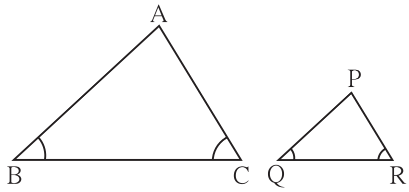
- ΔABC میں $\angle B$ قائمۃ الزاویہ ہے۔جبکہ $\angle B$ یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع AC وتر ہے۔

$\angle A$ کے مقابل کا ضلع BC اور $\angle C$ کے مقابل کا ضلع AB ہے۔اس مثلث سے متعلق فیثا غورث کے مسئلہ کا بیان :

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

• اگر $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ ہوتب ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

یعنی $\frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$



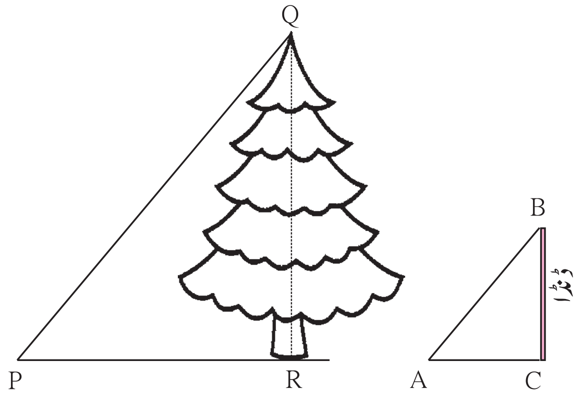
شکل 8.2

کسی بڑے درخت کی اونچائی ناپنا ہوتب متشابہ مثلثوں کے خصوصیت کا استعمال کر کے وہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔ اسے دیکھیں گے۔

عملی کام :

(یہ تجربہ تیز دھوپ کے دوران کیجیے)

QR درخت کی اونچائی ہے۔ BC ایک ڈنڈے کی اونچائی ہے۔ چھوٹے ڈنڈے کو زمین میں کھڑا گاڑ کر اس کی اونچائی اور اس کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ درخت کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ سورج کی شعاعیں متوازی ہونے کی وجہ سے ΔPQR اور ΔABC



شکل 8.3

مشابہ زاویہ والے یعنی متشابہ مثلث ہیں۔ اسے سمجھ لیں۔ متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

اس کا استعمال کر کے $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PR}$ ملتا ہے۔

$$\text{درخت کی اونچائی} = QR = \frac{BC}{AC} \times PR$$

یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

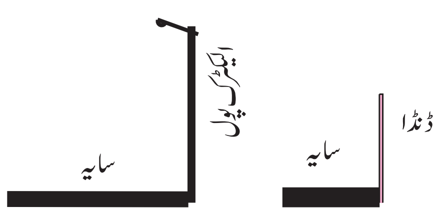
PR ، BC اور AC کی قیمتیں ہمیں معلوم ہیں۔ یہ قیمتیں مساوات میں رکھ کر QR کی لمبائی یعنی درخت کی اونچائی معلوم کی جا سکتی ہے۔

غور کیجیے

یہ تجربہ صبح 8 بجے کرنے کی بجائے دوپہر 11:30 یا 1:30 بجے کرنا سہولت بخش ہے۔ ایسا کیوں؟

عملی کام :

مذکورہ بالا عملی کام کر کے آپ اپنے اطراف اونچے درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔ اطراف میں درخت نہ ہو تو کسی کھمبے (ستون) کی اونچائی معلوم کیجیے۔

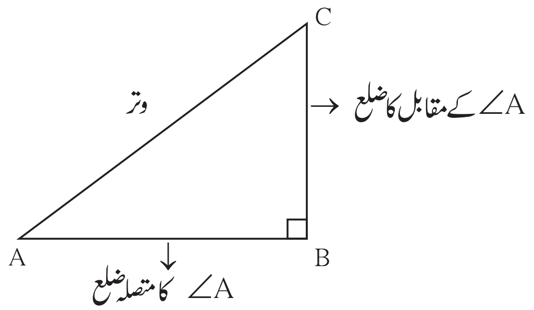


شکل 8.4

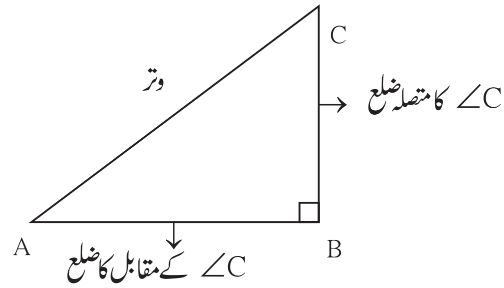
آیئے سمجھ لیں

قائمۃ الزاویہ مثلث سے متعلق کچھ اصطلاحات (Terms related to right angled triangle)

قائمۃ الزاویہ Δ ABC میں، $\angle B = 90°$ ہے تب $\angle A$ اور $\angle C$ حادہ زاویہ ہیں۔

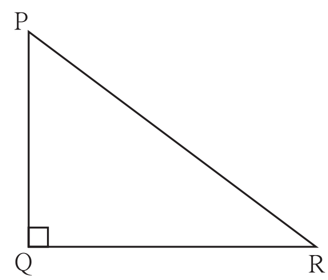


شکل 8.5



شکل 8.6

مثال : قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں،

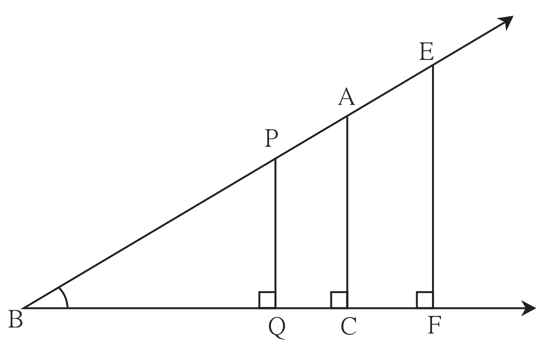


شکل 8.7

$\angle P$ کا متصلہ ضلع = ... , $\angle P$ کے مقابل کا ضلع = ...

$\angle R$ کا متصلہ ضلع = ... , $\angle R$ کے مقابل کا ضلع = ...

مثلثیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)



شکل 8.8

متصلہ شکل 8.8 میں کچھ قائمۃ الزاویہ مثلث دکھائے ہوئے ہیں۔ ان کا $\angle B$ مشترک زاویہ ہے۔اس کی وجہ سے تمام قائمۃ الزاویہ مثلث متشابہ ہیں۔

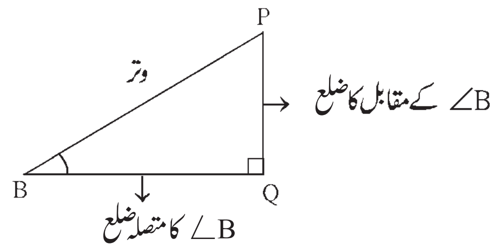
یہاں $\Delta PQB \sim \Delta ACB$

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

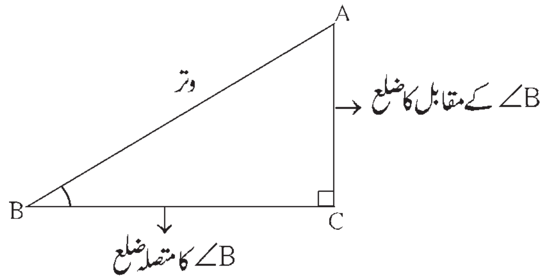
$$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad , \quad \therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} \quad \text{... (عمل تبدیل)}$$

$$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad , \quad \therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB} \quad \text{... (عمل تبدیل)}$$

درج ذیل اشکال 8.9 اور 8.10 کو شکل 8.8 سے علیحدہ کیے گئے مثلثوں کی ہیں۔



شکل 8.9



شکل 8.10

(i) $\triangle PQB$ میں،

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\triangle ACB$ میں،

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ اور $\frac{AC}{AB}$ مساوی نسبتیں ہیں۔

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی سائن (sine) نسبت کہتے ہیں۔اس نسبت کو مختصراً sinB لکھتے ہیں۔

(ii) ΔPQB اور ΔACB میں،

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} \quad \text{اور} \quad \frac{BQ}{PB} = \frac{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی کوسائن (cosine) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً cos B لکھتے ہیں۔

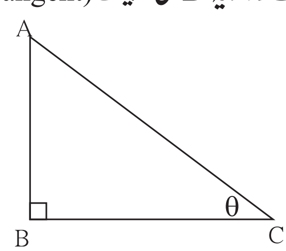
(iii) Δ PQB اور Δ ACB میں،

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{∠B کا متصلہ ضلع}} \quad \text{اور} \quad \frac{PQ}{BQ} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}$$

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی ٹینجینٹ (Tangent) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً tan B لکھتے ہیں۔

مثال : کبھی کبھی قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائشوں کو θ (تھیٹا)، α (الفا)، β (بیٹا) وغیرہ لاطینی حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ متصلہ شکل 8.11 میں Δ ABC کے حادہ زاویہ C کی پیمائش θ حروف سے ظاہر کی گئی ہے ایسے وقت میں sin C ، cos C، tan C نسبتوں کو بالترتیب $\tan\theta$، $\cos\theta$، $\sin\theta$ لکھتے ہیں۔



شکل 8.11

$\sin C = \sin \theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos C = \cos \theta = \frac{BC}{AC}$, $\tan C = \tan \theta = \frac{AB}{BC}$

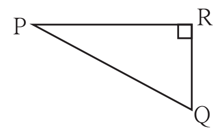
اسے دھیان میں رکھیں

- sin نسبت = زاویہ کے مقابل کا ضلع / وتر
- cos نسبت = زاویہ کا متصلہ ضلع / وتر
- tan نسبت = زاویہ کے مقابل کا ضلع / زاویہ کا متصلہ ضلع

مشقی سیٹ 8.1

.1 متصلہ شکل 8.12 میں ΔPQR میں $\angle R$ قائمہ زاویہ ہے۔تب درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin P$ (ii) $\cos Q$ (iii) $\tan P$ (iv) $\tan Q$

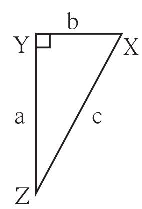


شکل 8.12

.2 متصلہ شکل 8.13 میں ΔXYZ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle XYZ=90°$ ہے۔اضلاع کی لمبائیاں a، b، c دی ہوئی ہیں۔اس کی بناء پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin X$ (ii) $\tan Z$ (iii) $\cos X$ (iv) $\tan X$

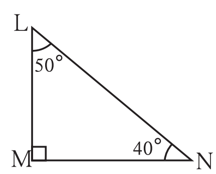


شکل 8.13

.3 قائمۃ الزاویہ ΔLMN میں $\angle LMN=90°$، $\angle L=50°$ اور $\angle N= 40°$ ہے۔اس بناء پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin 50°$ (ii) $\cos 50°$

(iii) $\tan 40°$ (iv) $\cos 40°$

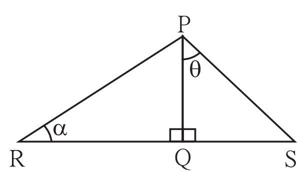


شکل 8.14

.4 دی ہوئی شکل 8.15 میں $\angle PQR = 90°$، $\angle PQS = 90°$، $\angle PRQ = \alpha$ اور $\angle QPS=\theta$ ہوتب درج ذیل مثلثیاتی نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$

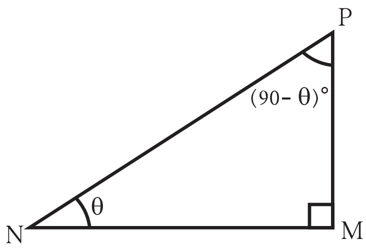
(ii) $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$



شکل 8.15

آیئے سمجھ لیں

مثلثیاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق (Relation among trignometric ratios)



شکل 8.16

شکل 8.16 میں ΔPMN قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔ $m\angle M=90°$،

$\angle P$ اور $\angle N$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں۔

اگر $m\angle N = \theta$ تب $m\angle P = 90 - \theta$

$$\sin \theta = \frac{PM}{PN} \quad \ldots(1)$$

$$\cos \theta = \frac{NM}{PN} \quad \ldots(2)$$

$$\tan \theta = \frac{PM}{NM} \quad \ldots(3)$$

$$\sin(90 - \theta) = \frac{NM}{PN} \quad \ldots(4)$$

$$\cos(90 - \theta) = \frac{PM}{PN} \quad \ldots(5)$$

$$\tan(90 - \theta) = \frac{NM}{PM} \quad \ldots(6)$$

$\therefore \sin \theta = \cos(90 - \theta)$ ... [بیان (1) اور (5) سے]

$\cos \theta = \sin(90 - \theta)$ ... [بیان (2) اور (4) سے]

اب اس پر بھی توجہ دیجیے۔

$\tan \theta \times \tan(90 - \theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM}$ ... [بیان (3) اور (6) سے]

$$\therefore \tan \theta \times \tan(90 - \theta) = 1$$

اسی طرح، $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan \theta$

اسے دھیان میں رکھیں

$\cos(90 - \theta) = \sin \theta$, $\sin(90 - \theta) = \cos \theta$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$, $\tan \theta \times \tan(90 - \theta) = 1$

* مزید معلومات کے لیے

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

یعنی $\operatorname{cosec}\theta$ ، $\sec\theta$ اور $\cot\theta$ بالترتیب $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی معکوس نسبتیں ہیں۔

- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90-\theta)$
- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90-\theta)$
- $\tan\theta = \cot(90-\theta)$
- $\cot\theta = \tan(90-\theta)$

آیئے ذرا یاد کریں

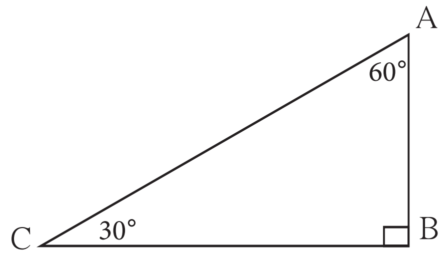
$30° - 60° - 90°$ پیمائشوں کے مثلث کی خصوصیت

کسی مثلث کے زاویوں کی پیمائش $30°-60°-90°$ ہوں تب ہمیں معلوم ہے کہ $30°$ زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کے نصف ہوتا ہے۔اور $60°$ زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کی لمبائی کے $\frac{\sqrt{3}}{2}$ گنا ہے۔

متصلہ شکل میں، قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle C=30°$ ، $\angle A=60°$ ،

$\angle B = 90°$ ہے۔

$\therefore\ AB = \frac{1}{2}AC$ اور $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$



شکل 8.17

آیئے سمجھ لیں

$30°$ اور $60°$ زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں (Trignometric ratios of 30°and 60° angles)

قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں، اگر $\angle R=30°$ ، $\angle P=60°$ ، $\angle Q = 90°$

اور فرض کیجیے $PQ = a$ تب

$$PQ = \frac{1}{2}PR$$

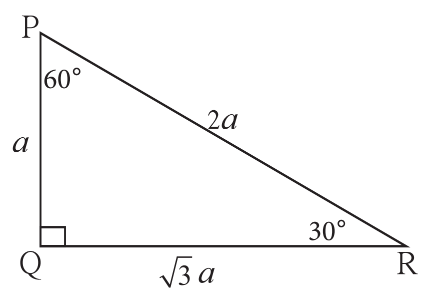
$$a = \frac{1}{2}PR$$

$$\therefore\ PR = 2a$$

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2}PR$$

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$$

$$QR = \sqrt{3}\,a$$



شکل 8.18

$\therefore$ اگر $PQ = a$ ہو تب $PR = 2a$ اور $QR = \sqrt{3}\,a$

(i) 30° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ii) 60° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

قائمۃالزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90^\circ$ دیا ہوا ہے۔ $\angle P$ اور $\angle R$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویہ ہیں۔اس لیے مکملہ زاویہ کے سائن اور کوسائن نسبتوں میں تعلق کی تصدیق کیجیے۔

$$\cos\theta = \sin(90-\theta)$$

$$\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\sin\theta = \cos(90-\theta)$$

$$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

اسے دھیان میں رکھیں

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) 45° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں (Trignometric ratios of 45° angle)

قائمۃالزاویہ ΔABC میں، $\angle B = 90^\circ$، $\angle A = 45^\circ$، $\angle C = 45^\circ$

$\therefore$ یہ متساوی الساقین قائمۃالزاویہ مثلث ہے۔

فرض کیجیے $AB = a$ ہے تب $BC = a$

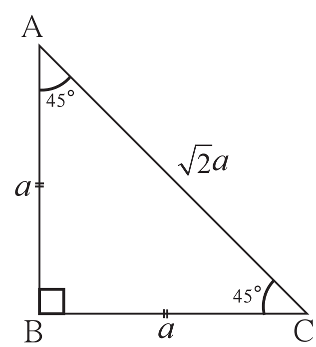
فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے AC کی لمبائی معلوم کیجیے۔

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

$$\therefore\ AC = \sqrt{2}\,a$$



شکل 8.19

پچھلی شکل 8.19 میں $\angle C = 45^\circ$ ہے۔

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

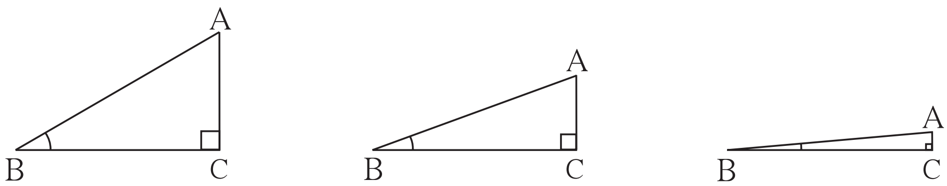
$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

اسے دھیان میں رکھیں

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45^\circ = 1$$

(iv) 0° اور 90° پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

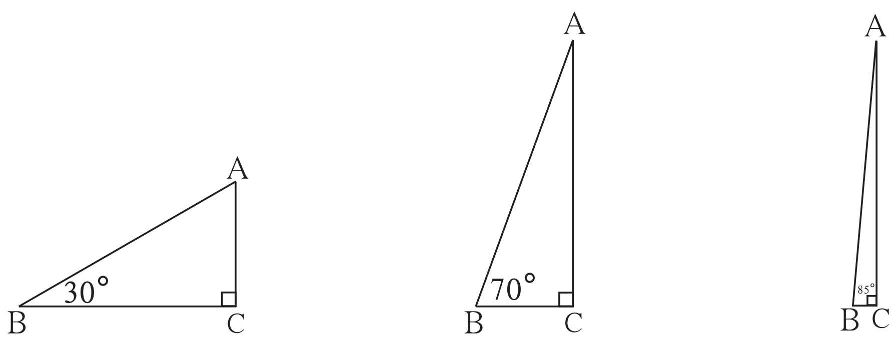


شکل 8.20

قائمۃ الزاویہ ΔACB میں $\angle C = 90^\circ$ اور $\angle B = 30^\circ$ ہے۔ اس لیے $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ یہ ہمیں معلوم ہے۔ AB کی لمبائی مستقل رکھ کر، $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے کم ہوتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے $\angle B$ کے مقابل کا ضلع AC کی لمبائی کم ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $\angle B$ کی پیمائش کم ہوتی ہے ویسے ویسے $\sin\theta$ کی قیمت بھی کم ہوتی ہے۔

$\therefore$ جب $\angle B$ کی پیمائش 0° ہوجائے گی تب AC کی لمبائی 0 ہوجائے گی۔

$$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB} \qquad \therefore \sin 0^\circ = 0$$



شکل 8.21

اب شکل 8.21 میں دیکھیے اس قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے AC کی لمبائی بڑھتی ہوئی نظر آتی ہے۔ $\angle B$ کی پیمائش اگر 90° ہو جاتی ہے۔ تب AB,AC کے مساوی ہو جائے گی۔

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

ہم نے قائمۃ الزاویہ مثلث کی مثلثیاتی نسبتیں دیکھ چکے ہیں۔

$\sin\theta = \cos(90-\theta)$ اور $\cos\theta = \sin(90-\theta)$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin(90-0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

اور $\cos 90^\circ = \sin(90-90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$

اسے دھیان میں رکھیں

$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$

ہمیں معلوم ہے کہ،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

لیکن , $\tan 90^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{0}$

لیکن $\frac{1}{0}$ یہ تقسیم نہیں کر سکتے۔ θ حادہ زاویہ بڑا ہوتے ہوتے 90° کے قریب ہوتے جاتا ہے۔ ویسے ویسے $\tan\theta$ تیزی سے خوب بڑھتا جاتا ہے۔ لیکن $\tan 90^\circ$ کی قیمت طے نہیں کر سکتے۔

اسے دھیان میں رکھیں

مخصوص پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

زاویوں کی پیمائش / نسبتیں	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کی جاسکتی

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) قیمت معلوم کیجیے : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

حل :

$$2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$$
$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 + 0$$
$$= 2$$

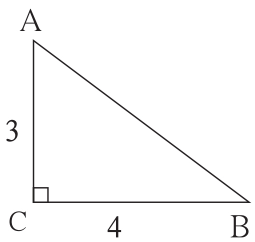
مثال (2) قیمت معلوم کیجیے۔ $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

حل : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ یعنی 56° اور 34° یہ مکملہ زاویوں کی پیمائشیں ہیں۔

$$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$$
$$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos (90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$$
$$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$$

مثال (3) قائمۃ الزاویہ ΔACB میں، اگر $\angle C = 90^\circ$، $AC = 3$، $BC = 4$ ہوتب $\angle A$ اور $\angle B$ کی درج ذیل مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

$\sin A, \ \sin B, \ \cos A, \ \tan B$



شکل 8.22

حل : قائمۃ الزاویہ ΔACB میں فیثا غورث کے مسئلہ کی رُو سے

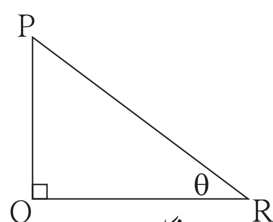
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$= 5^2$$
$$AB = 5$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$
$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \qquad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

مثال (4) قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90^\circ$، $\angle R = \theta$ اوراگر $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ہوتب $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ معلوم کیجیے۔

حل : قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle R = \theta$

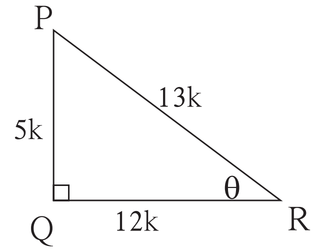
$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$
$$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$



شکل 8.23

$\therefore$ فرض کریں، $PQ = 5k$ اور $PR = 13k$

فیثاغورث کے مسئلہ سے QR معلوم کریں گے۔


شکل 8.24

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$
$$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$$
$$25k^2 + QR^2 = 169\,k^2$$
$$QR^2 = 169\,k^2 - 25k^2$$
$$QR^2 = 144\,k^2$$
$$QR = 12k$$

اب قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $PQ = 5k$, $PR = 13k$ اور $QR=12k$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}\ ,\ \tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

غور کیجیے

(1) مذکورہ بالا مثالیں حل کرتے وقت PQ اور PR اضلاع کی لمبائی $5k$ اور $13k$ کیوں لی گئی ہیں؟

(2) کیا PQ اور PR کی لمبائی بالترتیب 5 اور 13 لی جاسکتی ہیں؟ لی جاسکتی ہوں تو تحریر میں کچھ تبدیلی کی جائے گی؟

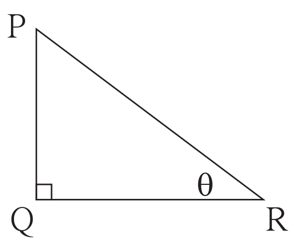
مثلثیاتی نسبتوں کی اہم مساوات :

ΔPQR قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle PQR = 90°$، فرض کریں $\angle R = \theta$

$$\sin\theta = \frac{PQ}{PR} \quad \dots (1)$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} \quad \dots (2)$$


شکل 8.25

فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2} \quad \dots$$ (طرفین کے ہر رکن کو PR^2 سے تقسیم کیا)

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$$

$$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

... (بیان (1) اور (2) کی رُو سے]

اسے دھیان میں رکھیں

$(\sin\theta)^2$ یعنی $\sin\theta$ کا مربع اسے $\sin^2\theta$ لکھتے ہیں۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ یہ مساوات ہم نے فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کر کے θ حادہ زاویہ والے قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے ثابت کر چکے ہیں۔ $\theta = 0°$ یا $\theta = 90°$ ہو تب بھی یہ مساوات مطمئن ہوتی ہے۔اس کی تصدیق کیجیے۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ یہ مساوات کسی بھی پیمائش کے زاویہ کے لیے مطمئن ہوتی ہے۔اس لیے اسے بنیادی متماثلہ مساوات یا دائمی مساوات کہتے ہیں۔

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

مشقی سیٹ 8.2

.1 درج ذیل جدول کے ہر ستون میں ایک نسبت دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے دیگر دو نسبتیں معلوم کیجیے اور خالی جگہ پر کیجیے۔

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

.2 قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $5\sin 30° + 3\tan 45°$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60° + 3\sin^2 60°$

(iii) $2\sin 30° + \cos 0° + 3\sin 90°$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

(vi) $\cos 60° \times \cos 30° + \sin 60° \times \sin 30°$

.3 اگر $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ہو تب $\cos\theta$ معلوم کیجیے۔

.4 اگر $\cos\theta = \frac{15}{17}$ ہو تب $\sin\theta$ معلوم کیجیے۔

(1) درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے جواب سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے؟

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) $\sin 90°$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

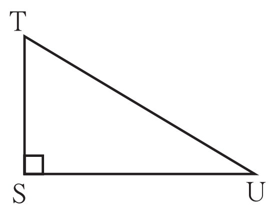
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

(iii) $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45° =$ کتنا ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

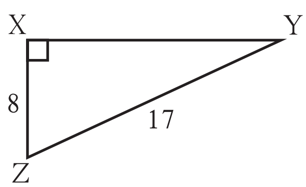
(iv) $\frac{\cos 28°}{\sin 62°} =$ کتنا ?

(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1



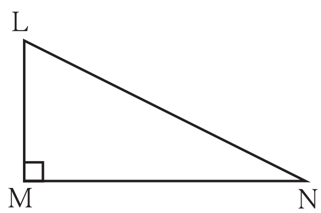
شکل 8.26

(2) قائمۃ الزاویہ ΔTSU میں $TS = 5$ ، $\angle S = 90°$ ، $SU = 12$ ہو تب $\sin T, \cos T, \tan T$ معلوم کیجیے اسی طرح $\sin U, \cos U, \tan U$ معلوم کیجیے۔



شکل 8.27

(3) قائمۃ الزاویہ مثلث ΔYXZ میں $\angle X = 90°$ ، $XZ = 8$ سم ، $YZ = 17$ سم ہو تب $\sin Y, \cos Y, \tan Y$ اور $\sin Z, \cos Z, \tan Z$ معلوم کیجیے۔



شکل 8.28

(4) قائمۃ الزاویہ ΔLMN میں $\angle N = \theta$ ، $\angle M = 90°$ ، $\cos\theta = \frac{24}{25}$ ہو تب $\sin\theta$ اور $\tan\theta$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔اسی طرح $(\sin^2\theta)$ اور $(\cos^2\theta)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\sin 20° = \cos \boxed{}°$

(ii) $\tan 30° \times \tan \boxed{}° = 1$

(iii) $\cos 40° = \sin \boxed{}°$