# 3 کثیر رکنی Polynomials

B43C8D

## آیئے، سیکھیں

- کثیر رکنی کی تعریف
- کثیر رکنیوں پر عمل
- کثیر رکنی کا درجہ
- ترکیبی تقسیم
- کثیر رکنی کی قیمت
- مسئلہ باقی

## آیئے، بحث کریں

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ ، $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ ، 6 یہ تمام الجبری عبارتیں ہیں۔

استاد : عزیز طلبہ، $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ ، $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ ، 6 ہر الجبری عبارت سے ایک ایک رکن لیجیے۔ اس رکن میں متغیروں کی قوت بتایئے۔

مادھوری : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 1, 2, 3 ہیں۔

وویک : سر، $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 5, 3, 2 ہیں۔

روہت : سر، 6 اس عبارت میں متغیر نہیں ہے۔ یہاں $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ لکھ سکتے ہیں، اس لیے 6 اس عبارت میں متغیر کی قوت 0 ہے۔

استاد : یعنی مذکورہ بالا سب عبارتوں میں متغیروں کی قوت مثبت صحیح عدد یا صفر یعنی مکمل اعداد ہیں۔

جس الجبری عبارت میں متغیروں کی قوت مکمل اعداد ہوتی ہیں۔ اس عبارت کو کثیر رکنی (Polynomials) کہتے ہیں۔ 6 بھی کثیر رکنی ہے۔

6، $-7$ ، 0، $\frac{1}{2}$ ، $\sqrt{3}$ وغیرہ اعداد کو مستقل کثیر رکنی (Constant Polynomials) کہتے ہیں۔

کیا $\sqrt{y} + 5$ اور $\frac{1}{y} - 3$ یہ کثیر رکنی ہیں؟

سارا : سر، $\sqrt{y} + 5$ یہ کثیر رکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$ اس میں $y$ کی قوت $\frac{1}{2}$ ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔

جان : سر، $\frac{1}{y} - 3$ یہ بھی کثیر رکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$ ، یہاں $y$ کی قوت $-1$ ہے، جو مکمل عدد نہیں ہے۔

استاد : ایسی کوئی بھی پانچ الجبری عبارت لکھیے جو کثیر رکنی نہیں ہے۔ وہ کثیر رکنی کیوں نہیں ہے؟ وضاحت کیجیے۔

درج ذیل سوالات کے جوابات مختلف مثالیں دے کر اور ان پر بحث کر کے معلوم کیجیے۔

- کیا ہر الجبری عبارت کثیر رکنی ہوتی ہے؟
- کیا ہر کثیر رکنی الجبری عبارت ہوتی ہے؟

کثیر رکنیوں کی قسمیں (ارکان کی تعداد کی لحاظ سے)

| $\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5,\ x^3 - \sqrt{3}\ x^2 + 5x$ | $x^4 + x\ ,\ m^2 - 3m$ | $2x\ ,\ 5$ |
|---|---|---|
| ہر کثیر رکنی میں تین رکن | ہر کثیر رکنی میں دو رکن | ہر کثیر رکنی میں صرف ایک رکن |
| سہ رکنی | دو رکنی | یک رکنی |

ایک متغیری کثیر رکنی کو اس میں موجود متغیر کے لحاظ سے $p(x)$ ، $q(m)$ ، $r(y)$ اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ ، $q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ ، $r(y) = y^2 + 5$

## آیئے سمجھ لیں

### ایک متغیری کثیر رکنی کا درجہ (Degree of a polynomial in one variable)

استاد : $2x^7 - 5x + 9$ اس کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کون سی ہے؟

جیجا : سر، سب سے بڑی قوت 7 ہے۔

استاد : یک متغیری کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

پھر بتایئے تو، اوپر دی ہوئی کثیر رکنی کا درجہ کتنا ہے؟

اشوک : سر، $2x^7 - 5x + 9$ اس کثیر رکنی کا درجہ 7 ہے۔

استاد : 10، اس کثیر رکنی کا درجہ کتنا ہے؟

رادھا : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ لہٰذا کثیر رکنی 10 کا درجہ '0' ہے۔

استاد : 10 کی طرح کسی بھی غیر صفر مستقل کثیر رکنی کا درجہ '0' ہوتا ہے۔

صفر کثیر رکنی کا درجہ طے نہیں کیا جا سکتا۔

### ایک سے زائد متغیروں والی کثیر رکنی کا درجہ

کثیر رکنی میں ہر رکن میں موجود متغیروں کی قوتوں کی جو جمع سب سے زیادہ ہوتی ہے، اس جمع کو اس کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

مثال : $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ یہ دو متغیروں والی کثیر رکنی ہے۔ اس کثیر رکنی کا درجہ 9 ہے۔

(یہاں , قوتوں کی جمع $\rightarrow 3 + 6 = 9,\ 2 + 3 = 5,\ 1 + 1 = 2$)

**عملی کام I :** متغیر $x$ اور درجہ 5 والی ایک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی ہر ایک کی ایک مثال لکھیے۔

یک رکنی: ______ ، دو رکنی ______ ، سہ رکنی ______

**عملی کام II :** 5 درجہ والی دو متغیری دو رکنی کی ایک مثال بنایئے۔ ______

## کثیر رکنی کی قسمیں (درجہ کی لحاظ سے)

**ایک متغیر والی کثیر رکنی**

| | | |
|---|---|---|
| $x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}$ , $m - m^3$ | $2y^2 + y + 1$, $-3x^2$ | $3x - 1$, $7y$ |
| درجہ 3 | درجہ 2 | درجہ 1 |
| مکعبی کثیر رکنی | مربعی کثیر رکنی | خطی کثیر رکنی |
| عام صورت<br>$ax^3 + bx^2 + cx + d$<br>یہاں $a$، $b$، $c$، $d$ ضریب ہیں<br>اور $a \neq 0$ | عام صورت<br>$ax^2 + bx + c$<br>یہاں $a$، $b$، $c$ ضریب ہیں<br>اور $a \neq 0$ | عام صورت<br>$ax + b$<br>یہاں $a$ اور $b$ ضریب ہیں<br>اور $a \neq 0$ |

کثیر رکنی : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ یہ $x$ متغیر کی $n$ درجہ والی کثیر رکنی ہے۔

یہاں $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1, a_0$ یہ تمام ضریب ہیں اور $a_n \neq 0$

## کثیر رکنی کی معیاری صورت، ضریبی صورت اور قوت والی صورت

## (Standard form, Coefficient form and Index form of a Polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ اس کثیر رکنی کو $x$ کی قوت کی اترتی ترتیب میں $x^4 - 3x^2 + x + 5$ لکھ سکتے ہیں۔ یہ معیاری صورت ہے اس کثیر رکنی میں $x$ کی تیسری قوت والا رکن نہیں ہے۔ لہٰذا اسے $0x^3$ فرض کریں گے۔ اس رکن کو لے کر $p(x)$ کثیر رکنی کو $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح قوتوں کی اترتی ترتیب میں لکھی ہوئی اور قوتوں کے تمام ارکان اترتی ترتیب والی کثیر رکنی کو قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

کبھی کبھی قوت نمائی صورت والی کثیر رکنی کے متغیر غائبانہ طور پر فرض کر کے اس کے صرف ضریب کو ترتیب سے لکھتے ہیں، مثلاً $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$
اس کثیر رکنی کو $(1, -3, 0, -8)$ کی طرح لکھتے ہیں۔ اس کو کثیر رکنی کی ضربی صورت کہتے ہیں۔
$(4, 0, -5, 0, 1)$ اس کثیر رکنی کو $y$ متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ یعنی
$4y^4 - 5y^2 + 1$ لکھ سکتے ہیں۔ اس صورت کو کثیر رکنی کی قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

## کثیر رکنی کی ضربی صورت اور معیاری صورت

مثال : $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

| | |
|---|---|
| کثیر رکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔ | $3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$ |
| کثیر رکنی میں غیر موجود رکن کو 0 ضریب لے کر شامل کیجیے اور قوت نمائی صورت میں لکھیے۔ | $3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$ |
| دی ہوئی کثیر رکنی کی ضربی صورت لکھیے۔ | $(3, 0, 5, 0, -7, 2)$ |
| کثیر رکنی کا درجہ لکھیے۔ | 5 |

مثال **(1)** $x^3 + 3x - 5$ اس کثیر رکنی کو ضربی صورت میں لکھیے۔

حل : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

دی ہوئی کثیر رکنی کی ضربی صورت $(1, 0, 3, -5)$

مثال **(2)** $(2, -1, 0, 5, 6)$ اس ضربی صورت کو کثیر رکنی کی قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

حل : کثیر رکنی کی ضربی صورت $(2, -1, 0, 5, 6)$ ہے۔

$\therefore$ قوت نمائی صورت میں کثیر رکنی $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

$= 2x^4 - x^3 + 5x + 6$

## مشقی سیٹ 3.1

(1) ذیل کی عبارت کثیر رکنی ہے یا نہیں لکھیے۔ وضاحت کیجیے۔

(i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

(iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

(2) درج ذیل ہر کثیر رکنی میں $m^3$ کا ضریب لکھیے۔

(i) $m^3$ (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

(3) درج ذیل معلومات کی بناء پر $x$ متغیر کا استعمال کر کے ہر ایک کثیر رکنی لکھیے۔

(i) درجہ 7 والی یک رکنی (ii) درجہ 35 والی دو رکنی (iii) درجہ 8 والی سہ رکنی

(4) درج ذیل ہر کثیر رکنی کا درجہ لکھیے۔

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $x^{\circ}$ (iii) $x^2$ (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

(5) درج ذیل کثیر رکنیوں کی خطی، مربعی اور مکعبی کثیر رکنیوں میں جماعت بندی کیجیے۔

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\ y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) $a^2$ (vi) $3r^3$

(6) درج ذیل کثیر رکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

(7) درج ذیل کثیر رکنیوں کو ضربی صورت میں لکھیے۔

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

(8) درج ذیل ضربی صورت والی کثیر رکنیوں کو $x$ متغیر کا استعمال کر کے معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

(9) ذیل میں کچھ کثیر رکنیاں دی ہوئی ہیں۔ وہ کثیر رکنی دیے ہوئے خانوں میں مناسب جگہ لکھیے۔

$x + 7$,
$x^2$,
$x^3 + x^2 + x + 5$,
$2x^2 + 5x + 10$,
$x^3 + 9$,
$3x^2 + 5x$

| | |
|---|---|
| مربعی کثیر رکنی | دو رکنی |
| .............................. | .............................. |
| مکعبی کثیر رکنی | سہ رکنی |
| .............................. | .............................. |
| خطی کثیر رکنی | یک رکنی |
| .............................. | .............................. |

## آیئے ذرا یاد کریں

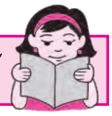
(1) دو مشابہ الجبری ارکان کی جمع یا تفریق کرتے وقت ان کے ضریبوں کی جمع یا تفریق کرتے ہیں۔

مثلاً، $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) دو الجبری ارکان کا ضرب یا تقسیم کرتے وقت ان کے ضریب کی ضرب یا تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح قوت نما کے اصولوں کا بھی استعمال ہوتا ہے۔

مثلاً $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$ ; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

## آیئے سمجھ لیں



### کثیر رکنیوں پر عمل (Operations on polynomials)

کثیر رکنیوں کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم یہ اعمال الجبری عبارتوں پر بھی اسی طرح کرتے ہیں۔

مثال (1) $7a^2 + 5a + 6$ میں سے $5a^2 - 2a$ تفریق کیجیے۔

حل :

$$(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$$
$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$
$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$
$$= 2a^2 + 7a + 6$$

مثال (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

مثال (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

حل :

$$(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$$

$= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2)$ ... (پہلی کثیر رکنی کے ہر رکن سے دوسری کثیر رکنی کو ضرب دیا گیا۔)

$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ ... (مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دیا۔)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

یاد رکھیے کہ یہاں حاصل ضرب کا درجہ 5 ہے۔

مثال (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ اور $2m^2n - mn^2 + mn$ کی جمع کیجیے۔

حل :

$(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ ...(مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دی گئی۔)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ ...(مشابہ ارکان کی جمع کیے۔)

## آئیے ذرا یاد کریں

ایک کثیر رکنی کا درجہ 3 اور دوسری کثیر رکنی کا درجہ 5 ہو تب کثیر رکنیوں کے حاصل ضرب کا درجہ کتنا ہوگا؟

مضروب اور مضروب فیہ کثیر رکنیوں کا درجہ اور ان کے حاصل ضرب کا درجہ کے درمیان کون سا تعلق ہے؟

**مثال (5)** $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ تقسیم کیجیے اور 'باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم' کی صورت میں جواب لکھیے۔

**حل :** پہلے $p(x) = 2 + 2x^2$ اس مقسوم کثیر رکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔

$$\therefore \quad 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x \; - \; 4 \\
\cline{2-2}
x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\
 & \underline{\overset{-}{2x^2} \; \overset{-}{+ \; 4x}} \\
 & \quad -4x + 2 \\
 & \quad \underline{\overset{+}{-4x} \; \overset{+}{- \; 8}} \\
 & \qquad\quad 10
\end{array}
$$

**طریقہ I :** باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$، مقسوم الیہ $= (x + 2)$

$s(x)$، خارج قسمت $= 2x - 4$، $r(x)$، باقی $= 10$

$\therefore \; p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$

**طریقہ II :** خارج قسمت کا خطی طریقہ

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ تقسیم کیجیے۔

رکن $2x^2$ حاصل کرنے کے لیے $(x + 2)$ کو $2x$ سے ضرب دے کر $4x$ تفریق کیجیے۔

$$2x(x+2) - 4x = 2x^2$$

$\therefore$ مقسوم $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ... (I)

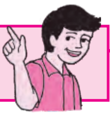
اب $-4x$ رکن حاصل کرنے کے لیے $(x + 2)$ کو $-4$ سے ضرب دیں اور 8 حاصل کریں گے۔

$$-4(x+2) + 8 = -4x$$

$\therefore \; (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ... (بیان I سے)

$\therefore \; (2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$

باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم



## اسے دھیان میں رکھیں

**اقلیدس کے تقسیم کا اصول**

اگر $s(x)$ اور $p(x)$ یہ دو کثیر رکنی ہو اور $s(x)$ کا درجہ $p(x)$ کے درجہ کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو، اور $s(x)$ کو $p(x)$ سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا خارج قسمت $q(x)$ ہو تب،

$$s(x) = p(x)\ q(x) + r(x)$$

یہاں $r(x) = 0$ یا $r(x)$ کا درجہ $p(x)$ کے درجے سے کم ہوتا ہے۔

## مشقی سیٹ 3.2

.1 دیے ہوئے حروف کا استعمال کر کے جوابات لکھیے۔

(i) نانڈ پور گاؤں میں $a$ درخت ہیں۔ درختوں کی تعداد ہر سال $b$ سے بڑھتی ہے تو $x$ سال بعد اس گاؤں میں کتنے درخت ہو جائیں گے؟

(ii) قواعد کے لیے ایک قطار میں $y$ بچے، اس طرح $x$ قطاریں بنائی گئیں۔ تو بتائیے قواعد کے لیے کل کتنے بچے حاضر تھے؟

(iii) ایک دو ہندسی عدد کے اکائی اور دہائی مقام کے ہندسے بالترتیب $m$ اور $n$ ہیں تو اس دو ہندسی عدد کو ظاہر کرنے والا کثیر رکنی کون سا؟

.2 درج ذیل کثیر رکنیوں کی جمع کیجیے۔

(i) $x^3 - 2x^2 - 9\ ;\ 5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}\ ;\ 5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5\ ;\ 3y + 9\ ;\ 3y^2 - 4y - 3$

.3 پہلی کثیر رکنی سے دوسری کثیر رکنی تفریق کیجیے۔

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}\ ;\ -19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab\ ;\ 3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

.4 درج ذیل کثیر رکنیوں کی ضرب کیجیے۔

(i) $2x\ ;\ x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1\ ;\ x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1;\ y^2 - 2y^3 + 3y$

.5 پہلی کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے تقسیم کیجیے اور جواب 'مقسوم = مقسوم الیہ × خارج قسمت + باقی' کی صورت میں لکھیے۔

(i) $x^3 - 64;\ x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2;\ x^2 - x$

.6 درج ذیل معلومات کثیر رکنی کی صورت میں لکھیے۔ کثیر رکنی کو مختصر ترین صورت دیجیے۔

ایک مستطیلی کھیت کی لمبائی $(2a^2 + 3b^2)$ میٹر اور چوڑائی $(a^2 + b^2)$ میٹر ہے۔ کسان نے کھیت میں $(a^2 - b^2)$ میٹر ضلع والے مربع جگہ پر گھر تعمیر کیا، تو بتائیے باقی ماندہ کھیت کا رقبہ کتنا ہے؟

**عملی کام :** درج ذیل عبارت پڑھیے اور خالی خانوں میں صحیح عبارت لکھیے اور بحث کیجیے۔

شرلس گاؤں میں بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گوئیند کی 5 ایکڑ زمین ہے۔ اس کے گھر میں بیوی، 2 بچے اور اس کی ضعیف والدہ ہے۔ اس نے کھیتی کے لیے بینک سے سوا لاکھ روپے قرض 10 فیصدی فی سال شرح سے لیے۔ اس نے کھیت کی $x$ ایکڑ زمین میں سویابین اور $y$ ایکڑ زمین میں کپاس اور تور (ارہر) کی فصل نکالی۔ کھیتی کے لیے ہونے والا خرچ ذیل کے مطابق ہے۔

بیج کے لیے اس نے کل ₹10,000 دیے۔ سویابین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا $2000x$ روپے، مزدوری اور مشاگت کے لیے $4000x^2$ روپے خرچ ہوا۔ کپاس اور تور کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر $8000y$ روپے، اور مزدوری اور مشاگت کے لیے $9000y^2$ روپے خرچ ہوا۔

کھیتی کے لیے کل کتنا خرچ ہوا، اسے $x$ اور $y$ کا استعمال کرکے لکھیے۔

روپے $\boxed{\phantom{0000}} + \boxed{8000\,y} + \boxed{4000\,x^2} + \boxed{2000\,x} + \boxed{\phantom{0000}}$

اس کے کھیت میں سویابین کی $5x^2$ کوئنٹل پیداوار ہوئی۔ وہ ₹2800 فی کوئنٹل کے نرخ سے فروخت ہوا۔ کپاس کی $\frac{5}{3}y^2$ کوئنٹل پیداوار ہوئی اور ₹5000 فی کوئنٹل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔ تور $4y$ کوئنٹل پیداوار ہوئی اور ₹4000 فی کوئنٹل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔

تمام کھیتی کی پیداوار فروخت ہونے پر اس سے کل کتنے روپے آمدنی ہوئی اسے $x$ اور $y$ کے ارکان کی صورت میں لکھیے۔

روپے $\boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}}$

## آئیے سمجھ لیں

### ترکیبی تقسیم کا طریقہ (Synthetic Division Method)

ہمیں معلوم ہے کہ ایک کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے کس طرح تقسیم کرتے ہیں۔ اب ہم مقسوم الیہ $x + a$ یا $x - a$ کثیر رکنی ہو تو تقسیم کے آسان طریقے کو سمجھیں گے۔

**مثال (1) :** کثیر رکنی $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ کو $(x + 2)$ سے تقسیم کیجیے۔

**حل :** پہلے مقسوم کثیر رکنی کو قوت نمائی صورت میں اور بعد میں ضربی صورت میں لکھیں گے۔

مقسوم کی معیاری صورت $= 3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$

$\therefore$ مقسوم کی ضربی صورت $= (3, 2, 0, -1)$

مقسوم الیہ کثیر رکنی $= x + 2$

| | | |
|---|---|---|
| پہلی لائن | ---------- | |
| دوسری لائن | ---------- | |
| تیسری لائن | ---------- | |

درج ذیل مراحل کے مطابق ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کریں گے۔

(1) بازو میں دیے ہوئے کہ مطابق ایک عمودی اور ایک افقی اس طرح دو خط کھینچیں گے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| پہلی لائن | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ | $-2$ |
| تیسری لائن | | | | $3$ | |

(2) مقسوم الیہ $x + 2$ ہو تو $2$ کے متضاد عدد $-2$

پہلی لائن میں عمودی خط کے بائیں جانب $-2$ لکھیں گے۔

پہلی لائن میں مقسوم کثیر رکنی کے ضربی صورت عمودی خط کے دائیں جانب لکھیں گے۔

(3) افقی خط کے نیچے یعنی تیسری لائن میں مقسوم کا پہلا ضریب ویسا ہی لکھیں گے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ | $-2$ |
| | $-16$ | $8$ | $-6$ | | |
| باقی | $\boxed{-17}$ | $8$ | $-4$ | $3$ | |

(4) تیسری لائن میں $3$ اور مقسوم الیہ کے $-2$ کا حاصل ضرب $-6$ اسے دوسری لائن میں $2$ ضریب کے نیچے لکھیں گے۔ بعد میں $2$ اور $-6$ کی جمع $-4$ ، تیسری لائن میں افقی خط کے نیچے لکھیں گے۔

اسی طرح ضرب اور جمع کریں گے۔ آخر کی جمع کر کے آنے والا عدد ہی تقسیم کا باقی ہے۔ یہاں باقی $-17$ ہے۔

تیسری لائن میں آنے والا $(3, -4, 8)$ یہ خارج قسمت کی ضربی صورت ہے۔

$\therefore$ خارج قسمت $= 3x - 4x + 8$ اور، باقی $= -17$

$$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

اس طریقے کو ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس تقسیم کو خطی طریقہ سے ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x+2) - 6x^2 + 2x^2 - 1\\
&= 3x^2(x+2) - 4x^2 - 1\\
&= 3x^2(x+2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1\\
&= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8x - 1\\
&= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8x + 16 - 16 - 1\\
&= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8(x+2) - 17
\end{aligned}$$

$$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

مثال (2) تقسیم کیجیے : $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$

حل : ترکیبی تقسیم کا طریقہ : مقسوم $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

مقسوم الیہ $= y - 1$ ... ($-1$ کا متضاد عدد 1 ہے۔)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $-3$ | 0 | 5 | $-4$ |
| | | 2 | $-1$ | $-1$ | 4 |
| | 2 | $-1$ | $-1$ | 4 | $\boxed{0}$ باقی |

خارج قسمت کی ضربی صورت $(2, -1, -1, 4)$ ہے۔

$\therefore$ خارج قسمت $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ ; اور باقی $= 0$

خطی طریقہ : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4(y - 1)$

$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$

### اسے دھیان میں رکھیں

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کرتے وقت صرف $x + a$ یا $x - a$ کی صورت میں جس کثیر رکنی کا درجہ 1 ہوتا ہے۔ اسے مقسوم الیہ کے طور پر لیتے ہیں۔

## مشقی سیٹ 3.3

- درج ذیل تقسیم ترکیبی تقسیم کے طریقے سے اور خطی طریقے سے کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

### آیئے سمجھ لیں

### کثیر رکنی کی قیمت (Value of Polynomial)

کثیر رکنی میں متغیر کی کوئی ایک قیمت رکھیں تو اس کثیر رکنی کی بھی کوئی ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً $x + 7$ کثیر رکنی میں $x$ کی قیمت 2 رکھیں تو اس کثیر رکنی کی قیمت 9 حاصل ہوتی ہے۔

$p(x)$ کثیر رکنی میں $x$ کو $a$ قیمت دے کر حاصل ہونے والی کثیر رکنی کی قیمت $p(a)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ کثیر رکنی کی قیمت $x = 2$ ہو تو معلوم کیجیے۔

حل : $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ کثیر رکنی

اس کثیر رکنی میں $x = 2$ رکھنے پر

$$\begin{aligned}
\therefore\ p(2) &= 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 \\
&= 2 \times 4 - 6 + 5 \\
&= 8 - 6 + 5 \\
\therefore\ p(2) &= 7
\end{aligned}$$

$\therefore$ $x = 2$ ہے تب کثیر رکنی کی قیمت 7 ہے۔

مثال (2) $y = -2$ ہو تو کثیر رکنی $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\begin{aligned}
\therefore\ p(-2) &= 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\
&= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\
&= -16 + 4 + \sqrt{7} \\
&= -12 + \sqrt{7}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $y = -2$ ہو تو کثیر رکنی کی قیمت $-12 + \sqrt{7}$ ہے۔

مثال (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ کثیر رکنی کے لیے $p(0)$ معلوم کیجیے۔

حل : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\begin{aligned}
\therefore\ p(0) &= 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2 \\
&= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

مثال (4) اگر کثیر رکنی $m^2 - am + 7$ کی قیمت $m = -1$ لینے پر 10 ہوتی ہے تب $a$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$\begin{aligned}
p(m) &= m^2 - am + 7 \\
\therefore\ p(-1) &= (-1)^2 - a \times (-1) + 7 \\
&= 1 + a + 7 \\
&= 8 + a
\end{aligned}$$

لیکن، $p(-1) = 10$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore\ 8 + a = 10$

$\therefore\ a = 10 - 8$

$\therefore\ a = 2$

## مشقی سیٹ 3.4

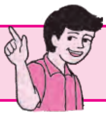
(1) $x = 0$ ہوتو تب $x^2 - 5x + 5$ کثیررکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(2) اگر $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}\,y + 1$ ہوتب $p(3\sqrt{2})$ معلوم کیجیے۔

(3) اگر $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ ہوتب $p(a) + p(-a) = ?$

(4) اگر $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ ہوتب $p(2)$ معلوم کیجیے۔

### اسے دھیان میں رکھیں



متغیر کی کوئی ایک قیمت کے لیے کثیررکنی کی قیمت معلوم کرتے وقت ہر رکن میں $x$ کی جگہ دی ہوئی قیمت رکھ کر اس کثیررکنی (عبارت) کی قیمت معلوم کرنا ہوتی ہے۔

### آیئے سمجھ لیں

### مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

$p(x)$ کثیررکنی کو $(x + a)$ سے تقسیم کریں تو بچ رہنے والا باقی اور اس کثیررکنی میں $x$ کی قیمت $-a$ دے کر حاصل ہونے والی کثیررکنی کی قیمت ان دونوں کا آپس میں تعلق ہوتا ہے۔ اس تعلق کو معلوم کرنے کے لیے ذیل کی مثال کا مطالعہ کیجیے۔

مثال : $p(x) = 4x^2 - x + 2$ کو $x + 1$ سے تقسیم دیجیے۔

[یہاں $(x + a)$ یعنی $(x + 1)$ کو ذہن نشین کیجیے]

یہاں، مقسوم کثیررکنی $= 4x^2 - x + 2$

مقسوم الیہ کثیررکنی $= x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x - 5 \quad \leftarrow \text{خارج قسمت} \\
\hline
\text{مقسوم الیہ} \rightarrow x + 1 & 4x^2 - x + 2 \quad \leftarrow \text{مقسوم} \\
- & 4x^2 + 4x \\
 & \phantom{4x^2}\; - \quad - \\
\hline
 & -5x + 2 \\
- & -5x - 5 \\
 & \phantom{-}+ \quad + \\
\hline
 & 7 \leftarrow \text{باقی}
\end{array}$$

خارج قسمت $= 4x - 5$

باقی $= 7$ ... (I)

اس مثال کو ترکیبی تقسیم کے طریقے سے کریں گے۔

$p(x) = (4, -1, 2)$ کی ضربی صورت

مقسوم الیہ $= x + 1$

$1 = -1$ کا متضاد عدد

$$\begin{array}{r|rrr}
-1 & 4 & -1 & 2 \\
 & & -4 & 5 \\
\hline
 & 4 & -5 & \boxed{7}\ \text{باقی}
\end{array}$$

خارج قسمت $= 4x - 5$

باقی $= 7$

اب ہم باقی اور مقسوم کثیر رکنی کی قیمت کے درمیان تعلق کو دیکھیں گے۔

مقسوم کثیر رکنی یعنی $4x^2 - x + 2$ کی $x = -1$ کے لیے قیمت معلوم کریں گے۔

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$
$$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$
$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$
$$= 4 + 1 + 2$$
$$= 7$$

اس لیے $x = -1$ ہوتب کثیر رکنی $p(x)$ کی قیمت 7 ہے۔ ... (II)

لہٰذا (I) اور (II) کی بنا پر، $p(x) = 4x^2 - x + 2$ کثیر رکنی کو $(x + a)$ سے یعنی یہاں $(x + 1)$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہونے والا باقی

اور $x = -1$ ہوتب $p(x)$ کثیر رکنی کی قیمت یعنی $p(-1)$ یکساں ہیں۔

اس بناء پر درج ذیل خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

$p(x)$ کثیر رکنی کو $(x + a)$ سے تقسیم کرنے پر بچ رہنے والا باقی $p(-a)$ کے مساوی ہوتا ہے۔

یعنی $p(x)$ میں $x = -a$ رکھ کر آنے والی کثیر رکنی کی قیمت کے مساوی ہوتی ہے۔

اس خصوصیت کو مسئلہ باقی کہتے ہیں۔

اقلیدس کے تقسیم کا اصول استعمال کر کے اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔

$p(x)$ کو $(x + a)$ سے تقسیم کریں تو

$$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$$

[یہاں، خارج قسمت $= q(x)$ اور باقی $= r(x)$ ] ...

اگر $r(x) \neq 0$، ہوتب اصول کے مطابق $r(x)$ کا درجہ 1 سے کم یعنی 0 ہے۔ لہٰذا $r(x)$ حقیقی عدد ہے۔

$\therefore$ $r(-a)$ بھی حقیقی عدد ہے۔

اب، (1) ...

$$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$$

میں $x = -a$ قیمت رکھ کر،

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$
$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \quad \ldots(2)$$
$$\therefore\ p(-a) = r(-a)$$

[(1) اور (2) سے] ...

**عملی کام :** درج ذیل مثال کی تصدیق کیجیے۔

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ کثیررکنی کو $x + 2$ کثیررکنی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(2) $x = -2$ ہو تب $p(x) = 3x^2 + x + 7$ کثیررکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(3) کیا اب تقسیم سے ملنے والا باقی، $p(-2)$ کی قیمت کے برابر ہے؟

مزید ایک مثال لے کر مذکورہ طریقے سے تصدیق کیجیے۔

**مثال (1)** $x^4 - 5x^2 - 4x$ کثیررکنی کو $(x + 3)$ سے تقسیم دینے پر حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

حل :

مسئلہ باقی سے

مقسوم کثیررکنی $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

مقسوم الیہ $= x + 3$

$\therefore \quad x = -3$

$\therefore \quad p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

معیاری صورت $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

ضربی صورت $= (1, 0, -5, -4, 0)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -3 | 1 | 0 | -5 | -4 | 0 |
| | | -3 | 9 | -12 | 48 |
| | 1 | -3 | 4 | -16 | $\boxed{48}$ باقی |

باقی $= 48$

**مثال (2)** مسئلہ باقی کا استعمال کرکے کثیررکنی $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ کو $(x - 1)$ سے تقسیم کرکے حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

حل : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

مقسوم الیہ $= x - 1 \;;\; \therefore \; x = 1$

$\therefore$ مسئلہ باقی سے، باقی $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ باقی $= -6$ ... (مسئلہ باقی کے لحاظ سے)

**مثال (3)** اگر $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ کثیررکنی کو $t - 3$ سے تقسیم دینے پر باقی 62 بچتا ہو تب $k$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی کثیررکنی کو $(t - 3)$ سے تقسیم کرنے پر باقی 62 بچتا ہے (دیا ہوا ہے۔) اس لیے دی ہوئی کثیررکنی کی قیمت $t = 3$ رکھ کر معلوم کریں گے۔

$$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$$

∴ مسئلہ باقی سے،

$$\text{باقی} = p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$$
$$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$$
$$= 27 - 27 + 3k + 50$$
$$= 3k + 50$$

لیکن باقی 62 دیا ہوا ہے۔

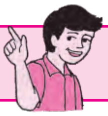
$\therefore \quad 3k + 50 = 62$

$\therefore \quad 3k = 62 - 50$

$\therefore \quad 3k = 12$

$\therefore \quad k = \frac{12}{3}$

$\therefore \quad k = 4$



## اسے دھیان میں رکھیں

**مسئلہ باقی :** $p(x)$ کوئی بھی کثیر رکنی ہو اور $'a'$ کوئی حقیقی عدد ہے اور اگر $p(x)$ کو $(x + a)$ سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا باقی $p(-a)$ کے برابر ہوتا ہے۔

$$p(x) = s(x)\,(x - a) + r(x) \qquad \ldots \; r(x) = 0 \text{ یا } r(x) < 1 \text{ کا درجہ}$$

اس مساوات میں $x = a$ رکھ کر $p(a) = 0 + r(a) = r(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

∴ $r(a) = 0$ یا $r(a) = 0$ کا درجہ، یعنی ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ $(x - a)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

## آئیے سمجھ لیں

### مسئلہ جز ضربی (Factor Theorem)

اگر 21 کو 7 سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی 0 آتا ہے۔ اس لیے ہم 7 کو 21 کا جز ضربی کہتے ہیں۔

اسی طرح دی ہوئی کثیر رکنی کو مقسوم الیہ کثیر رکنی سے تقسیم کریں تو باقی 0 آتا ہے تب اس کثیر رکنی کو دی ہوئی کثیر رکنی کا جز ضربی کہتے ہیں۔

**مثال (1)** کثیر رکنی $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ کو $(x - 1)$ سے تقسیم کرنے سے آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ $(x - 1)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

**حل :**
$$p(x) = x^3 + 4x - 5$$
$$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$$
$$= 1 + 4 - 5$$
$$= 0$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق، $\text{باقی} = 0$

∴ $(x - 1)$، کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

**مثال (2)** کثیر رکنی $p(x) = x^3 + 4x - 5$، کو $(x + 2)$ سے تقسیم کریں تو آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ $(x + 2)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

**حل :**
$$p(x) = x^3 + 4x - 5$$
$$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$$
$$p(-2) = -8 - 8 - 5$$
$$= -21$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق باقی $-21$ آیا ہے۔

یعنی, $\text{باقی} \neq 0$

∴ $(x + 2)$، کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی نہیں ہے۔

**عملی کام :** تصدیق کیجیے کہ $(x - 1)$، کثیر رکنی $x^3 + 4x - 5$ کا جز ضربی ہے۔

## اسے دھیان میں رکھیں

$p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے اور $a$ کوئی بھی حقیقی عدد ہے اور اگر $p(a) = 0$ ہو تب $(x-a)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزوضربی ہوتا ہے۔

اس کے برعکس $(x-a)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزضربی ہو تب $p(a) = 0$ ہوتا ہے۔

**مثال (1)** مسئلہ جزضربی استعمال کر کے طے کیجیے کہ $(x-2)$ کثیر رکنی $x^3 - x^2 - 4$ کا جزضربی ہے۔

حل : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ ; مقسوم الیہ $= x - 2$

مسئلہ $\therefore \quad p(2) = (2)^3 - (2)^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

مسئلہ جزضربی کے رُو سے، $(x-2)$، کثیر رکنی $(x^3 - x^2 - 4)$ کا جزضربی ہے۔

**مثال (2)** اگر $(x-1)$ کثیر رکنی $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ کا جزضربی ہو تب $m$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $(x-1)$، کثیر رکنی $p(x)$ کا جزضربی ہے۔ $\therefore \ p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$
$$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$
$$\therefore \ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$
$$\therefore \ 1 - 2 + m - 4 = 0 \quad , \quad \therefore \ m - 5 = 0 \quad , \quad \therefore \ m = 5$$

**عملی کام :** ہم بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گوند کے کھیت کے متعلق کثیر رکنیوں کی صورت میں کھیتی کا خرچ اور آمدنی کے بارے میں دیکھ چکے ہیں۔ اس نے بینک سے سوا لاکھ روپے قرض لیا تھا اور 10% فی سال سود کی شرح سے ادا کیا تھا۔ بیج کے لیے خرچ 10,000 روپے، سویابین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر $2000x$ روپے اور اس کی مشاگت کے لیے $4000x^2$ روپے خرچ ہوا تھا۔ کپاس اور تور (ارہر) کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا کے لیے $8000y$ روپے اور مشاگت کے $9000y^2$ روپے خرچ کیا تھا۔

کل آمدنی $16000y + \dfrac{25000}{3}y^2 + 14000x^2$ روپے ہوئی تھی۔

$x = 2$ اور $y = 3$ قیمتیں لے کر گوند کی کھیتی کا جمع خرچ لکھ کر معلوم کیجیے۔

حل :

| خرچ | | جمع | |
|---|---|---|---|
| بینک میں سود کے ساتھ ادائیگی | ₹1,37,000 | بینک سے قرض لیے | ₹1,25000 |
| بیج کے لیے | ₹ | سویابین سے آمدنی | ₹ |
| سویابین : کھاد اور کیڑے مار دوا | ₹ | کپاس سے آمدنی | ₹ |
| سویابین : مشاگت | ₹ | تور سے آمدنی | ₹ |
| کپاس اور تور : کھاد اور کیڑے مار دوا | ₹ | کل آمدنی | ₹ |
| کپاس اور تور : مشاگت | ₹ | | |
| کل خرچ | ₹ | | |

## مشقی سیٹ 3.5

(1) $x$ کی دی ہوئی قیمت لے کر کثیر رکنی $2x - 2x^3 + 7$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) درج ذیل ہر کثیر رکنی کے لیے $p(1)$، $p(0)$ اور $p(-2)$ معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) اگر کثیر رکنی $m^3 + 2m + a$ کی قیمت $m = 2$ کے لیے 12 ہے، تب $a$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(4) اگر کثیر رکنی $mx^2 - 2x + 3$ کے لیے $p(-1) = 7$ ہو تب $m$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) درج ذیل میں سے پہلی کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے تقسیم کر کے حاصل ہونے والا باقی، مسئلہ باقی کا استعمال کر کے معلوم کیجیے۔

(i) $(x^2 - 7x + 9)$ ; $(x + 1)$ (ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$ ; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$ ; $(m - 3)$

(6) کثیر رکنی $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ کو $y + 2$ سے تقسیم کریں تو باقی 50 بچتا ہے تب $m$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(7) مسئلہ جز ضربی کا استعمال کر کے، بتایئے کہ $x + 3$، کثیر رکنی $x^2 + 2x - 3$ کا جز ضربی ہے۔

(8) اگر $x - 2$ کثیر رکنی $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ کا جز ضربی ہے تب $m$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(9) مسئلہ جز ضربی کے ذریعے بتایئے کہ $q(x)$ یہ $p(x)$ کا جز ضربی ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ سے $(x^{31} + 31)$ کو تقسیم کر کے باقی معلوم کیجیے۔

(11) دکھایئے کہ $m - 1$ کثیر رکنیوں $m^{21} - 1$ اور $m^{22} - 1$ کا جز ضربی ہے،

(12) اگر $x - 2$ اور $x - \frac{1}{2}$ یہ دونوں کثیر رکنی $nx^2 - 5x + m$ کے جز ضربی ہوں تو دکھایئے کہ $m = n = 2$

(13) (i) اگر $p(x) = 2 + 5x$ تب $p(2) + p(-2) - p(1)$ معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ ہو تو تب $p(5\sqrt{3}) = ?$

### آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے کثیر رکنیوں کے جز ضربی کیسے نکالتے ہیں، کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

اجزائے ضربی کیجیے۔

مثال (1) $4x^2 - 25$

حل :

$$4x^2 - 25$$
$$= (2x)^2 - (5)^2$$
$$= (2x + 5)(2x - 5)$$

مثال (2) $3x^2 + 7x + 2$

حل :

$$3x^2 + 7x + 2$$
$$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$$
$$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$$
$$= (x + 2)(3x + 1)$$

مثال (3) $63x^2 + 5x - 2$

حل :

$63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

مثال (4) $6x^2 - 5x - 6$

حل :

$6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

## آئیے سمجھ لیں

### کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی (Factors of Polynomials)

کبھی کبھی دی ہوئی کثیر رکنی کی تحویل $ax^2 + bx + c$ میں کی جاسکتی ہے۔ جس کی وجہ سے اس کہ اجزائے ضربی کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

مثال (1) $(y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے دی ہوئی کثیر رکنی میں $y^2 - 3y = x$

$$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$$

$$= x^2 - 10x + 5x - 50$$

$$= x(x - 10) + 5(x - 10)$$

$$= (x - 10)(x + 5)$$

$$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$$ ... ($x = y^2-3y$ رکھنے پر)

$$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$$

$$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$$

$$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$$

مثال (2) اجزائے ضربی معلوم کیجیے : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

حل :

$$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$$

$$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$$

$$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$$

$$= (m - 14)(m + 6) + 64$$ ... (فرض کیجیے $x^2 - 5x = m$)

$$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$$

$$= m^2 - 8m - 20$$

$$= (m - 10)(m + 2)$$

$$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$$ ... ($m$ کی جگہ $x^2 - 5x$ رکھنے پر)

## مشقی سیٹ 3.6

(1) درج ذیل کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) درج ذیل کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

## مجموعہ سوالات 3

(1) درج ذیل ہر سوال کے لیے دیے ہوئے متبادل میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کثیر رکنی کون سی ہے؟

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) کثیر رکنی $\sqrt{7}$ کا درجہ کتنا ہے؟

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) کثیر رکنی 0 کا درجہ کتنا ہوتا ہے؟

(A) 0 (B) 1 (C) متعین نہیں کیا جاسکتا (D) کوئی بھی حقیقی عدد

(iv) کثیر رکنی $2x^2 + 5x^3 + 7$ کا درجہ کتنا ہے؟

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) کثیر رکنی $x^3 - 1$ کی ضربی صورت کون سی ہے؟

(A) (1, − 1) (B) (3, − 1) (C) (1, 0, 0, − 1) (D) (1, 3, − 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ ہوتب $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) کثیر رکنی $2x^3 + 2x$ کی $x = -1$ ہو تو قیمت کتنی ہے؟

(A) 4 (B) 2 (C) − 2 (D) − 4

(viii) کثیر رکنی $3x^2 + mx$ کا $(x - 1)$ جز ضربی ہو تب $m$ کی قیمت کتنی ہے؟

(A) 2 (B) − 2 (C) − 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ کا ضرب کرکے حاصل ہونے والی کثیر رکنی کا درجہ کتنا ہوگا؟

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) درج ذیل میں سے خطی کثیر رکنی کون سی ہے؟

(A) $x+5$ (B) $x^2+5$ (C) $x^3+5$ (D) $x^4+5$

(2) درج ذیل ہر کثیر رکنی کا درجہ لکھیے۔

(i) $5+3x^4$ (ii) $7$ (iii) $ax^7+bx^9$ ... (یہاں $a$ اور $b$ غیر صفر مستقل اعداد ہیں۔)

(3) درج ذیل کثیر رکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) درج ذیل کثیر رکنیوں کو ضریبی صورت میں لکھیے۔

(i) $x^4+16$ (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) درج ذیل ضریبی صورت والی کثیر رکنیوں کو $x$ متغیر کا استعمال کرکے قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

(i) $(3, -2, 0, 7, 18)$ (ii) $(6, 1, 0, 7)$ (iii) $(4, 5, -3, 0)$

(6) جمع کیجیے۔

(i) $7x^4-2x^3+x+10$ ; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$ ; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) تفریق کیجیے۔

(i) $5x^2-2y+9$ ; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$ ; $x^2-2x+3$

(8) درج ذیل ضرب کیجیے۔

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) کثیر رکنی $3x^3-8x^2+x+7$ کو کثیر رکنی $x-3$ سے ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(10) $m$ کی کس قیمت کے لیے $x+3$، کثیر رکنی $x^3-2mx+21$ کا جز ضربی ہوگا؟

(11) 2016 سال کے آخر میں کیواڑ، وروڑ اور چکھلی گاؤں کی آبادی بالترتیب $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ اور $9x^2+4xy$ تھی۔ 2017 سال کی ابتدا میں تینوں گاؤں میں تعلیم اور روزگار کے لیے بالترتیب $x^2+xy-y^2$, $5xy$ اور $3x^2+xy$ آدمی دوسرے گاؤں چلے گئے۔ تو 2017 کی ابتدا میں ان تینوں گاؤں کی کل آبادی کتنی تھی؟

(12) کثیر رکنیوں $bx^2+x+5$ اور $bx^3-2x+5$ کو $x-3$ سے تقسیم کریں تو باقی بالترتیب $m$ اور $n$ آتا ہے۔ اگر $m-n=0$ ہو تب $b$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(13) مختصر کیجیے : $(8m^2+3m-6)-(9m-7)+(3m^2-2m+4)$

(14) کثیر رکنی $x^2+13x+7$ میں سے کون سی کثیر رکنی منہا کریں تو کثیر رکنی $3x^2+5x-4$ ملے گی؟

(15) الجبری عبارت $4m+2n+3$ میں کون سی عبارت ملائیں کہ کثیر رکنی $6m+3n+10$ حاصل ہو؟