

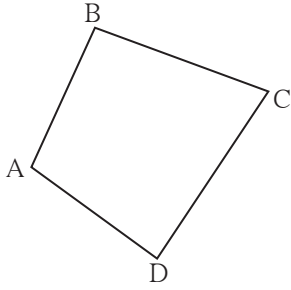


चला, शिकूया.

- समांतरभुज चौकोन
- समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या
- समभुज चौकोन
- आयत
- चौरस
- समलंब चौकोन
- त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय



जरा आठवूया.



आकृती 5.1

1. □ABCD या चौकोनाच्या संदर्भात खालील जोड्या लिहा.

लगतच्या बाजूंच्या जोड्या :

(1) ... , ... (2) ... , ...

(3) ... , ... (4) ... , ...

लगतच्या कोनांच्या जोड्या :

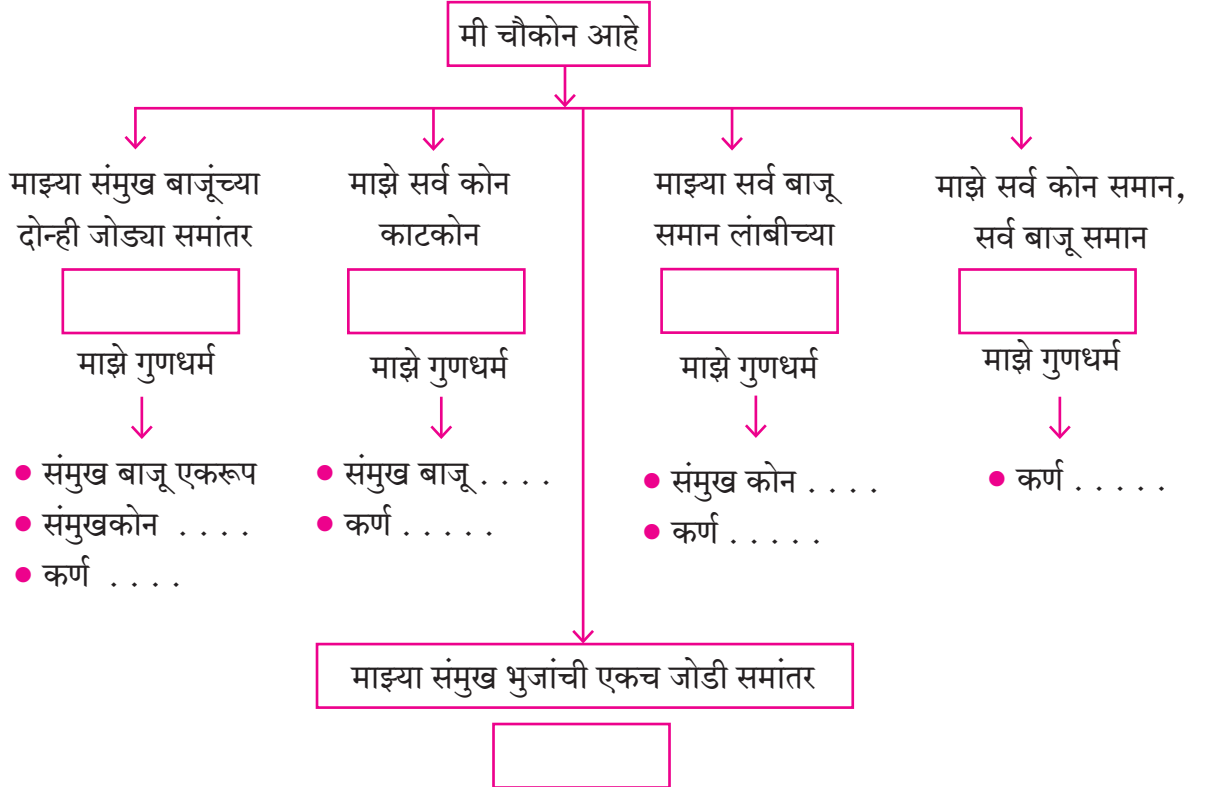
(1) ... , ... (2) ... , ...

(3) ... , ... (4) ... , ...

संमुख बाजूंच्या जोड्या (1) , (2) ,

संमुख कोनांच्या जोड्या (1) , (2) ,

आठवा पाहू माझा प्रकार आणि माझे गुणधर्म



दुसऱ्या रीतीने काढलेल्या चौकोनात आपण संमुख बाजू समान असलेला चौकोन काढलेला आहे. याच्या संमुख बाजू समांतर का येतात, हे एका प्रमेयाच्या सिद्धतेनंतर तुम्हांला समजेल.

कृती I लगतच्या बाजू वेगवेगळ्या लांबीच्या आणि त्यामधील कोन वेगवेगळ्या मापांचे घेऊन पाच वेगवेगळे समांतरभुज चौकोन काढा.

समांतरभुज चौकोनाची प्रमेये सिद्ध करण्यासाठी एकरूप त्रिकोणांचा उपयोग होतो. तो कसा करून घ्यायचा हे समजण्यासाठी पुढील कृती करा.

कृती II

- एका जाड कागदावर $\square ABCD$ हा समांतरभुज चौकोन काढा. त्याचा कर्ण AC काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे शिरोबिंदूंची नावे चौकोनाच्या आतही लिहा.

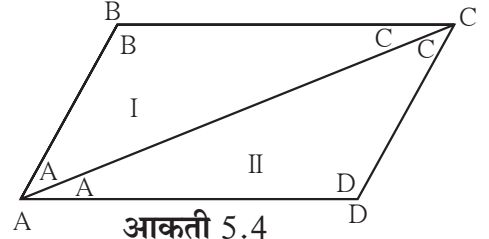
- कर्ण AC वर घडी घालून $\triangle ADC$ आणि $\triangle CBA$ एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात का हे पाहा.

- $\square ABCD$ त्याच्या AC कर्णावर कापून $\triangle ADC$ आणि $\triangle CBA$ वेगळे करा. $\triangle CBA$ फिरवून घेऊन $\triangle ADC$ शी तंतोतंत जुळतो का ते पाहा.

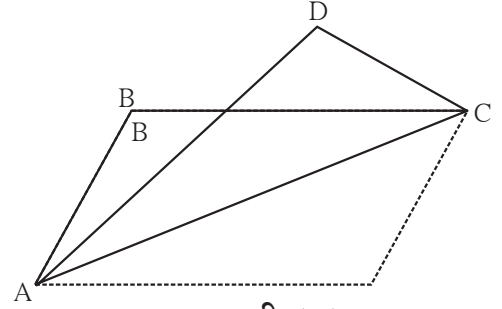
काय आढळले? $\triangle CBA$ च्या कोणत्या बाजू $\triangle ADC$ च्या कोणत्या बाजूंशी जुळल्या? $\triangle CBA$ चा कोणता कोन $\triangle ADC$ च्या कोणत्या कोनाशी जुळला?

बाजू DC ही बाजू AB शी आणि बाजू AD ही बाजू CB शी तंतोतंत जुळते. तसेच $\angle B$ हा $\angle D$ शी जुळतो.

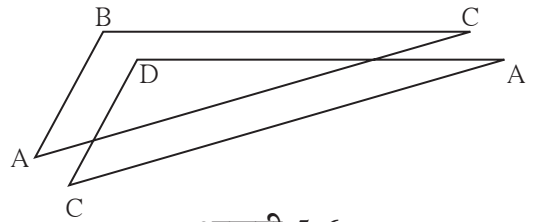
म्हणजेच समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू व संमुख कोन एकरूप आहेत असे दिसते. समांतरभुज चौकोनाचे हेच गुणधर्म आपण सिद्ध करूया.



आकृती 5.4

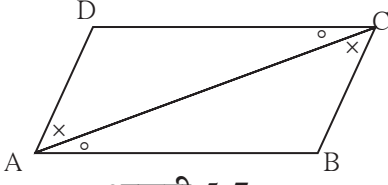


आकृती 5.5



आकृती 5.6

प्रमेय 1. समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात व संमुख कोन एकरूप असतात.



आकृती 5.7

पक्ष : □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.

म्हणजेच बाजू AB ॥ बाजू DC, बाजू AD ॥ बाजू BC.

साध्य : रेख AD ≅ रेख BC ; रेख DC ≅ रेख AB

∠ADC ≅ ∠CBA, आणि ∠DAB ≅ ∠BCD.

रचना : कर्ण AC काढा.

सिद्धता : रेख DC ॥ रेख AB व कर्ण AC ही छेदिका.

∴ ∠DCA ≅ ∠BAC(1)
आणि ∠DAC ≅ ∠BCA(2) }व्युत्क्रम कोन

आता, ΔADC व ΔCBA यांमध्ये,

∠DAC ≅ ∠BCA विधान (2) वरून

∠DCA ≅ ∠BAC विधान (1) वरून

बाजू AC ≅ बाजू CA सामाईक बाजू

∴ ΔADC ≅ ΔCBA कोबाको कसोटी

∴ बाजू AD ≅ बाजू CB एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू

आणि बाजू DC ≅ बाजू AB एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू

तसेच, ∠ADC ≅ ∠CBA एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन

याप्रमाणेच ∠DAB ≅ ∠BCD हे सिद्ध करता येईल.



विचार करूया

वरील प्रमेयात ∠DAB ≅ ∠BCD हे सिद्ध करण्यासाठी रचनेत काही बदल करावा लागेल का? तो बदल करून सिद्धता कशी लिहिता येईल?

समांतरभुज चौकोनाचा आणखी एक गुणधर्म समजून घेण्यासाठी पुढील कृती करा.

कृती : □PQRS हा कोणताही एक समांतरभुज

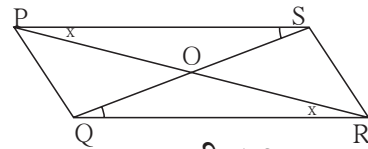
चौकोन काढा. कर्ण PR आणि कर्ण QS

काढून त्यांच्या छेदनबिंदूला O हे नाव द्या.

प्रत्येक कर्णाच्या झालेल्या दोन भागांच्या

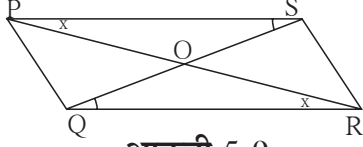
लांबीची तुलना कर्कटकाच्या साहाय्याने करा.

काय आढळले?



आकृती 5.8

प्रमेय : समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.



आकृती 5.9

पक्ष : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

कर्ण PR व कर्ण QS हे O बिंदूत छेदतात.

साध्य : रेख $PO \cong$ रेख RO , रेख $SO \cong$ रेख QO

सिद्धता : ΔPOS व ΔROQ मध्ये

$\angle OPS \cong \angle ORQ$ व्युत्क्रम कोन

बाजू $PS \cong$ बाजू RQ समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा

$\angle PSO \cong \angle RQO$ व्युत्क्रम कोन

$\therefore \Delta POS \cong \Delta ROQ$ कोबाको कसोटी

$\therefore$ रेख $PO \cong$ रेख RO

आणि रेख $SO \cong$ रेख QO } एकरूप त्रिकोणाच्या संगत भुजा



हे लक्षात ठेवूया.

- समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात.
- समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.
- समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे. $PQ = 3.5$, $PS = 5.3$ $\angle Q = 50^\circ$ तर □PQRS च्या इतर बाजूंच्या लांबी आणि कोनांची मापे काढा.

उकल : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$ आंतरकोन

$\therefore 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

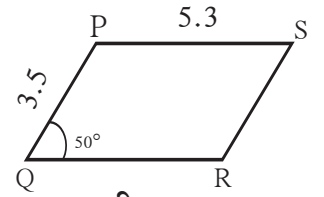
$\therefore \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

आता, $\angle P = \angle R$ आणि $\angle Q = \angle S$ समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन

$\therefore \angle R = 130^\circ$ आणि $\angle S = 50^\circ$

तसेच, $PS = QR$ आणि $PQ = SR$ समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा.

$\therefore QR = 5.3$ आणि $SR = 3.5$



आकृती 5.10

∴ बाजू PS ∥ बाजू QR(I) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी.

तसेच $\angle PRS$ आणि $\angle RPQ$ हे रेख PQ आणि रेख SR यांच्या PR या छेदिकेमुळे झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

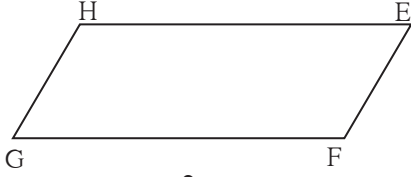
∴ बाजू PQ ∥ बाजू SR(II) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी.

∴ (I) व (II) वरून □PQRS हा समांतरभुज आहे.

समांतरभुज चौकोन काढण्याच्या दोन रीती सुरुवातीला दिल्या आहेत. दुसऱ्या रीतीत प्रत्यक्षात संमुख बाजू समान असलेला चौकोन काढला आहे. असा चौकोन समांतरभुज का असतो, हे आता लक्षात आले का?

प्रमेय : चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या जोड्या एकरूप असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

खाली दिलेल्या पक्ष, साध्य आणि सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा.



आकृती 5.16

पक्ष : □EFGH मध्ये $\angle E \cong \angle G$
आणि $\angle \dots \cong \angle \dots$

साध्य : □EFGH हा

सिद्धता : $\angle E = \angle G = x$ आणि $\angle H = \angle F = y$ मानू.

चौकोनाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज असते.

$$\therefore \angle E + \angle G + \angle H + \angle F = \dots\dots\dots$$

$$\therefore x + y + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \square x + \square y = \dots\dots$$

$$\therefore x + y = 180^\circ$$

$$\therefore \angle G + \angle H = \dots\dots\dots$$

रेख HE आणि रेख GF यांना छेदिका HG ने छेदल्यामुळे $\angle G$ आणि $\angle H$ हे आंतरकोन तयार झाले आहेत.

∴ बाजू HE ∥ बाजू GF (I) समांतर रेषांची आंतरकोन कसोटी.

त्याचप्रमाणे $\angle G + \angle F = \dots\dots\dots$

∴ बाजू ∥ बाजू (II) समांतर रेषांची आंतरकोन कसोटी.

∴ (I) व (II) वरून □EFGH हा आहे.

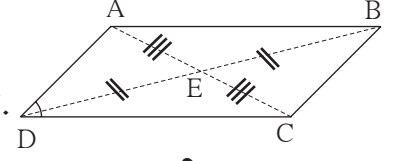
प्रमेय : चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागत असतील तर तो चौकोन समांतरभुज असतो.

पक्ष : $\square ABCD$ चे कर्ण परस्परांना बिंदू E मध्ये दुभागतात. म्हणजेच रेख $AE \cong$ रेख CE
रेख $BE \cong$ रेख DE

साध्य : $\square ABCD$ हा समांतरभुज आहे.

सिद्धता : पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा आणि सिद्धता तुम्ही स्वतः लिहा.

1. रेख $AB \parallel$ रेख DC हे सिद्ध करण्यासाठी व्युत्क्रम कोनांची कोणती जोडी एकरूप दाखवावी लागेल? व्युत्क्रम कोनांची ती जोडी कोणत्या छेदिकेमुळे मिळेल?
2. व्युत्क्रम कोनांच्या निवडलेल्या जोडीतील कोन हे कोणकोणत्या त्रिकोणांचे कोन आहेत?
3. त्यांपैकी कोणते त्रिकोण कोणत्या कसोटीने एकरूप होतात?
4. याप्रमाणे विचार करून रेख $AD \parallel$ रेख BC हे सिद्ध करता येईल ना?



आकृती 5.17

एखादा चौकोन समांतरभुज आहे असे सिद्ध करायचे असते तेव्हा वरील प्रमेये उपयोगी पडतात. म्हणून या प्रमेयांना समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या म्हणतात.

आणखी एक प्रमेय समांतरभुज चौकोनाची कसोटी म्हणून उपयोगी पडते.

प्रमेय : चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एक जोडी एकरूप आणि समांतर असेल तर तो चौकोन समांतरभुज असतो.

पक्ष : $\square ABCD$ मध्ये रेख $CB \cong$ रेख DA आणि रेख $CB \parallel$ रेख DA

साध्य : $\square ABCD$ समांतरभुज आहे.

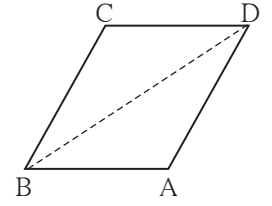
रचना : कर्ण BD काढला.

खाली थोडक्यात दिलेली सिद्धता तुम्ही विस्ताराने लिहा.

$\triangle CBD \cong \triangle ADB$ बा-को-बा कसोटी.

$\therefore \angle CDB \cong \angle ABD$ एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

$\therefore$ रेख $CD \parallel$ रेख BA समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी.



आकृती 5.18



हे लक्षात ठेवूया.

- ★ ज्या चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या जोड्या एकरूप असतात तो चौकोन समांतरभुज असतो.
- ★ ज्या चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या जोड्या एकरूप असतात तो चौकोन समांतरभुज असतो.
- ★ ज्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात तो चौकोन समांतरभुज असतो.
- ★ चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एक जोडी एकरूप आणि समांतर असेल तर तो चौकोन समांतरभुज असतो. या प्रमेयांना समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या म्हणतात.



विचार करूया

वहीमधील छापलेल्या रेषा एकमेकींना समांतर असतात. या रेषांचा उपयोग करून एखादा समांतरभुज चौकोन कसा काढता येईल?

सोडवलेली उदाहरणे -

उदा (1) □PQRS हा समांतरभुज आहे. बाजू PQ चा मध्यबिंदू M आणि बाजू RS चा मध्यबिंदू N आहे तर □PMNS आणि □MQRN समांतरभुज आहेत हे सिद्ध करा.

पक्ष : □PQRS समांतरभुज आहे. बाजू PQ आणि बाजू RS यांचे अनुक्रमे M आणि N हे मध्यबिंदू आहेत.

साध्य : □PMNS समांतरभुज आहे.
□MQRN समांतरभुज आहे.

सिद्धता : बाजू PQ || बाजू SR

∴ बाजू PM || बाजू SN (∵ P-M-Q; S-N-R)(I)

तसेच बाजू PQ = बाजू SR.

∴ $\frac{1}{2}$ बाजू PQ = $\frac{1}{2}$ बाजू SR

∴ बाजू PM = बाजू SN (∵ M व N हे मध्यबिंदू आहेत.).....(II)

∴ (I) व (II) वरून □PMNQ हा समांतरभुज आहे,

त्याचप्रमाणे □MQRN समांतरभुज आहे हे सिद्ध करता येईल.

उदा (2) Δ ABC च्या बाजू AB आणि AC यांचे अनुक्रमे D व E हे मध्यबिंदू आहेत. किरण ED वर बिंदू F असा आहे, की ED = DF. तर सिद्ध करा, □AFBE हा समांतरभुज आहे.

या उदाहरणासाठी पक्ष आणि साध्य तुम्ही लिहा आणि सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून ती पूर्ण करा.

पक्ष : -----

साध्य : -----

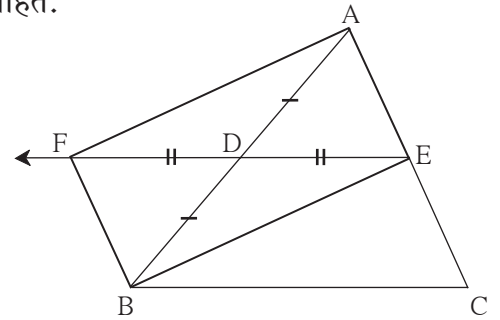
सिद्धता : रेख AB आणि रेख EF हे □AFBE चे आहेत.

रेख AD ≅ रेख DB.....

रेख ≅ रेख रचना.

∴ □AFBE चे कर्ण परस्परांना

∴ कसोटीने □AFBE समांतरभुज आहे.



आकृती 5.20

उदा (3) कोणताही समभुज चौकोन हा समांतरभुज असतो हे सिद्ध करा.

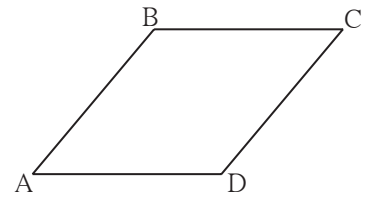
पक्ष : □ABCD समभुज आहे

साध्य : □ABCD समांतरभुज आहे.

सिद्धता : बाजू AB = बाजू BC = बाजू CD = बाजू DA (पक्ष)

∴ बाजू AB = बाजू CD आणि बाजू BC = बाजू AD

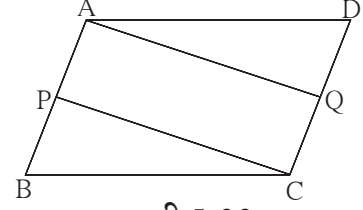
∴ □ABCD समांतरभुज आहे..... (समांतरभुज चौकोनाची संमुख भुजा कसोटी)



आकृती 5.21

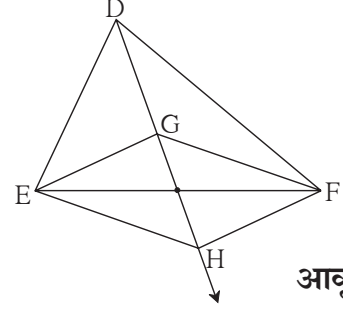
सरावसंच 5.2

1. आकृती 5.22 मध्ये, $\square ABCD$ हा समांतरभुज आहे. बिंदू P व बिंदू Q हे अनुक्रमे बाजू AB व बाजू DC यांचे मध्यबिंदू आहेत तर सिद्ध करा की, $\square APCQ$ समांतरभुज आहे.



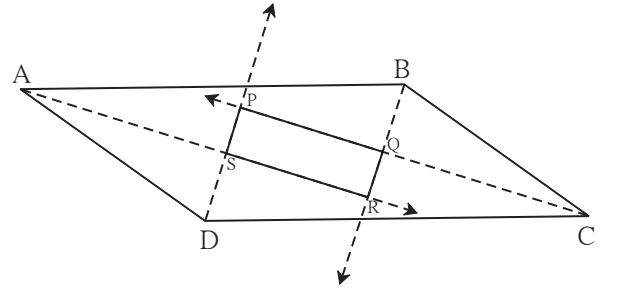
आकृती 5.22

2. कोणताही आयत समांतरभुज असतो, हे सिद्ध करा.
3. आकृती 5.23 मध्ये, बिंदू G हा $\triangle DEF$ चा मध्यगा संपात आहे. किरण DG वर बिंदू H असा घ्या, की D-G-H आणि $DG = GH$, तर सिद्ध करा $\square GEHF$ समांतरभुज आहे.



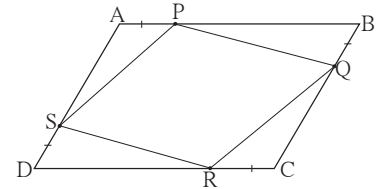
आकृती 5.23

- 4*. समांतरभुज चौकोनाच्या चारही कोनांच्या दुभाजकांमुळे तयार झालेला चौकोन आयत असतो, हे सिद्ध करा. (आकृती 5.24)



आकृती 5.24

5. शेजारील आकृती 5.25 मध्ये $\square ABCD$ ह्या समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूंवर P, Q, R, S बिंदू असे आहेत की, $AP = BQ = CR = DS$ तर सिद्ध करा, की $\square PQRS$ हा समांतरभुज चौकोन आहे.



आकृती 5.25



जाणून घेऊया.

आयत, समभुज चौकोन आणि चौरस यांचे विशेष गुणधर्म (Properties of rectangle, rhombus and square)

आयत, समभुज चौकोन आणि चौरस हे समांतरभुज चौकोनही असतात. त्यामुळे संमुख बाजू समान असणे, संमुख कोन समान असणे आणि कर्ण परस्परांना दुभागणे हे गुणधर्म या तिन्ही प्रकारच्या चौकोनांत असतात. परंतु यापेक्षा काही अधिक गुणधर्म या प्रत्येक प्रकारच्या चौकोनात असतात. ते आपण पाहू. या गुणधर्मांच्या सिद्धता पुढे थोडक्यात दिल्या आहेत. दिलेल्या पायऱ्या विचारात घेऊन तुम्ही त्या सिद्धता विस्ताराने लिहा.

प्रमेय : आयताचे कर्ण एकरूप असतात.

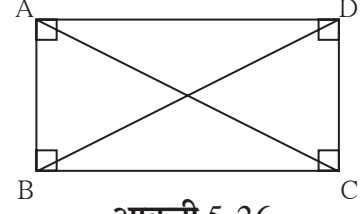
पक्ष : $\square ABCD$ हा आयत आहे.

साध्य : कर्ण $AC \cong$ कर्ण BD

सिद्धता : थोडक्यात दिलेली सिद्धता कारणे देऊन पूर्ण करा.

$\Delta ADC \cong \Delta DAB$ बाकोबा कसोटी.

कर्ण $AC \cong$ कर्ण BD (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)



आकृती 5.26

प्रमेय : चौरसाचे कर्ण एकरूप असतात.

पक्ष, साध्य आणि सिद्धता तुम्ही लिहा.

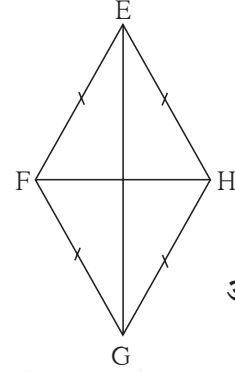
प्रमेय : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

पक्ष : $\square EFGH$ समभुज आहे.

साध्य : (i) कर्ण EG हा कर्ण HF चा लंबदुभाजक आहे.

(ii) कर्ण HF हा कर्ण EG चा लंबदुभाजक आहे.

सिद्धता : (i) रेख $EF \cong$ रेख EH
रेख $GF \cong$ रेख GH } पक्ष



आकृती 5.27

रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो.

$\therefore$ बिंदू E व बिंदू G हे रेख HF च्या लंबदुभाजकावर आहेत.

दोन भिन्न बिंदूंतून एक आणि एकच रेषा जाते.

$\therefore$ रेषा EG ही कर्ण HF ची लंबदुभाजक रेषा आहे.

$\therefore$ कर्ण EG हा कर्ण HF चा लंबदुभाजक आहे.

(ii) याप्रमाणेच कर्ण HF हा कर्ण EG चा लंबदुभाजक आहे हे सिद्ध करता येईल.

पुढील प्रमेयांच्या सिद्धता तुम्ही लिहा.

- चौरसाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण त्याचे संमुख कोन दुभागतात.
- चौरसाचे कर्ण त्याचे संमुख कोन दुभागतात.



हे लक्षात ठेवूया.

- आयताचे कर्ण एकरूप असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण संमुख कोन दुभागतात.
- चौरसाचे कर्ण एकरूप असतात.
- चौरसाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
- चौरसाचे कर्ण संमुख कोन दुभागतात.

- 

A diagram of an isosceles trapezoid $PQRS$. The top base is PQ and the bottom base is SR . The legs are PS and QR . Single tick marks on PS and QR indicate they are equal in length. Arrows on PQ and SR indicate they are parallel.

69

सोडवलेली उदाहरणे :

उदा (1) □ABCD च्या कोनांची मापे 4 : 5 : 7 : 8 या प्रमाणात आहेत. तर □ABCD समलंब आहे, हे दाखवा.

उकल : समजा, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ यांची मापे अनुक्रमे $(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, व $(8x)^\circ$ असे मानू.
चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

$$\therefore 4x + 5x + 7x + 8x = 360$$

$$\therefore 24x = 360 \quad \therefore x = 15$$

$$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ, \angle B = 5 \times 15 = 75^\circ, \angle C = 7 \times 15 = 105^\circ,$$

$$\text{आणि } \angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$$

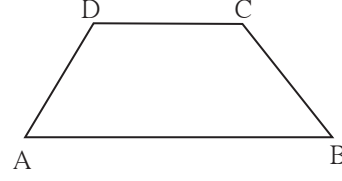
$$\text{आता, } \angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \text{बाजू } CD \parallel \text{बाजू } BA \dots\dots (I)$$

$$\text{परंतु } \angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$$

$$\therefore \text{बाजू } BC \text{ आणि बाजू } AD \text{ एकमेकींना समांतर नाहीत.} \dots\dots (II)$$

$$\therefore \square ABCD \text{ हा समलंब चौकोन आहे.} \dots\dots (I) \text{ व } (II) \text{ वरून}$$



आकृती 5.30

उदा (2) समलंब □PQRS मध्ये बाजू PS $\parallel$ बाजू QR आणि बाजू PQ $\cong$ बाजू SR,

बाजू QR > बाजू PS तर सिद्ध करा $\angle PQR \cong \angle SRQ$

पक्ष : □PQRS मध्ये बाजू PS $\parallel$ बाजू QR

आणि बाजू PQ $\cong$ बाजू SR

साध्य : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

रचना : बिंदू S मधून बाजू PQ ला समांतर रेषाखंड काढला.
तो बाजू QR ला T मध्ये छेदतो.

सिद्धता : □PQRS मध्ये,

रेख PS $\parallel$ रेख QTपक्ष आणि Q-T-R

रेख PQ $\parallel$ रेख STरचना

$\therefore$ □PQTS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore \angle PQT \cong \angle STR$ संगत कोन (I)

तसेच रेख PQ $\cong$ रेख ST

परंतु रेख PQ $\cong$ रेख SR(पक्ष)

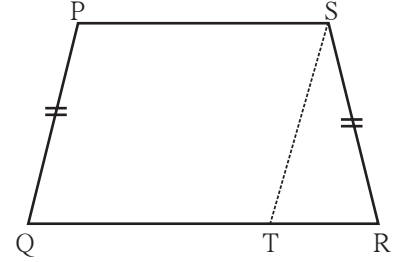
$\therefore$ रेख ST $\cong$ रेख SR

$\therefore \angle STR \cong \angle SRT$ समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय (II)

$\therefore \angle PQT \cong \angle SRT$ (I) व (II) वरून.

$\therefore \angle PQR \cong \angle SRQ$ Q-T-R.

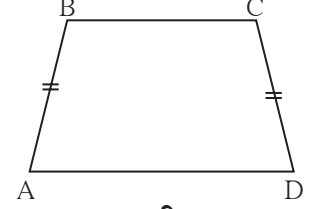
यावरून सिद्ध होते, की समद्विभुज समलंब चौकोनाचे पायालगतचे कोन एकरूप असतात.



आकृती 5.31

सरावसंच 5.4

1. $\square IJKL$ मध्ये बाजू $IJ \parallel$ बाजू KL असून $\angle I = 108^\circ$ $\angle K = 53^\circ$ तर $\angle J$ आणि $\angle L$ यांची मापे काढा.
2. $\square ABCD$ मध्ये बाजू $BC \parallel$ बाजू AD असून बाजू $AB \cong$ बाजू DC जर $\angle A = 72^\circ$ तर $\angle B$, आणि $\angle D$ यांची मापे ठरवा.
3. आकृती 5.32 मधील $\square ABCD$ मध्ये बाजू $BC <$ बाजू AD असून बाजू $BC \parallel$ बाजू AD आणि जर बाजू $BA \cong$ बाजू CD तर $\angle ABC \cong \angle DCB$ हे सिद्ध करा.



आकृती 5.32



जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय (Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

विधान : त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो व त्या बाजूच्या निम्न्या लांबीचा असतो.

पक्ष : $\triangle ABC$ मध्ये बिंदू P हा रेषा AB चा मध्यबिंदू व बिंदू Q हा रेषा AC चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : रेषा $PQ \parallel$ रेषा BC
आणि $PQ = \frac{1}{2} BC$

रचना : रेषा PQ हा R पर्यंत असा वाढवा की $PQ = QR$ रेषा RC काढा.

सिद्धता : $\triangle AQP$ व $\triangle CQR$ मध्ये

रेखा $PQ \cong$ रेखा QR रचना

रेखा $AQ \cong$ रेखा QC Q हा AC चा मध्यबिंदू.

$\angle AQP \cong \angle CQR$ परस्पर विरुद्ध कोन.

$\therefore \triangle AQP \cong \triangle CQR$ बाकोबा कसोटी

$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ (1) एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

$\therefore$ रेखा $AP \cong$ रेखा CR (2) एकरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजा

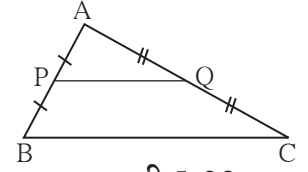
विधान (1) वरून रेषा $AB \parallel$ रेषा CRव्युत्क्रम कोन कसोटी.

विधान (2) वरून रेखा $AP \cong$ रेखा CR

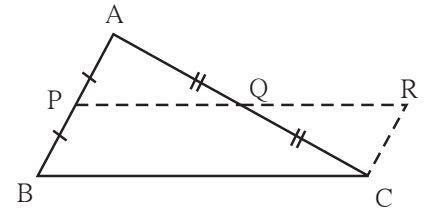
परंतु रेखा $AP \cong$ रेखा $PB \cong$ रेखा CR आणि रेखा $PB \parallel$ रेखा CR

$\therefore \square PBCR$ हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore$ रेखा $PQ \parallel$ रेखा BC आणि $PR = BC$ कारण संमुख बाजू समान लांबीच्या असतात.



आकृती 5.33



आकृती 5.34

$$PQ = \frac{1}{2} PR \dots\dots \text{रचना}$$

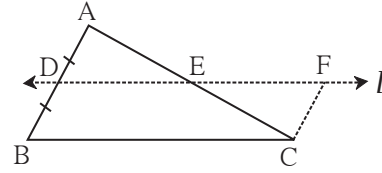
$$\therefore PQ = \frac{1}{2} BC \quad \because PR = BC$$

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंच्या प्रमेयाचा व्युत्पत्तास

प्रमेय : त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून जाणारी व दुसऱ्या बाजूला समांतर असणारी रेषा तिसऱ्या बाजूला दुभागते.

या विधानासाठी आकृती, पक्ष, साध्य, रचना दिलेली आहे. त्यावरून त्या विधानाची सिद्धता लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

पक्ष : $\triangle ABC$ च्या बाजू AB चा मध्यबिंदू D आहे. बिंदू D मधून जाणारी बाजू BC ला समांतर असणारी रेषा l ही बाजू AC ला बिंदू E मध्ये छेदते.



आकृती 5.35

रचना : बिंदू C मधून रेषा AB ला समांतर रेषा काढा. ही रेषा, रेषा l ला ज्या बिंदूत छेदते, त्या बिंदूला F नाव द्या.

सिद्धता : रेषा $l \parallel$ रेषा BC (पक्ष) आणि केलेली रचना यांचा उपयोग करून $\square BCFD$ हा समांतरभुज चौकोन आहे, हे दाखवा.

$\triangle ADE \cong \triangle CFE$ हे सिद्ध करा आणि त्यावरून साध्य सिद्ध करा.

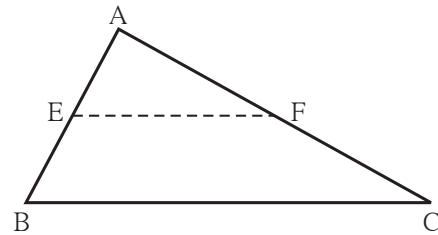
सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) $\triangle ABC$ च्या बाजू AB व AC चे अनुक्रमे बिंदू E व F हे मध्यबिंदू आहेत. जर $EF = 5.6$ तर BC ची लांबी काढा.

उकल : $\triangle ABC$ मध्ये बिंदू E व बिंदू F हे अनुक्रमे बाजू AB व बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत.

$$EF = \frac{1}{2} BC \dots\dots \text{मध्यबिंदूचे प्रमेय.}$$

$$5.6 = \frac{1}{2} BC \quad \therefore BC = 5.6 \times 2 = 11.2$$



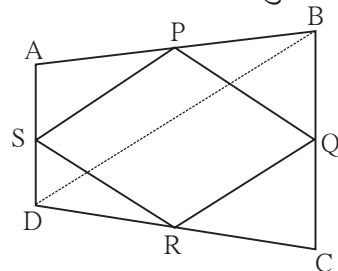
आकृती 5.36

उदा (2) कोणत्याही चौकोनाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू क्रमाने जोडून होणारा चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो हे सिद्ध करा.

पक्ष : $\square ABCD$ च्या बाजू AB , BC , CD व AD चे मध्यबिंदू अनुक्रमे P , Q , R , S आहेत.

साध्य : $\square PQRS$ हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रचना : कर्ण BD काढा.



आकृती 5.37

सिद्धता : ΔABD मध्ये S हा AD चा मध्यबिंदू व P हा AB चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore$ मध्यबिंदूच्या प्रमेयानुसार, $PS \parallel DB$ आणि $PS = \frac{1}{2} BD$ (1)

तसेच ΔDBC मध्ये Q व R हे अनुक्रमे BC व DC या बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत.

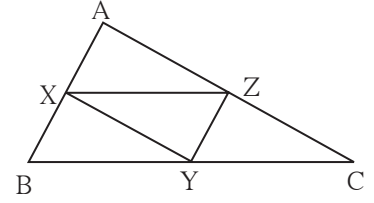
$\therefore QR \parallel BD$, $QR = \frac{1}{2} BD$ (2) मध्यबिंदूच्या प्रमेयानुसार

$\therefore PS \parallel QR$, $PS = QR$ (1) व (2) वरून

$\therefore \square PQRS$ हा समांतरभुज चौकोन आहे.

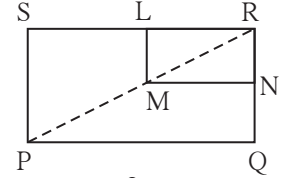
सरावसंच 5.5

- आकृती 5.38 मध्ये ΔABC च्या बाजू AB, बाजू BC व बाजू AC चे अनुक्रमे बिंदू X, Y, Z हे मध्यबिंदू आहेत. $AB = 5$ सेमी, $AC = 9$ सेमी व $BC = 11$ सेमी, तर XY, YZ, XZ ची लांबी काढा.



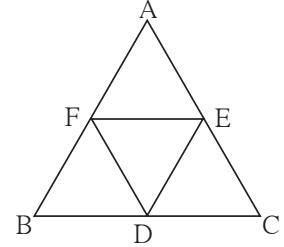
आकृती 5.38

- आकृती 5.39 मध्ये $\square PQRS$ आणि $\square MNRL$ हे आयत आहेत. बिंदू M हा PR चा मध्यबिंदू आहे. तर सिद्ध करा (i) $SL = LR$, (ii) $LN = \frac{1}{2} SQ$.



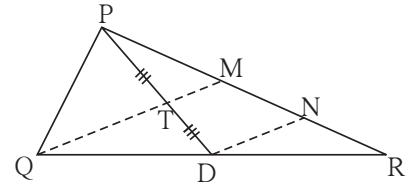
आकृती 5.39

- आकृती 5.40 मध्ये ΔABC या समभुज त्रिकोणात बिंदू F, D, E हे अनुक्रमे बाजू AB, बाजू BC, बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत तर ΔFED हा समभुज त्रिकोण आहे हे सिद्ध करा.



आकृती 5.40

- आकृती 5.41 मध्ये रेख PD ही ΔPQR ची मध्यगा आहे. बिंदू T हा PD चा मध्यबिंदू आहे. QT वाढवल्यावर PR ला M बिंदूत छेदतो, तर दाखवा की $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$. [सूचना : $DN \parallel QM$ काढा.]



आकृती 5.41

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

- खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.
 - ज्या चौकोनाच्या लगतच्या बाजूंच्या सर्व जोड्या एकरूप असतात त्या चौकोनाचे नाव कोणते ?
(A) आयत (B) समांतरभुज चौकोन (C) समलंब चौकोन (D) समभुज चौकोन

(ii) एका चौरसाच्या कर्णाची लांबी $12\sqrt{2}$ सेमी आहे. तर त्याची परिमिती किती ?

(A) 24 सेमी (B) $24\sqrt{2}$ सेमी (C) 48 सेमी (D) $48\sqrt{2}$ सेमी

(iii) एका समभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांची मापे $(2x)^\circ$ व $(3x - 40)^\circ$ असतील तर $x = ?$

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

- एका काटकोन चौकोनाच्या लगतच्या बाजू अनुक्रमे 7 सेमी व 24 सेमी आहेत तर त्या चौकोनाच्या कर्णाची लांबी काढा.
- चौरसाच्या कर्णाची लांबी 13 सेमी आहे तर चौरसाची बाजू काढा.
- समांतरभुज चौकोनाच्या दोन लगतच्या बाजूंचे गुणोत्तर 3:4 आहे जर त्याची परिमिती 112 सेमी असेल तर त्याच्या प्रत्येक बाजूची लांबी काढा.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण PR व कर्ण QS यांची लांबी अनुक्रमे 20 सेमी व 48 सेमी आहे, तर समभुज चौकोन PQRS च्या बाजू PQ ची लांबी काढा.
- आयत PQRS चे कर्ण परस्परांना M बिंदूत छेदतात. जर $\angle QMR = 50^\circ$ तर $\angle MPS$ चे माप काढा.

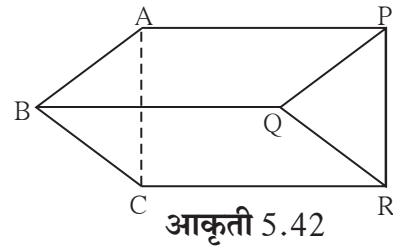
7. शेजारील आकृती 5.42 मध्ये

रेख AB $\parallel$ रेख PQ, रेख AB $\cong$ रेख PQ,

रेख AC $\parallel$ रेख PR, रेख AC $\cong$ रेख PR

तर सिद्ध करा की,

रेख BC $\parallel$ रेख QR व रेख BC $\cong$ रेख QR.

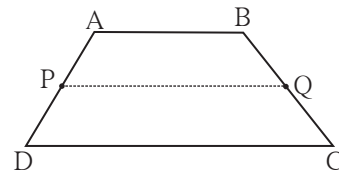


8*. शेजारील आकृती 5.43 मध्ये $\square ABCD$

हा समलंब चौकोन आहे. AB $\parallel$ DC आहे.

P व Q हे अनुक्रमे रेख AD व रेख BC चे मध्यबिंदू आहेत, तर सिद्ध करा की,

PQ $\parallel$ AB व $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$



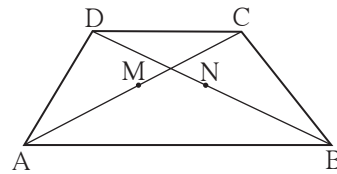
आकृती 5.43

9. शेजारील आकृती 5.44 मध्ये $\square ABCD$ हा

समलंब चौकोन आहे. AB $\parallel$ DC. M आणि

N हे अनुक्रमे कर्ण AC व कर्ण DB चे मध्यबिंदू

आहेत. तर सिद्ध करा की, MN $\parallel$ AB



आकृती 5.44

कृती

चौकोनाच्या विविध गुणधर्मांचा पडताळा घेणे.

साहित्य : 15 सेमी × 10 सेमी चा प्लायवूडचा तुकडा; 12 ते 15 खिल्ले, जाडा दोरा, कात्री.

सूचना : 15 सेमी × 10 सेमी चा प्लायवुडच्या तुकड्यावर

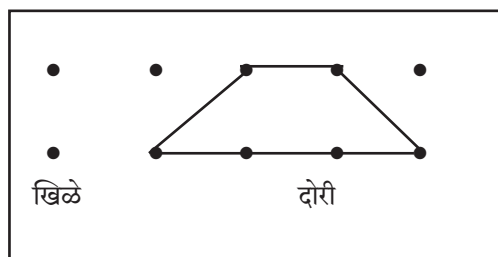
सरळरेषेत 2 सेमी अंतरावर 5 खिळे ठोका. तसेच खालच्या सरळ

રેષેત સુદધા ખિલે ઠોકા. દોન રેષાંમધીલ અંતરસુદધા 2 સેમી ઠેવા.

दोन्याने वेगवेगळे चौकोन (खिळ्याचे आधारेने) तयार करा.

बाजूसंबंधी गुणधर्म दोऱ्याने पडताळा. यावरून चौकोनांच्या

कोनांसंबंधी गुणधर्म पडताळा.



आकृती 5.45

अधिक माहितीसाठी

त्रिकोणांचा मध्यगा संपातबिंदु प्रत्येक मध्यगेली 2 : 1 या प्रमाणात विभागतो, हा गुणधर्म तुम्हाला माहीत आहे.

त्याची खाली दिलेली सिद्धता अभ्यासा.

पक्ष : $\triangle ABC$ च्या रेख AD आणि रेख BE

या मध्यगा, बिंदू G मध्ये छेदतात.

साध्य : $AG : GD = 2 : 1$

रचना : किरण AD वर बिंदु F असा घेतला की

G-D-F आणि $GD = DF$

सिद्धता : ☐ BGCF चे कर्ण परस्पराना दृभागतात. पक्ष व रचना.

$\therefore \square BGCF$ समांतरभुज आहे.

$\therefore$ रेषा BE $\parallel$ रेषा FC समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंना सामावणाऱ्या रेषा.

आता ΔAFC च्या बाजू AC चा E हा मध्यबिंदू आहे. (पक्ष)

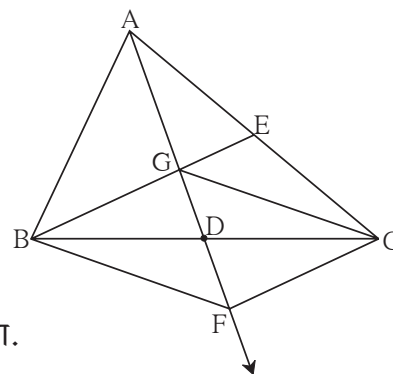
रेख EB || रेषा FC

त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून दुसऱ्या बाजूला समांतर असलेली रेषा तिसऱ्या बाजूला दुभागते.

∴ रेख AF चा G हा मध्यबिंदू आहे.

$$\therefore AG = GF$$

परंतु $AG = 2 GD$

$$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1} \text{ म्हणजेच } AG : GD = 2 : 1$$


आकृती 5.46