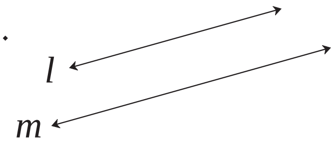
2 समांतर रेषा व छेदिका

जरा आठवूया.

एकाच प्रतलात असणाऱ्या आणि एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

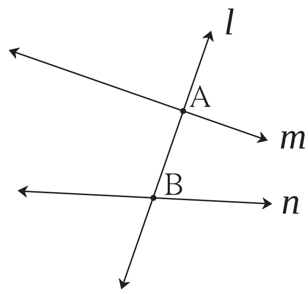
'रेषा l व रेषा m या समांतर रेषा आहेत,' हे 'रेषा $l \parallel$ रेषा m' असे लिहितात.



जाणून घेऊया.

छेदिका (Transversal)

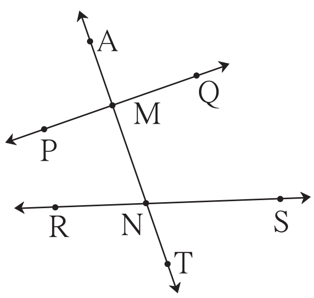
शेजारील आकृतीत रेषा m व रेषा n यांना रेषा l ही अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B या दोन भिन्न बिंदूंमध्ये छेदते. रेषा m व रेषा n यांची रेषा l ही छेदिका आहे.



जर एखादी रेषा दिलेल्या दोन रेषांना दोन भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर त्या रेषेला त्या दोन रेषांची छेदिका म्हणतात.

छेदिकेमुळे होणारे कोन (Angles made by transversal)

सोबतच्या आकृतीत छेदिकेमुळे छेदन बिंदू M जवळ चार आणि छेदन बिंदू N जवळ चार असे एकूण 8 कोन झालेले दिसतात. आठही कोनांपैकी प्रत्येक कोनाची एक भुजा छेदिकेवर आहे व दुसरी भुजा दोनपैकी एका रेषेवर आहे. याचा उपयोग करून कोनांच्या जोड्या ठरवल्या आहेत. त्या जोड्यांचा अभ्यास करूया.



- **संगत कोन (Corresponding angles)**

ज्या जोडीतील कोनांच्या छेदिकेवरील भुजा एकच दिशा दर्शवतात व छेदिकेवर नसलेल्या भुजा छेदिकेच्या एकाच बाजूस असतात, ती जोडी संगत कोनांची असते.

- **आंतरकोन (Interior angles)**

ज्या जोडीतील कोन दिलेल्या दोन रेषांच्या आतील बाजूस आहेत व छेदिकेच्या एकाच बाजूस आहेत, ती जोडी आंतरकोनांची जोडी असते.

वरील आकृतीतील संगतकोनांच्या जोड्या –

(i) $\angle AMP$ व $\angle MNR$

(ii) $\angle PMN$ व $\angle RNT$

(iii) $\angle AMQ$ व $\angle MNS$

(iv) $\angle QMN$ व $\angle SNT$

वरील आकृतीतील आंतरकोनांच्या जोड्या –

(i) $\angle PMN$ व $\angle MNR$

(ii) $\angle QMN$ व $\angle MNS$

• व्युत्क्रम कोन (Alternate angles)

ज्या जोडीतील कोन छेदिकेच्या विरुद्ध बाजूस असतात आणि छेदिकेवर असलेल्या भुजा विरुद्ध दिशा दर्शवतात, ती जोडी व्युत्क्रम कोनांची जोडी असते.

आकृतीत दोन जोड्या आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या तर दोन जोड्या बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या आहेत.

आंतरव्युत्क्रम कोन

(रेषांच्या आतील बाजूस असलेले कोन)

(i) $\angle PMN$ व $\angle MNS$

(ii) $\angle QMN$ व $\angle RNM$

बाह्यव्युत्क्रम कोन

(रेषांच्या बाहेरील बाजूस असलेले कोन)

(i) $\angle AMP$ व $\angle TNS$

(ii) $\angle AMQ$ व $\angle RNT$

सरावसंच 2.1

1. सोबतची आकृती पाहा. आकृतीत कोनांची नावे एका अक्षराने दाखवली आहेत. त्या आधारे रिकाम्या चौकटी भरा.

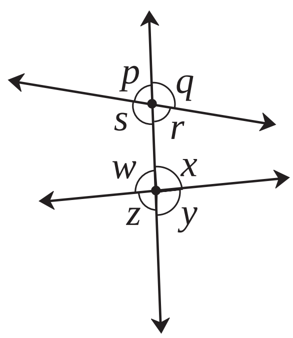
संगत कोनांच्या जोड्या.

(1) $\angle p$ व ☐ (2) $\angle q$ व ☐

(3) $\angle r$ व ☐ (4) $\angle s$ व ☐

आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या.

(5) $\angle s$ व ☐ (6) $\angle w$ व ☐

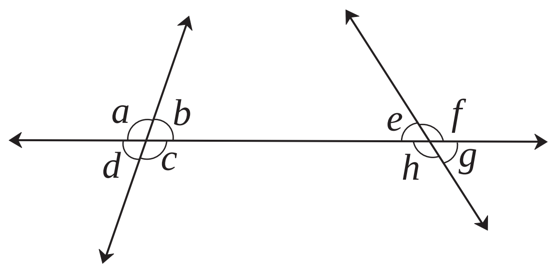


2. शेजारील आकृतीत दाखवलेले कोन पाहा.
खालील जोड्या दर्शवणारे कोन लिहा.

(1) आंतरव्युत्क्रम कोन

(2) संगतकोन

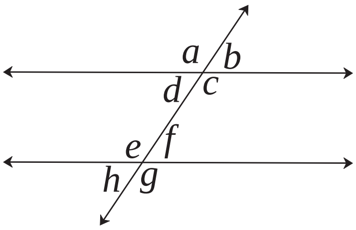
(3) आंतरकोन



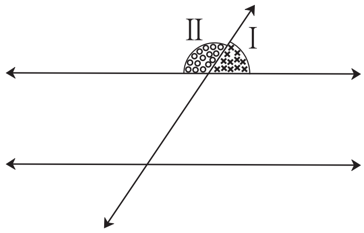
जाणून घेऊया.

समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे होणारे कोन व त्यांचे गुणधर्म
(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

कृती (I) : एका वहीच्या कागदावर आकृती (A) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे दोन समांतर रेषा काढा व त्यांची एक छेदिका काढा. ट्रेसपेपरच्या साहाय्याने त्याच आकृतीची एक प्रत एका कोऱ्या कागदावर काढा. आकृती (B) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भाग I व भाग II हे वेगवेगळ्या रंगाने रंगवा. हे दोन भाग कात्रीने कापा.



(A)



(B)

भाग I व भाग II ने दर्शवलेले कोन रेषीय जोडीत आहेत हे लक्षात घ्या. आता भाग I व भाग II हे आकृती A मधील आठ कोनांपैकी प्रत्येक कोनावर ठेवून पाहा.

कोणकोणत्या कोनांशी भाग I तंतोतंत जुळतो ?

कोणकोणत्या कोनांशी भाग II तंतोतंत जुळतो ?

असे दिसेल की, $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$, कारण हे कोन भाग I शी जुळतात.

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$, कारण हे कोन भाग II शी जुळतात.

(1) $\angle a \cong \angle e$, $\angle b \cong \angle f$, $\angle c \cong \angle g$, $\angle d \cong \angle h$

(या संगत कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(2) $\angle d \cong \angle f$ आणि $\angle e \cong \angle c$ (या आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(3) $\angle a \cong \angle g$ आणि $\angle b \cong \angle h$ (या बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(4) $m\angle d + m\angle e = 180^\circ$ आणि $m\angle c + m\angle f = 180^\circ$

(या आंतरकोनांच्या जोड्या आहेत.)

चला, चर्चा करूया.

दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर आठ कोन तयार होतात.

या आठ कोनांपैकी एका कोनाचे माप दिले असेल, तर इतर सात कोनांची मापे काढता येतील का ?

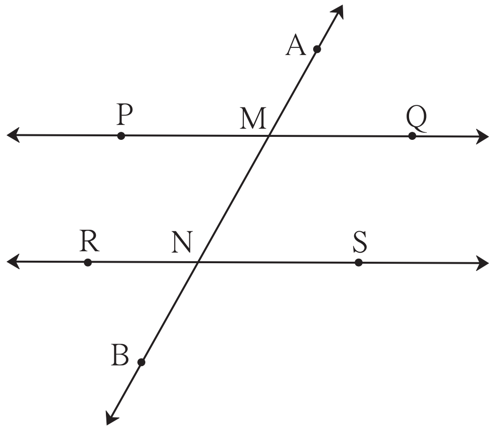
जाणून घेऊया.

(1) संगत कोनांचा गुणधर्म (Property of corresponding angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या संगत कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन एकमेकांशी एकरूप असतात.

शेजारील आकृतीत रेषा PQ || रेषा RS.

रेषा AB ही त्यांची छेदिका आहे.



संगत कोन

$\angle AMP \cong \angle MNR$ $\qquad$ $\angle PMN \cong \angle RNB$

$\angle AMQ \cong \angle MNS$ $\qquad$ $\angle QMN \cong \angle SNB$

(2) व्युत्क्रम कोनांचा गुणधर्म (Property of alternate angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन परस्परांशी एकरूप असतात.

आंतरव्युत्क्रम कोन	बाह्यव्युत्क्रम कोन
$\angle PMN \cong \angle MNS$	$\angle AMP \cong \angle SNB$
$\angle QMN \cong \angle MNR$	$\angle AMQ \cong \angle RNB$

(3) आंतरकोनांचा गुणधर्म (Property of interior angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

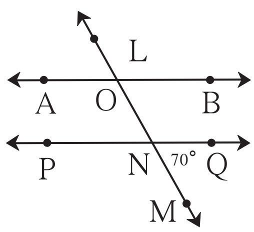
आंतरकोन

$m\angle PMN + m\angle MNR = 180^\circ$

$m\angle QMN + m\angle MNS = 180^\circ$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) शेजारील आकृतीत रेषा AB || रेषा PQ व रेषा LM ही छेदिका आहे. $m\angle MNQ = 70^\circ$, तर $\angle AON$ चे माप काढा.



उकल :

रीत I

$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70^\circ$ .....(विरुद्ध कोन)

$m\angle AON + m\angle ONP = 180^\circ$ ....(आंतरकोन)

$\therefore\ m\angle AON = 180^\circ - m\angle ONP$

$= 180^\circ - 70^\circ$

$= 110^\circ$

रीत II

$m\angle MNQ = 70^\circ$

$\therefore\ m\angle NOB = 70^\circ$....(संगतकोन)

$m\angle AON + m\angle NOB = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON + 70^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON = 110^\circ$

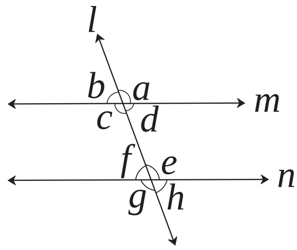
(आणखी वेगळा विचार करूनही वरील प्रश्न सोडवता येईल.)

उदा. (2) शेजारील आकृतीत रेषा $m \parallel$ रेषा n

रेषा l ही छेदिका आहे.

जर $m\angle b = (x + 15)^\circ$ आणि

$m\angle e = (2x + 15)^\circ$ तर x ची किंमत काढा.



उकल : $\angle b \cong \angle f$ .... (संगत कोन) $\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ$ .... (रेषीय जोडीतील कोन)

समीकरणात किमती घालून,

$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ$ $\therefore 3x + 30 = 180^\circ$

$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ$ .... (दोन्ही बाजूंतून 30 वजा करून)

$x = \frac{150^\circ}{3}$ .... (दोन्ही बाजूंना 3 ने भागून)

$\therefore x = 50^\circ$

हे मला समजले.

दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या कोनांपैकी

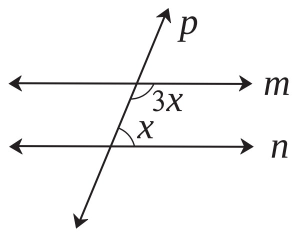
- संगत कोनांच्या जोडीतील कोन एकरूप असतात.
- व्युत्क्रम कोनांच्या जोडीतील कोन एकरूप असतात.
- आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक असतात.

सरावसंच 2.2

1. योग्य पर्याय निवडा.

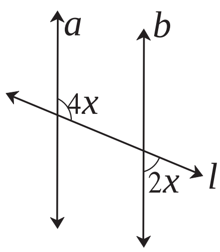
(1) शेजारील आकृतीत जर रेषा $m \parallel$ रेषा n असेल आणि रेषा p ही त्यांची छेदिका असेल तर x ची किंमत किती ?

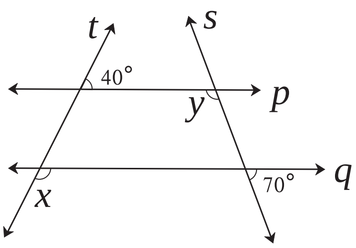
(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°



(2) शेजारील आकृतीत जर रेषा $a \parallel$ रेषा b आणि रेषा l ही त्यांची छेदिका असेल तर x ची किंमत किती?

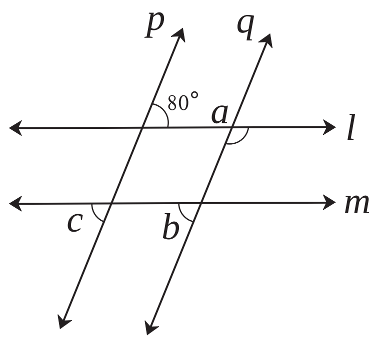
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°



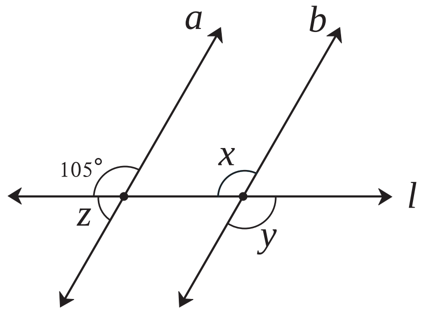


2. सोबतच्या आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा q आहे. रेषा t व रेषा s या छेदिका आहेत. दिलेल्या मापांवरून $\angle x$ व $\angle y$ ची मापे काढा.

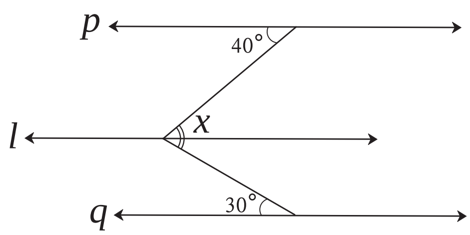
3. सोबतच्या आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा q आहे. रेषा $l \parallel$ रेषा m आहे. दिलेल्या कोनाच्या मापांवरून $\angle a, \angle b, \angle c$ ची मापे काढा. कारणे लिहा.



4★. सोबतच्या आकृतीत, रेषा $a \parallel$ रेषा b. रेषा l ही छेदिका आहे. दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून $\angle x, \angle y, \angle z$ यांची मापे काढा.



5★. शेजारील आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा $l \parallel$ रेषा q तर दिलेल्या मापांवरून $\angle x$ चे माप काढा.



अधिक माहितीसाठी :

दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणारी
- संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
- व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
- आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढणे (To draw a line parallel to the given line)

रचना (I) : दिलेल्या रेषेला रेषेबाहेरील बिंदूतून गुण्याच्या साहाय्याने समांतर रेषा काढणे.

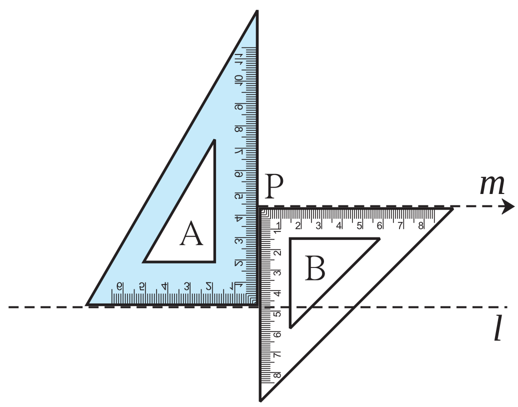
रीत I : रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेषा l काढा. (2) रेषा l च्या बाहेर बिंदू P घ्या.

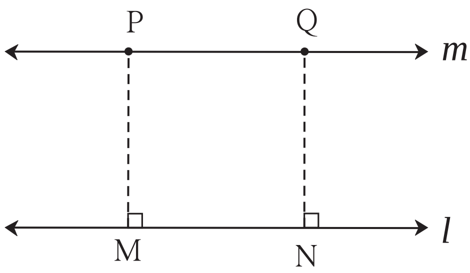
(3) आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन गुण्ये चिकटवून ठेवा. गुण्या A व B धरून ठेवा. गुण्या B ची कड बिंदू P वर आहे त्या कडेवर रेषा काढा.

(4) त्या रेषेला m नाव द्या.

(5) रेषा m ही रेषा l ला समांतर आहे.



रीत II : रचनेच्या पायऱ्या



(1) रेषा l काढा. त्या रेषेच्या बाहेर बिंदू P घ्या.

(2) बिंदू P मधून रेषा l वर रेख PM हा लंब काढा.

(3) रेषा l वर N हा एक वेगळा बिंदू घ्या.

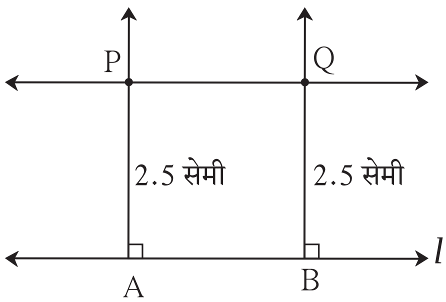
(4) बिंदू N मधून रेख NQ हा रेषा l ला लंब काढा.

NQ = MP घ्या.

(5) बिंदू P व Q मधून जाणारी रेषा m काढा. ही रेषा l ला समांतर आहे.

रचना (II) : दिलेल्या रेषेला दिलेल्या अंतरावर समांतर रेषा काढणे.

रीत : रेषा l ला 2.5 सेमी अंतरावर समांतर रेषा काढा.



रचनेच्या पायऱ्या :

(1) रेषा l काढा. (2) रेषा l वर A, B असे दोन बिंदू घ्या.

(3) बिंदू A व बिंदू B मधून रेषा l ला लंब रेषा काढा.

(4) त्या रेषांवर, बिंदू A आणि बिंदू B पासून 2.5 सेमी अंतरावर बिंदू P आणि बिंदू Q घ्या.

(5) रेषा PQ काढा. (6) रेषा PQ ही रेषा l ला 2.5 सेमी अंतरावर समांतर असलेली रेषा आहे.

सरावसंच 2.3

1. रेषा l काढा. त्या रेषेबाहेर बिंदू A घ्या. बिंदू A मधून जाणारी आणि रेषा l ला समांतर असणारी रेषा काढा.
2. रेषा l काढा. त्या रेषेबाहेर बिंदू T घ्या. बिंदू T मधून जाणारी आणि रेषा l ला समांतर असणारी रेषा काढा.
3. रेषा m आणि त्या रेषेला 4 सेमी अंतरावर समांतर असणारी रेषा n काढा.

उत्तरसूची

सरावसंच 2.1 **1.** (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

2. (1) $\angle c$ व $\angle e$, $\angle b$ व $\angle h$ (2) $\angle a$ व $\angle e$, $\angle b$ व $\angle f$, $\angle c$ व $\angle g$, $\angle d$ व $\angle h$
(3) $\angle c$ व $\angle h$, $\angle b$ व $\angle e$.

सरावसंच 2.2 **1.** (1) C (2) D **2.** $\angle x = 140°$, $\angle y = 110°$

3. $\angle a = 100°$, $\angle b = 80°$, $\angle c = 80°$

4. $\angle x = 105°$, $\angle y = 105°$, $\angle z = 75°$

5. $\angle x = 70°$