10 बहुपदींचा भागाकार

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत बैजिक राशींवर बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया कशा करायच्या हे आपण शिकलो आहोत.

खालील उदाहरणांत रिकाम्या जागा भरा.

(1) $2a + 3a = \square$ (2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$ (4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$ (6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$

जाणून घेऊया.

बहुपदीची ओळख (Introduction to polynomial)

एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल, तर ती राशी एका चलातील बहुपदी असते.

उदाहरणार्थ, $x^2 + 2x + 3$; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ या एका चलातील बहुपदी आहेत.

बहुपदी या विशिष्ट बैजिक राशीच असतात म्हणून बहुपदींवरील बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया बैजिक राशींप्रमाणे केल्या जातात.

उदाहरणार्थ, (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$

$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$

$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$

$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$

(2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$

$= -3x^2 + 11x - 13$

बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial)

पुढील उदाहरणात दिलेल्या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक चौकटीत लिहा.

उदा. (1) $3x^2 + 4x$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\boxed{2}$ आहे.

उदा. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\square$ आहे.

दिलेल्या बहुपदीतील चलाच्या सर्वांत मोठ्या घातांकास त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.

हे मला समजले.

- एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल तर ती राशी बहुपदी असते.
- बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक म्हणजे त्या बहुपदीची कोटी होय.

जाणून घेऊया.

(I) एकपदीला एकपदीने भागणे (To divide a monomial by a monomial)

उदा. (1) $15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करा.

उकल : भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे.

$\therefore$ $15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करण्यासाठी, $3p$ या एकपदीला कोणत्या एकपदीने गुणले असता गुणाकार $15p^3$ येतो, हा विचार करावा लागेल.

$3p \times 5p^2 = 15p^3$ $\therefore$ $15p^3 \div 3p = 5p^2$

या उदाहरणाची मांडणी शेजारी दाखवल्याप्रमाणे करता येते.

$$\begin{array}{r|l} & 5p^2 \\ \hline 3p) & 15p^3 \\ & \underline{-\,15p^3} \\ & 0 \end{array}$$

उदा. (2) भागाकार करा व चौकटींत योग्य ती पदे लिहा.

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$ (ii) $(5m^2) \div (-m)$ (iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ \hline -9x) & -36x^4 \\ & \underline{\boxed{}} \\ & \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ \hline -m) & 5m^2 \\ & \underline{\boxed{}} \\ & \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ \hline 2y^3) & -20y^5 \\ & \underline{\boxed{}} \\ & \boxed{} \end{array}$$

बहुपदीला एकपदीने भागणे (To divide a polynomial by a monomial)

खालील उदाहरणे अभ्यासा व बहुपदीला एकपदीने भागण्याची रीत समजून घ्या.

उदा. (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 4x \\ \hline 2x) & 6x^3 + 8x^2 \\ & \underline{-\,6x^3} \\ & 0 + 8x^2 \\ & \underline{-\,8x^2} \\ & 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ भागाकार $= 3x^2 + 4x$ व बाकी $= 0$

उदा. (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 & 15y^4 + 10y^3 - 3y^2 \\ & \underline{-15y^4} \\ & 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ & \underline{-10y^3} \\ & 0 - 3y^2 \\ & \underline{\mp 3y^2} \\ & 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

$\therefore$ भागाकार $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ व बाकी $= 0$

उदा. (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 4p - 2 \\ 3p^2 & 12p^3 - 6p^2 + 4p \\ & \underline{-12p^3} \\ & 0 - 6p^2 + 4p \\ & \underline{\mp 6p^2} \\ & 0 + 4p \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

$\therefore$ भागाकार $= 4p - 2$ व बाकी $= 4p$

उदा. (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 & 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{-5x^4} \\ & 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{\mp 3x^3} \\ & 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{-4x^2} \\ & 0 + 2x - 6 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$

(ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$

(iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

$\therefore$ भागाकार $= 5x^2 - 3x + 4$ व बाकी $= 2x - 6$

बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

वरील उदा. (3) मध्ये, बाकी $4p$ ची कोटी ही $3p^2$ या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे. तसेच उदा. (4) मध्ये $2x - 6$ ह्या बाकीची कोटी ही x^2 या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे हे लक्षात घ्या.

सरावसंच 10.1

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

(1) $21m^2 \div 7m$
(2) $40a^3 \div (-10a)$
(3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$
(4) $40m^5 \div 30m^3$
(5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$
(6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$
(7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$
(8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$
(9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$
(10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$

जाणून घेऊया.

बहुपदीला द्विपदीने भागणे (To divide a polynomial by a binomial)

बहुपदीला द्विपदीने भागण्याची रीत ही बहुपदीला एकपदीने भागण्याच्या रीतीप्रमाणेच असते.

उदा. (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

उकल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
\hline
x + 2 & x^2 + 4x + 4 \\
 & \underset{-}{x^2} \underset{-}{+} 2x \\
\hline
 & 0 + 2x + 4 \\
 & \underset{-}{+} 2x \underset{-}{+} 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण

(i) प्रथम भाज्यास व भाजकास घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावे.
भाजकाच्या पहिल्या पदास x ने गुणले की भाज्याचे पहिले पद मिळते.
$\therefore$ भाजकास x ने गुणावे

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ भागाकार $= x + 2$ व बाकी $= 0$

उदा. (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

उकल : येथे भाज्य बहुपदीची कोटी 4 आहे. तिच्यातील चलाचे घातांक उतरत्या क्रमाने नाहीत. तसेच घातांक 3 असलेले पदही नाही. ते $0y^3$ मानू आणि भाज्य बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहू व भागाकार करू.

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^3 - 4y^2 + 6y \\
\hline
y + 4 & y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{}y^4 \overset{+}{\underset{-}{}} 4y^3} \\
 & 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\mp 4y^3 \mp 16y^2} \\
 & 0 + 6y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{}{-} 6y^2 \pm 24y} \\
 & 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण –

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ भागाकार $= y^3 - 4y^2 + 6y$ व बाकी $= 0$

उदा. (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

उकल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 + 5x + 9 \\
\hline
x^2 - 1 & 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{-6x^4 \qquad \mp 6x^2} \\
 & 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\pm 5x^3 \qquad \mp 5x} \\
 & 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 & \underline{-9x^2 \qquad \mp 9} \\
 & 0 + 10x + 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण –

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ भागाकार $= 6x^2 + 5x + 9$ व बाकी $= 10x$

हे मला समजले.

- बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते, किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.
- भाज्य बहुपदीतील पदे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने नसतील तर ती बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहावी ती तशी लिहिताना एखाद्या घातांकाचे पद नसेल तर त्याचा सहगुणक 0 मानून घातांकांचा उतरता क्रम पूर्ण करावा.

सरावसंच 10.2

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$ (2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$ (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6★) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7★) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

उत्तरसूची

सरावसंच 10.1

1. $3m$, 0 2. $-4a^2$, 0 3. $\frac{16}{3}p^2$, 0 4. $\frac{4}{3}m^2$, 0

5. $5x - 3$, 0 6. $4p - 2$, 0 7. $y + 2$, 3 8. $3x$, $-14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, 0 10. $5m - 3$, $10m + 8$

सरावसंच 10.2

1. $y + 6$, 0 2. $p + 4$, -17 3. $4x^2 + 18x + 75$, 300

4. $m^2 + m + 1$, 10 5. $x^2 + x - 5$, $x - 2$

6. $a - 1$, $a^2 + a - 1$ 7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}$, $\frac{-13}{16}$

CKCN7I