7 चलन

जरा आठवूया.

एक डझन वह्यांची किंमत 240 रुपये असेल तर 3 वह्यांची किंमत किती ? 9 वह्यांची किंमत किती ? 24 वह्यांची किंमत किती ? 50 वह्यांची किंमत किती ? हे काढण्यासाठी खालील सारणी पूर्ण करा.

वह्यांची संख्या (x)	12	3	9	24	50	1
किंमत (रुपये) (y)	240					20

वरील सारणीवरून असे दिसते की प्रत्येक जोडीत वह्यांची संख्या (x) आणि त्यांची किंमत (y) यांचे गुणोत्तर $\frac{1}{20}$ आहे. ते स्थिर आहे. वह्यांची संख्या व त्यांची किंमत समप्रमाणात आहेत. अशा उदाहरणात दोनपैकी एक संख्या वाढली तर दुसरी त्याच प्रमाणात वाढते.

जाणून घेऊया.

समचलन (Direct variation)

x आणि y समप्रमाणात आहेत हेच विधान x आणि y समचलनात आहेत किंवा x आणि y यांच्यामधे समचलन आहे असे लिहिता येते. तसेच हे विधान चिन्हाचा वापर करून $x \propto y$ असे लिहिता येते.

[α(अल्फा) हे, चलन याअर्थी वापरले जाणारे ग्रीक अक्षर आहे.]

$x \propto y$ हे समीकरणाच्या रूपात $x = \text{k}y$ असे लिहितात; येथे k स्थिरपद आहे.

$x = \text{k}y$ किंवा $\frac{x}{y} = \text{k}$ ही मांडणी चलनाचे समीकरण आहे. k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

खालील विधाने चलनाचे चिन्ह वापरून कशी लिहिली आहेत, हे पाहा.

(i) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ त्याच्या त्रिज्येच्या वर्गाशी समप्रमाणात असते.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = A, त्रिज्या = r ही चले घेऊन वरील विधान $A \propto r^2$ असे लिहिता येते.

(ii) द्रवाचा दाब (p) हा त्या द्रवाच्या खोलीशी (d) समचलनात असतो, हे विधान $p \propto d$ असे लिहितात.

समचलनाच्या चिन्हांकित मांडणीतील सर्व संकल्पना समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) x हे y शी समचलनात आहे, $x = 5$ असताना $y = 30$, तर चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

उकल : x हे y शी समचलनात आहे, म्हणजेच $x \propto y$

$\therefore\ x = ky$ .... k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

$x = 5$ तेव्हा $y = 30$ हे दिले आहे.

$\therefore\ 5 = k \times 30\ \therefore\ k = \frac{1}{6}$ (चलनाचा स्थिरांक)

यावरून $x = ky$ म्हणजेच $x = \frac{y}{6}$ किंवा $y = 6x$ हे समीकरण मिळते.

उदा. (2) शेंगदाण्यांची किंमत त्यांच्या वजनाच्या समप्रमाणात आहे. 5 किग्रॅ शेंगदाण्यांची किंमत ₹ 450 असेल, तर 1 क्विंटल शेंगदाण्यांची किंमत काढा. (1 क्विंटल = 100 किग्रॅ)

उकल : शेंगदाण्यांची किंमत x आणि शेंगदाण्यांचे वजन y मानू.

x व y हे समचलनात आहे हे दिले आहे. म्हणजेच $x \propto y$ म्हणून $x = ky$

परंतु $x = 450$ असताना $y = 5$ हे दिले आहे, यावरून k काढू.

$x = ky$ $\quad\quad \therefore\ 450 = 5k$ $\quad\quad \therefore\ k = 90$ (चलनाचा स्थिरांक)

चलनाचे समीकरण $x = 90y$.

$\therefore\ y = 100$ असताना $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 क्विंटल शेंगदाण्यांची किंमत 9000 रुपये होईल.

सरावसंच 7.1

1. चलनाचे चिन्ह वापरून लिहा.

   (1) वर्तुळाचा परीघ (c) त्याच्या त्रिज्येशी (r) समप्रमाणात असतो.

   (2) मोटारमध्ये भरलेले पेट्रोल (l) व तिने कापलेले अंतर (d)समचलनात असतात.

2. सफरचंदांची किंमत व सफरचंदांची संख्या यांत समचलन आहे. यावरून खालील सारणी पूर्ण करा.

सफरचंदांची संख्या (x)	1	4	. . .	12	. . .
सफरचंदांची किंमत (y)	8	32	56	. . .	160

3. जर $m \propto n$ आणि $m = 154$ असताना $n = 7$, तर $n = 14$ असताना m ची किंमत काढा.

4. n हे m शी समचलनात आहे, तर पुढील सारणी पूर्ण करा.

m	3	5	6.5	. . .	1.25
n	12	20	. . .	28	. . .

5. y हे x च्या वर्गमुळाच्या समचलनात बदलते आणि जेव्हा $x = 16$ तेव्हा $y = 24$ तर, चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

6. सोयाबीनचे पीक काढण्यासाठी 4 मजुरांना ₹ 1000 मजुरी द्यावी लागते. जर मजुरीची रक्कम आणि मजुरांची संख्या समचलनात असतील तर 17 मजुरांना किती मजुरी द्यावी लागेल ?

जरा आठवूया.

कवायतीसाठी मुलांच्या रांगा केल्या. प्रत्येक रांगेतील मुलांची संख्या व रांगांची संख्या खालीलप्रमाणे आहे.

रांगेतील मुलांची संख्या	40	10	24	12	8
रांगाची संख्या	6	24	10	20	30

वरील सारणीवरून असे दिसते की, प्रत्येक जोडीत रांगेतील मुलांची संख्या व एकूण रांगांची संख्या यांचा गुणाकार 240 आहे. म्हणजेच हा गुणाकार स्थिर आहे प्रत्येक रांगेतील मुलांची संख्या आणि रांगांची संख्या या व्यस्तप्रमाणात आहेत.

जेव्हा दोन संख्यापैकी एक संख्या वाढली की दुसरी त्याच प्रमाणात कमी होते तेव्हा त्या दोन संख्या व्यस्त प्रमाणात असतात. उदाहणार्थ एक संख्या दुप्पट झाली की दुसरी निमपट होते.

जाणून घेऊया.

व्यस्त चलन (Inverse variation)

x आणि y या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत हेच विधान x आणि y व्यस्त चलनात आहेत, असे लिहितात. x आणि y व्यस्त चलनात असतील तर $x \times y$ हे स्थिरपद असते. त्याला k मानून उदाहरणे सोडवणे सोपे जाते.

x आणि y व्यस्त चलनात आहेत हे $x \propto \frac{1}{y}$ असे दर्शवतात.

$x \propto \frac{1}{y}$ म्हणजेच $x = \frac{k}{y}$ किंवा $x \times y = \mathrm{k}$ ही मांडणी चलनाचे समीकरण आहे. k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जर a हे b शी व्यस्त चलनात असेल तर खालील सारणी पूर्ण करा.

a	6	12	15	. . .
b	20	. . .	. . .	4
$a \times b$	120	120	. . .	. . .

उकल : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ म्हणजेच $a \times b = \mathrm{k}$

$a = 6$ तेव्हा $b = 20$ $\therefore \mathrm{k} = 6 \times 20 = 120$ (चलनाचा स्थिरांक)

(ii) $a = 12$ तेव्हा $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a = 15$ तेव्हा $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ तेव्हा $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

उदा. (2) $f \propto \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ तेव्हा $f = 18$

तर (i) $d = 10$ असताना f ची किंमत काढा. (ii) $f = 50$ असताना d काढा.

उकल : $f \propto \frac{1}{d^2}$ $\quad \therefore f \times d^2 = k$, $\quad d = 5$ तेव्हा $f = 18$ यावरून k काढू.

$18 \times 5^2 = k \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (चलनाचा स्थिरांक)

(i) $d = 10$ तर $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$, $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore 50 \times d^2 = 450$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore \quad d = 3$ किंवा $d = -3$

सरावसंच 7.2

1 . एक काम पूर्ण करण्यासाठी लावलेल्या मजुरांची संख्या आणि काम पूर्ण होण्यासाठी लागणारे दिवस यांची माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ती सारणी पूर्ण करा.

मजुरांची संख्या	30	20		10	
दिवस	6	9	12		36

2. प्रत्येक उदाहरणात चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

(1) $p \propto \frac{1}{q}$; $p = 15$ तेव्हा $q = 4$ $\qquad$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$; जेव्हा $z = 2.5$ तेव्हा $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$; जेव्हा $s = 4$ तेव्हा $t = 5$ $\qquad$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$; जेव्हा $x = 15$ तेव्हा $y = 9$

3. सफरचंदांच्या राशीतील सर्व सफरचंदे पेट्यांत भरायची आहेत.प्रत्येक पेटीत 24 सफरचंदे ठेवली तर ती भरण्यासाठी 27 पेट्या लागतात. जर प्रत्येक पेटीत 36 सफरचंदे ठेवली तर किती पेट्या लागतील ?

4. खालील विधाने चलनाचे चिन्ह वापरून लिहा.

(1) ध्वनीची तरंगलांबी (l) आणि वारंवारता (f) यांमध्ये व्यस्त चलन असते.

(2) दिव्याच्या प्रकाशाची तीव्रता (I) आणि दिवा व पडदा यांमधील अंतराचा (d) वर्ग यांमध्ये व्यस्त चलन असते.

5. $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ आणि $x = 40$ असताना $y = 16$, तर $x = 10$ तेव्हा y किती ?

6. x आणि y या राशींमध्ये व्यस्त चलन आहे. $x = 15$ तेव्हा $y = 10$ असते, $x = 20$ असताना $y =$ किती ?

जाणून घेऊया.

काळ, काम, वेग (Time, work, speed)

एखादे बांधकाम पूर्ण करण्यासाठी नेमलेल्या मजुरांची संख्या व त्यांना काम करण्यास लागलेला वेळ, यांच्याशी संबंधित उदाहरणे व्यस्त चलनाची असतात. तसेच व्यस्त चलनाची काही उदाहरणे वाहनांचा वेग व त्यांना ठरावीक अंतर कापण्यास लागणारा वेळ याच्याशी संबंधित असतात. अशा उदाहरणांना काळ-काम-वेग यांच्याशी संबंधित उदाहरणे म्हणतात.

चलनाच्या चिन्हाचा उपयोग करून या प्रकारची उदाहरणे कशी सोडवतात ते पाहू.

उदा. (1) एका शेतातील शेंगा काढण्याचे काम 15 स्त्रिया 8 दिवसांत पूर्ण करतात. तेच काम 6 दिवसांत पूर्ण करायचे असल्यास किती स्त्रिया कामावर असाव्या ?

उकल : काम पूर्ण होण्यास लागणारे दिवस आणि काम करणाऱ्या स्त्रियांची संख्या यांत व्यस्त चलन असते. दिवसांची संख्या d आणि स्त्रियांची संख्या n मानू.

$d \propto \frac{1}{n}$ $\quad\therefore d \times n = \text{k}$ (k हा स्थिरांक)

जेव्हा $n = 15$, तेव्हा $d = 8$ $\quad\therefore \text{k} = d \times n = 15 \times 8 = 120$ (चलनाचा स्थिरांक)

आता $d = 6$ असताना n किती हे काढू.

$d \times n = 120$

$\therefore d \times n = 120$ $\quad\therefore 6 \times n = 120,$ $\quad\therefore n = 20$

$\therefore$ काम 6 दिवसांत पूर्ण करण्यासाठी 20 स्त्रिया कामावर असाव्या.

उदा. (2) एका वाहनाचा सरासरी वेग ताशी 48 किमी असताना काही अंतर जाण्यासाठी 6 तास लागतात, तर वेग ताशी 72 किमी असताना तेवढेच अंतर जाण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

उकल : वाहनाचा वेग s मानू ; लागणारा वेळ t मानू. वेग व वेळ यांत व्यस्त चलन आहे.

$s \propto \frac{1}{t}$ $\therefore s \times t = k$ (k हा स्थिरांक)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ (चलनाचा स्थिरांक) आता $s = 72$ असेल तर t काढू.

$s \times t = 288$ $\therefore 72 \times t = 288$ $\therefore t = \frac{288}{72} = 4$

$\therefore$ वेग ताशी 72 किमी असताना तेवढेच अंतर जाण्यासाठी 4 तास लगतील.

सरावसंच 7.3

1. खालीलपैकी कोणती उदाहरणे व्यस्त चलनाची आहेत ?

   (1) मजुरांची संख्या व त्यांना काम पूर्ण करण्यासाठी लागणारा वेळ.

   (2) हौद भरण्यासाठी असलेल्या एकसारख्या नळांची संख्या व हौद भरण्यासाठी लागणारा वेळ.

   (3) वाहनात भरलेले पेट्रोल व त्याची किंमत

   (4) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ व त्या वर्तुळाची त्रिज्या

2. जर 15 मजुरांना एक भिंत बांधण्यास 48 तास लागतात, तर 30 तासांत ते काम पूर्ण करण्यासाठी किती मजूर लागतील ?

3. पिशवीत दूध भरण्याच्या यंत्राद्वारे 3 मिनिटांत अर्ध्या लीटरच्या 120 पिशव्या भरल्या जातात, तर 1800 पिशव्या भरण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

4. एका कारचा सरासरी वेग 60 किमी/तास असताना काही अंतर जाण्यास 8 तास लागतात, जर तेच अंतर साडेसात तासांत कापावयाचे असेल कारचा सरासरी वेग किती वाढवावा ?

उत्तरसूची

सरावसंच 7.1 1. (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ 2. x अनुक्रमे 7 व 20, $y = 96$ 3. 308
4. $m = 7$, n अनुक्रमे 26 व 5 5. $k = 6$, $y = 6\sqrt{x}$ 6. ₹ 4250

सरावसंच 7.2 1. मजुरांची संख्या अनुक्रमे 15 व 5, दिवस = 18 2. (1) $k = 60$, $pq = 60$
(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$
3. 18 पेट्या 4. (1) $l \propto \frac{1}{f}$ (2) $I \propto \frac{1}{d^2}$ 5. $y = 256$ 6. $y = 7.5$

सरावसंच 7.3 1. व्यस्त चलन (1), (2) 2. 24 मजूर 3. 45 मिनिटे
4. 4 किमी/तास

CBU5A3