



8. विभाज्य आणि विभाजक

विभाग दुसरा

- दादा : माझ्याकडे 12 पेढे आहेत. किती-कितीच्या गटांत पेढे वाटले, तर एकही पेढा शिल्लक राहणार नाही?
- संजू : वाटायचे म्हणजे भागायचे. एकही पेढा शिल्लक राहणार नाही, म्हणजे बाकी 0 राहिल.
- अंजू : 2 च्या पाढ्यात 12 येतात, म्हणजे पेढ्यांचे दोन-दोनचे गट करता येतील.
- मंजू : 3 च्या पटीत 12 येतात, म्हणजे तीन-तीनचे गट करता येतील.
- सागर : चार-चारचे पण गट करता येतील.
- अनिता : पाच-पाचचे गट करता येतील का ?
- मंजू : नाही, कारण 5 च्या पाढ्यात 12 येत नाहीत.
- अंजू : सहानं बाराला भाग जातो, म्हणून सहा-सहाचे देखील गट करता येतील.
- मंजू : 7, 8, 9, 10, 11 चे गट करता येणार नाहीत, कारण या संख्यांच्या पाढ्यांत 12 येत नाहीत.
- संजू : 12 चा 1 गट करून देखील एकाला देता येईल. एक-एक पेढा 12 जणांना देखील वाटता येईल.
- दादा : छान विचार केला तुम्ही. 1, 2, 3, 4, 6, 12 या सर्व संख्यांनी 12 ला निःशेष भाग जातो, म्हणजे बाकी शून्य उरते; म्हणून या सर्वांना 12 चे **विभाजक** किंवा **अवयव** म्हणतात. याचप्रमाणे 1, 2, 4, 8, 16 हे 16 चे विभाजक आहेत.

उदाहरणसंग्रह 32

खालील संख्यांचे विभाजक लिहा.

- (1) 8 (2) 5 (3) 14 (4) 10 (5) 7 (6) 22 (7) 25 (8) 32 (9) 33

□ विभाज्य

- दादा : भाजक व भाज्य म्हणजे काय हे तुम्हांला माहीत आहे, पण विभाज्य म्हणजे काय हे माहीत आहे का ?
- अंजू : विभाज्य म्हणजे काय, हे माहीत नाही; पण भाज्याशी त्याचा संबंध असावा असं मला वाटतं.
- दादा : उदाहरणाद्वारे मी समजावून सांगतो. $20 \div 5$ हा भागाकार तुम्हांला येतो ना ?
- अंजू : हो. 20 या भाज्यास 5 या भाजकानं भागल्यास भागाकार 4 येतो व बाकी शून्य उरते.
- दादा : जेव्हा भाजकानं भाज्याला भागल्यावर बाकी शून्य उरते, तेव्हा त्या भाज्यालाच **विभाज्य** म्हणतात, म्हणजे या ठिकाणी 20 ही संख्या 5 नं विभाज्य आहे. आता $21 \div 5$ हा भागाकार बघा. 21 ला 5 नं भागल्यावर बाकी 1 उरते, म्हणजे 21 ही संख्या 5 नं विभाज्य नाही. वेगळ्या शब्दांत, जेव्हा भागाकारात बाकी शून्य उरते, तेव्हा भाजकाला विभाजक आणि भाज्याला विभाज्य म्हणतात.
- आता सांगा. 84 खडू आहेत, त्यांचे सहा-सहाचे गट होतील का ?
- सूरज : मी 6 नं भागून बघतो. 84 ला 6 नं निःशेष भाग जातो व भागाकार 14 येतो, म्हणजेच सहा-सहाचे 14 गट तयार होतील. येथे 84 हा विभाज्य आणि 6 हा विभाजक आहे.

दादा : खडूंची संख्या 6, 12, 18, 36, 84 अशी असेल, तर 6-6 चे गट करून ते खडू संपतील, म्हणजेच 6, 12, 18, 36, 84 या संख्या 6 नं विभाज्य आहेत किंवा त्या संख्यांना 6 नं निःशेष भाग जातो. खडूंची संख्या 6 नं विभाज्य आहे का, हे पाहण्यासाठी खडूंच्या संख्येला 6 नं भागून पाहावं. बाकी 0 असेल तर ती संख्या 6 नं विभाज्य असते. 3 च्या पाठ्यात येणाऱ्या प्रत्येक संख्येला 3 नं निःशेष भाग जातो किंवा त्या संख्या 3 नं विभाज्य असतात. तसंच 7 च्या पाठ्यातील संख्या 7 नं विभाज्य असतात. 9 च्या पाठ्यातील संख्या 9 नं विभाज्य असतात.

विभाज्यता ही संकल्पना आपण व्यवहारातही वापरतो. मी काही प्रश्न विचारतो. त्यावरून तुमच्या हे लक्षात येईल.

माझ्याजवळ 200 मिलिलीटरचं माप आहे. त्याच्या साहाय्यानं मला 1 लीटर दूध मोजता येईल का?

सूरज : 1 लीटर म्हणजे 1000 मिली. $1000 = 200 \times 5$ म्हणजे 1000 ही संख्या 200 नं विभाज्य आहे, म्हणून 200 मिलिलीटरच्या मापानं 1 लीटर दूध मोजता येईल. 200 मिलीची 5 मापं म्हणजे 1 लिटर होय.

दादा : 200 मिलीच्या मापाने दीड लीटर दूध मोजता येईल का ?

अंजू : दीड लीटर म्हणजे 1500 मिली. 1500 ही संख्या 200 च्या पटीत नाही, म्हणजे 1500 ही संख्या 200 नं विभाज्य नाही, म्हणून 200 मिलीच्या मापानं दीड लीटर दूध मोजता येणार नाही.

दादा : माझ्याकडे 400 ग्रॅम चणे आहेत. मला 60-60 ग्रॅमच्या चण्याच्या पुड्या करायच्या आहेत. त्या करता येतील का ?

अंजू : नाही. कारण 400 ही संख्या 60 नं विभाज्य नाही.

दादा : आणखी कमीत कमी किती चणे आणले म्हणजे 60 ग्रॅमची एक पुडी याप्रमाणे पुड्या करता येतील ?

अंजू : 400 नंतर लगेच येणारी, 60 नं विभाज्य संख्या शोधावी लागेल. $60 \times 6 = 360$, $60 \times 7 = 420$ म्हणून आणखी 20 ग्रॅम चणे आणावे लागतील.

□ विभाज्यतेच्या कसोट्या

2 च्या पाठ्याचे निरीक्षण करून एककस्थानी कोणकोणते अंक येतात ते बघा. तसेच 52, 74, 80, 96, 98 या संख्यांना 2 ने निःशेष भाग जातो हे प्रत्यक्ष भागाकार करून पाहा. यावरून एखादी संख्या 2 ने विभाज्य आहे की नाही हे ठरवण्याचा कोणता नियम मिळतो ?

आता 5 च्या आणि 10 च्या पाठ्यांचे निरीक्षण करा.

5 चा आणि 10 चा विभाज्यतेचा कोणता नियम दिसतो, ते शोधा.

2 ने विभाज्यतेची कसोटी :	संख्येच्या एककस्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी कोणताही अंक असेल, तर ती संख्या 2 ने विभाज्य असते, म्हणजेच त्या संख्येला 2 ने भाग जातो.
5 ने विभाज्यतेची कसोटी :	संख्येच्या एककस्थानी 0, 5 यांपैकी कोणताही अंक असेल, तर ती संख्या 5 ने विभाज्य असते.
10 ने विभाज्यतेची कसोटी :	संख्येच्या एककस्थानी 0 असेल, तर ती संख्या 10 ने विभाज्य असते.

- (1) 2 ने विभाज्य असणाऱ्या तीन अंकी पाच संख्या लिहा.
(2) 5 ने विभाज्य असणाऱ्या तीन अंकी पाच संख्या लिहा.
(3) 10 ने विभाज्य असणाऱ्या तीन अंकी पाच संख्या लिहा.
- 2 आणि 3 या दोन्ही संख्यांनी विभाज्य असणाऱ्या पाच संख्या लिहा.
- 3 मीटर लांबीची एक रिबन आहे. तिचे असे तुकडे करता येतील का, की प्रत्येक तुकडा 50 सेमी लांबीचा असेल ? कारण लिहा.
- 3 मीटर लांबीची एक रिबन आहे. रिबनचे 40 सेमी लांबीचे 8 तुकडे हवे आहेत, तर त्यासाठी किती लांबीची रिबन कमी पडेल ?
- खालील सारणीत दिलेल्या संख्येला दिलेल्या भाजकाने निःशेष भाग जात असल्यास '✓' अशी खूण करा व भाग जात नसल्यास '×' अशी खूण करा.

भाजक संख्या	2	5	10
15	×	✓	×
30			
34			
46			

भाजक संख्या	2	5	10
55			
63			
70			
84			

□ मूळ संख्या, संयुक्त संख्या

खालील तक्त्यांत काही संख्या दिल्या आहेत. त्या संख्यांचे सर्व विभाजक लिहा.

संख्या	विभाजक
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	
6	

संख्या	विभाजक
11	
12	
16	
19	
25	

दादा : तक्त्यावरून काय लक्षात येते ?

अजय : प्रत्येक संख्येचा 1 हा विभाजक आहे. काही संख्यांचे 1 व स्वतः ती संख्या असे दोनच विभाजक आहेत. जसे 3 चे विभाजक फक्त 1 व 3 हेच आहेत. त्याचप्रमाणे 2 चे विभाजक 1 व 2 आणि 19 चे विभाजक 1 व 19 हेच आहेत. काही संख्यांचे विभाजक दोनपेक्षा जास्त आहेत.

दादा : 2, 3, 19 अशा फक्त दोनच विभाजक असणाऱ्या संख्यांना मूळ संख्या म्हणतात.

ज्या संख्येचे 1 व ती संख्या असे दोनच विभाजक असतात, ती मूळ संख्या असते.

अजय : 4, 6, 16 अशा संख्यांना दोनपेक्षा अधिक विभाजक असतात, त्या संख्यांना काय म्हणायचं ?

दादा : 4, 6, 16 अशा संख्यांना संयुक्त संख्या म्हणतात.

ज्या संख्येचे दोनपेक्षा जास्त विभाजक असतात, ती संयुक्त संख्या असते.

दादा : 1 ही संख्या संयुक्त आहे, की मूळ संख्या आहे, हे विचार करून सांगा.

अजय : 1 या संख्येला 1 हा एकच विभाजक आहे, म्हणून मला तसं सांगता येत नाही.

दादा : बरोबर. 1 ही संख्या मूळ संख्या मानत नाहीत आणि संयुक्त संख्याही मानत नाहीत.

1 ही संख्या संयुक्तही नाही आणि मूळही नाही.

उदाहरणसंग्रह 34

1. 1 पासून 20 पर्यंतच्या संख्यांपैकी सर्व मूळ संख्या लिहा.

2. 21 ते 50 या संख्यांपैकी सर्व संयुक्त संख्या लिहा.

3. खालील संख्यांपैकी मूळ संख्येभोवती ○ अशी खूण करा.

22, 37, 43, 48, 53, 60, 91, 57, 59, 77, 79, 97, 100

4. मूळ संख्यांपैकी समसंख्या कोणत्या ?

□ सहमूळ संख्या

दादा : 12 व 18 या संख्यांचे सगळे विभाजक सांगा.

अंजू : मी 12 चे विभाजक सांगते : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

मंजू : मी 18 चे विभाजक सांगते : 1, 2, 3, 6, 9, 18.

दादा : आता 12 व 18 या दोन संख्यांचे सामाईक विभाजक शोधा.

अंजू : सामाईक म्हणजे काय ?

दादा : 1, 2, 3, 6 हे विभाजक दोन्ही गटांत आहेत, म्हणजे 1, 2, 3, 6 हे 12 व 18 यांचे सामाईक विभाजक आहेत. आता 10 आणि 21 यांचे विभाजक सांगा.

संजू : 10 चे विभाजक : 1, 2, 5, 10

मंजू : 21 चे विभाजक : 1, 3, 7, 21

दादा : विभाजकांच्या या दोन गटांत कोणते विभाजक सामाईक आहेत ?

संजू : फक्त 1 हा एकच विभाजक सामाईक आहे.

दादा : फक्त 1 हा एकच विभाजक सामाईक असणाऱ्या दोन संख्यांना **सहमूळ संख्या** म्हणतात, म्हणून 10 व 21 या सहमूळ संख्या आहेत. 12 व 18 यांचे सामाईक विभाजक 1, 2, 3, 6; म्हणजे एकापेक्षा जास्त आहेत. म्हणून 12 व 18 या सहमूळ संख्या नाहीत.

आता 8 आणि 10 या संख्या सहमूळ आहेत का ते बघा बरं.

मंजू : 8 चे विभाजक 1, 2, 4, 8 आणि 10 चे विभाजक 1, 2, 5, 10 या दोन संख्यांचे 1 आणि 2 हे दोन विभाजक सामाईक आहेत, म्हणून 8 आणि 10 या सहमूळ संख्या नाहीत.

खालील जोड्यांमधील संख्या सहमूळ संख्या आहेत का हे ठरवा.

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| (1) 22, 24 | (2) 14, 21 | (3) 10, 33 | (4) 11, 30 |
| (5) 5, 7 | (6) 15, 16 | (7) 50, 52 | (8) 17, 18 |

- उपक्रम 1 :**
- 1 पासून 60 पर्यंतच्या संख्या लिहा.
 - 2 ने विभाज्य असणाऱ्या संख्यांभोवती निळ्या रंगाचे वर्तुळ काढा.
 - 4 ने विभाज्य असणाऱ्या संख्यांभोवती लाल रंगाचे वर्तुळ काढा.
 - ज्या संख्यांभोवती निळ्या रंगाचे वर्तुळ आहे, त्या सर्व संख्यांभोवती लाल रंगाचे वर्तुळसुद्धा आहे का, ते पाहा.
 - ज्या संख्यांभोवती लाल रंगाचे वर्तुळ आहे, त्या सर्व संख्यांभोवती निळ्या रंगाचे वर्तुळसुद्धा आहे का, ते पाहा.
 - 2 ने विभाज्य असणाऱ्या सर्व संख्या 4 ने सुद्धा विभाज्य आहेत का, ते पाहा.
 - 4 ने विभाज्य असणाऱ्या सर्व संख्या 2 ने सुद्धा विभाज्य आहेत का, ते पाहा.

- उपक्रम 2 :**
- 1 ते 60 पर्यंतच्या संख्या लिहा.
 - त्यांपैकी 2 ने विभाज्य संख्यांभोवती त्रिकोण काढा.
 - 3 ने विभाज्य असणाऱ्या संख्यांभोवती वर्तुळ काढा.
 - आता 6 ने विभाज्य असलेल्या संख्या शोधा. निरीक्षण करा. त्यावरून एखादा गुणधर्म लक्षात येतो का, हे सांगा.

□ मूळ संख्या शोधण्याची इराटोस्थेनिसची पद्धत

इराटोस्थेनिस हा गणिती इसवीसनापूर्वी सुमारे 250 वर्षे या काळात ग्रीसमध्ये होऊन गेला. त्याने मूळ संख्या शोधण्याची एक पद्धत शोधून काढली. तिला **इराटोस्थेनिसची चाळणी** म्हणतात. या पद्धतीने 1 पासून 100 पर्यंतच्या मूळ संख्या कशा शोधतात ते पाहू.

- 1 ही संयुक्त संख्या नाही किंवा मूळ संख्याही नाही. तिच्याभोवती □ अशी खूण करा.
- 2 ही मूळ संख्या आहे, म्हणून तिच्याभोवती वर्तुळ काढा.

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- नंतर 2 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेषा मारून बाद करा. येथे 100 पैकी जवळ जवळ निम्म्या संख्या मूळ संख्या असणार नाहीत. हे लक्षात येते.

- 2 नंतर येणारी व बाद न झालेली 3 ही पहिली संख्या आहे. ती मूळ संख्या आहे.
- 3 भोवती वर्तुळ काढा. 3 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा.
- 3 नंतरची बाद न झालेली 5 ही पहिली संख्या आहे. ती मूळ संख्या आहे.
- 5 भोवती वर्तुळ काढा. 5 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा.
- 5 नंतर बाद न झालेली 7 ही पहिली संख्या आहे. ती मूळ संख्या आहे.
- 7 भोवती वर्तुळ काढा. 7 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा.

याप्रमाणे करत गेल्यास 1 ते 100 पैकी प्रत्येक संख्येभोवती वर्तुळ तरी असेल किंवा ती बाद झाली असेल. ज्या संख्यांभोवती वर्तुळे काढली आहेत, त्या सर्व संख्या मूळ संख्या आहेत. बाद झालेल्या सर्व संख्या संयुक्त संख्या आहेत.

□ मूळ संख्या शोधण्याची आणखी एक रीत

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

- सोबतच्या तक्त्यात 1 ते 36 या संख्या सहा स्तंभांत कशा लिहिल्या आहेत, हे पाहा. याचप्रमाणे 102 पर्यंतच्या संख्या याच सहा स्तंभांत लिहा.
- आता 2, 3, 4 व 6 यांच्या स्तंभांतील 2 व 3 या मूळ संख्या वगळता, उरलेल्या सर्व संख्या संयुक्त आहेत हे पाहा, म्हणजे उरलेल्या सर्व मूळ संख्या 1 व 5 यांच्या स्तंभातच असणार. त्या शोधणे आता सोपे झाले ना ? त्या संख्या शोधा.

अधिक माहितीसाठी

- ज्या मूळ संख्यांमध्ये 2 चा फरक असतो, त्या संख्यांना जुळ्या मूळ संख्या म्हणतात. 3 व 5, 5 व 7, 29 व 31, 71 व 73 या जुळ्या मूळ संख्यांच्या काही जोड्या आहेत. 5347421 आणि 5347423 ही देखील जुळ्या मूळ संख्यांची एक जोडी आहे.
- 1 पासून 100 पर्यंतच्या संख्यांमध्ये जुळ्या मूळ संख्यांच्या आठ जोड्या आहेत. हे पडताळून पाहा.
- युक्लिड हा गणिती, इसवीसनापूर्वी सुमारे 300 वर्षे या काळात ग्रीसमध्ये होऊन गेला. त्याने असे सिद्ध केले, की 2, 3, 5, 7,....., अशा क्रमाने मूळ संख्या लिहीत गेल्यास त्यांची यादी कधीच संपणार नाही, म्हणजेच मूळ संख्या अनंत आहेत.

