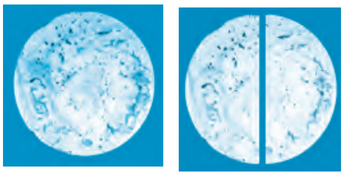
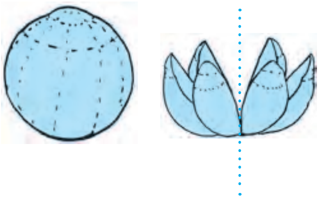
5. अपूर्णांक

❒ सममूल्य अपूर्णांक



✦ एक भाकरी दोन जणांत समान वाटली, तर प्रत्येकाला **अर्धी** भाकरी मिळेल. अर्धा हा अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ असा दाखवतात. येथे 1 हा अंश व 2 हा छेद आहे.

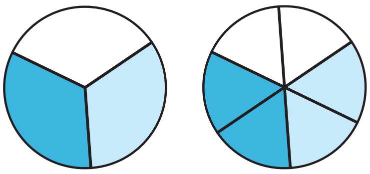
✦ एका भाकरीचे 4 समान भाग केले. त्यांपैकी 2 भाग एकाला दिले. हे $\frac{2}{4}$ असे दाखवतात. यात 2 हा अंश व 4 हा छेद आहे. याचा अर्थही **अर्धी** भाकरी दिली, असाच आहे ना ?



✦ एका खरबुजाचे 6 समान भाग केले. ते 2 जणांत समान वाटले, म्हणजे प्रत्येकाला मिळालेला भाग $\frac{3}{6}$ आहे. येथे प्रत्येकाला खरबुजाचा **अर्धाच** भाग मिळाला आहे, म्हणजे $\frac{3}{6}$ हे चिन्हसुद्धा अर्धा हाच अपूर्णांक दर्शवते.

वरील तीन उदाहरणांमध्ये, 'अर्धा' हाच अपूर्णांक अनुक्रमे $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ या चिन्हांनी दाखवला आहे; म्हणजे $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ या तीनही अपूर्णांकांची किंमत समान आहे. हेच '$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$' असे लिहितात.

अशा समान किंमत असलेल्या अपूर्णांकांना **सममूल्य अपूर्णांक** म्हणतात.

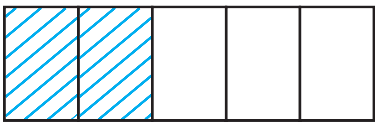


✦ येथे दोन समान वर्तुळांमधील रंगवलेल्या भागांचे निरीक्षण करा. एका वर्तुळाचे 3 समान भाग करून त्यांपैकी 2 भाग रंगवले आहेत, म्हणजे रंगवलेला भाग पूर्ण वर्तुळाच्या $\frac{2}{3}$ आहे.

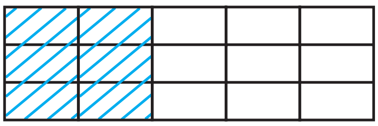
त्याच आकाराच्या दुसऱ्या वर्तुळाचे 6 समान भाग करून त्यांपैकी 4 भाग रंगवलेले आहेत, म्हणजे पूर्ण वर्तुळाचा $\frac{4}{6}$ भाग रंगवला आहे; परंतु रंगवलेले दोन्ही भाग समान आहेत. यावरून $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

म्हणजे $\frac{2}{3}$ व $\frac{4}{6}$ हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत.

❒ सममूल्य अपूर्णांक तयार करणे



✦ आकृतीच्या 5 समान भागांपैकी 2 भाग रंगवले आहेत. रंगवलेला भाग पूर्ण आकृतीच्या $\frac{2}{5}$ आहे.



त्याच आकृतीत दोन आडव्या रेघा काढल्यामुळे या आकृतीचे 15 समान भाग झालेले दिसतात. त्यामुळे आता रंगवलेला भाग दर्शवणारा अपूर्णांक $\frac{6}{15}$ असा आहे.

परंतु रंगवलेला भाग बदललेला नाही, म्हणून येथे $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

शिक्षिका : $\frac{2}{5}$ आणि $\frac{6}{15}$ या अपूर्णांकांच्या अंशांमध्ये आणि छेदांमध्ये काही विशेष संबंध दिसतो का ?

सोनू : 2 ची तिप्पट 6 व 5 ची तिप्पट 15 आहे.

शिक्षिका : आपण हेही पाहिलं आहे, की $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ आणि $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. म्हणजे सममूल्य अपूर्णांकांपैकी एकाचे अंश व छेद, दुसऱ्याच्या अंश व छेदाच्या समान पट आहेत.
यावरून लक्षात घ्या.

> अपूर्णांकातील अंशाला व छेदाला, एकाच शून्येतर संख्येने गुणले तर त्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असलेला अपूर्णांक मिळतो.

नंदू : अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला समान संख्येनं भागून सममूल्य अपूर्णांक मिळवता येईल का ?

शिक्षिका : जरूर. अंश व छेद या दोघांना एकाच संख्येनं भाग जात असेल, तर त्या संख्येनं अंश व छेद या दोघांना भागून मिळालेला अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतो. $\frac{6}{15}$ या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला 3 नं भाग जातो. तसा भाग दिला, तर $\frac{2}{5}$ हा अपूर्णांक मिळतो,
म्हणजे $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

> अपूर्णांकातील अंश व छेद या दोघांनाही एकाच संख्येने भाग जात असेल, तर भाग दिल्यावर मिळणारा अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतो.

शिक्षिका : आता $\frac{6}{12}$ या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच संख्येनं भागून सममूल्य अपूर्णांक मिळवा.

सोनूने मिळवलेला अपूर्णांक $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 2}{12 \div 2} = \frac{3}{6}$	मिनूने मिळवलेला अपूर्णांक $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 3}{12 \div 3} = \frac{2}{4}$

नंदू : 6 व 12 या संख्यांना 6 नं सुद्धा भाग जातो. 6 नं भागलं तर चालेल का ?

शिक्षिका : हो. $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$.

लक्षात घ्या, की $\frac{6}{12}$ या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला 2 नं भागून, 3 नं भागून, 6 नं भागून मिळालेले अपूर्णांक $\frac{6}{12}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य आहेत, म्हणजेच $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

उदा. (1) $\frac{5}{6}$ या अपूर्णांकाचा छेद 30 होईल असा सममूल्य अपूर्णांक लिहा.

$\frac{5}{6} = \frac{\square}{30}$. येथे चौकटीतील संख्या शोधू.

येथे छेदस्थानच्या 6 ची 5 पट 30, म्हणून अंशस्थानच्या 5 ची 5 पट करू.

$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{\boxed{25}}{30}$. यावरून छेद 30 असलेला, $\frac{25}{30}$ हा अपूर्णांक $\frac{5}{6}$ शी सममूल्य आहे.

उदा. (2) $\frac{15}{40}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य असणारा व छेद 8 असलेला अपूर्णांक मिळवा.

$\frac{15}{40} = \frac{\square}{8}$ येथे चौकटीतील संख्या काढू.

40 ला 5 ने भागले की 8 मिळतात. 15 ला 5 ने भागले की चौकटीतील संख्या मिळेल. 15 ÷ 5 = 3

म्हणून $\frac{15}{40} = \frac{\boxed{3}}{8}$

म्हणजे $\frac{3}{8}$ हा अपूर्णांक $\frac{15}{40}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य आहे.

उदाहरणसंग्रह 17

1. चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

(1) $\frac{1}{2} = \frac{\square}{20}$ (2) $\frac{3}{4} = \frac{15}{\square}$ (3) $\frac{9}{11} = \frac{18}{\square}$ (4) $\frac{10}{40} = \frac{\square}{8}$

(5) $\frac{14}{26} = \frac{\square}{13}$ (6) $\frac{\square}{3} = \frac{4}{6}$ (7) $\frac{1}{\square} = \frac{4}{20}$ (8) $\frac{\square}{5} = \frac{10}{25}$

2. पुढीलपैकी प्रत्येक अपूर्णांकाशी सममूल्य असलेला आणि छेद 18 असणारा अपूर्णांक मिळवा.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{3}$

3. पुढीलपैकी प्रत्येक अपूर्णांकाशी सममूल्य असलेला आणि छेद 5 असणारा अपूर्णांक मिळवा.

$\frac{6}{15}, \frac{10}{25}, \frac{12}{30}, \frac{6}{10}, \frac{21}{35}$

4. खाली दिलेल्या अपूर्णांकांमधून सममूल्य अपूर्णांकांच्या जोड्या शोधा.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{5}{11}, \frac{7}{9}, \frac{14}{18}, \frac{15}{33}, \frac{18}{27}, \frac{10}{14}$

5. खालील अपूर्णांकांशी सममूल्य असे प्रत्येकी दोन सममूल्य अपूर्णांक तयार करा.

$\frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{3}{11}$

❒ समच्छेद व भिन्नछेद अपूर्णांक

ज्या अपूर्णांकांचे छेद समान असतात त्या अपूर्णांकांना 'समच्छेद अपूर्णांक' म्हणतात. जसे, $\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$.

ज्या अपूर्णांकांचे छेद भिन्न असतात, त्या अपूर्णांकांना 'भिन्नछेद अपूर्णांक' म्हणतात. जसे, $\frac{1}{3}, \frac{4}{8}, \frac{9}{11}$

❒ भिन्नछेद अपूर्णांकांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करणे

उदा. (1) $\frac{5}{6}, \frac{7}{9}$ या अपूर्णांकांचे छेद समान करा, म्हणजे त्यांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

येथे 6 व 9 या दोन्ही संख्यांच्या पटीतील संख्या शोधायला हवी.

6 च्या पटीतील संख्या : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

9 च्या पटीतील संख्या : 9, 18, 27, 36, 45, ...

येथे 18 ही संख्या दोन्ही संख्यांच्या पटीतील संख्या आहे, म्हणून अपूर्णांकांचा छेद 18 करू.

$\frac{5}{6} = \frac{5\times3}{6\times3} = \frac{15}{18}$ $\qquad$ $\frac{7}{9} = \frac{7\times2}{9\times2} = \frac{14}{18}$

$\frac{15}{18}$ व $\frac{14}{18}$ हे अनुक्रमे $\frac{5}{6}$ व $\frac{7}{9}$ या अपूर्णांकाचे समान छेद असलेले (समच्छेद) अपूर्णांक तयार झाले.

येथे 18 ही संख्या दोन्ही संख्यांच्या पटीतील संख्या आहे; पण 18 प्रमाणे 36, 54 या संख्यादेखील समान छेद म्हणून घेता येतील.

उदा. (2) $\frac{4}{8}$ व $\frac{5}{16}$ यांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

येथे 8 ची दुप्पट 16 आहे, दोघांचे छेद 16 करणे सोपे आहे.

$\frac{4}{8} = \frac{4\times2}{8\times2} = \frac{8}{16}$. $\frac{8}{16}$ व $\frac{5}{16}$ हे समच्छेद अपूर्णांक तयार झाले.

उदा. (3) $\frac{4}{7}$ व $\frac{3}{4}$ यांचे छेद समान करा.

7 व 4 या दोन्ही छेदांच्या पटीत येणारी संख्या 28 आहे, म्हणून दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद 28 करू.

$\frac{4}{7} = \frac{4\times4}{7\times4} = \frac{16}{28}$, $\frac{3}{4} = \frac{3\times7}{4\times7} = \frac{21}{28}$, म्हणून $\frac{16}{28}$ व $\frac{21}{28}$ हे दिलेल्या अपूर्णांकांचे समच्छेद अपूर्णांक तयार झाले.

उदाहरणसंग्रह 18

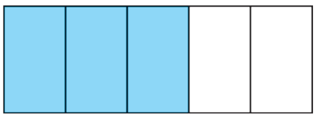
दिलेल्या अपूर्णांकांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

(1) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ $\quad$ (2) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}$ $\quad$ (3) $\frac{4}{5}, \frac{3}{10}$ $\quad$ (4) $\frac{2}{9}, \frac{1}{6}$

(5) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ $\quad$ (6) $\frac{5}{6}, \frac{4}{5}$ $\quad$ (7) $\frac{3}{8}, \frac{1}{6}$ $\quad$ (8) $\frac{1}{6}, \frac{4}{9}$

❑ समच्छेद अपूर्णांक : लहान-मोठेपणा (तुलना)

उदा. (1)



एका पट्टीचे 5 समान भाग केले, म्हणजे प्रत्येक भाग $\frac{1}{5}$ आहे.

रंगवलेला भाग $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

न रंगवलेला भाग $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. रंगवलेला भाग हा न रंगवलेल्या भागापेक्षा मोठा आहे. यावरून $\frac{3}{5}$ हा अपूर्णांक $\frac{2}{5}$ या अपूर्णांकापेक्षा मोठा आहे. हे $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ असे लिहितात.

उदा. (2) या आकृतीत एका पट्टीचे 8 समान भाग केले. त्यांपैकी 3 भाग एका रंगाने व 4 भाग दुसऱ्या रंगाने रंगवलेले आहेत. येथे $\frac{3}{8} < \frac{4}{8}$

समच्छेद अपूर्णांकांमध्ये, ज्याचा अंश मोठा तो अपूर्णांक मोठा असतो.

❑ अंश समान असलेल्या अपूर्णांकांचा लहान-मोठेपणा

अंश 1 असलेल्या अपूर्णांकांचा छेद जसजसा मोठा होत जातो, तसतशी त्या अपूर्णांकांची किंमत कमी होत जाते हे आपल्याला माहीत आहे.

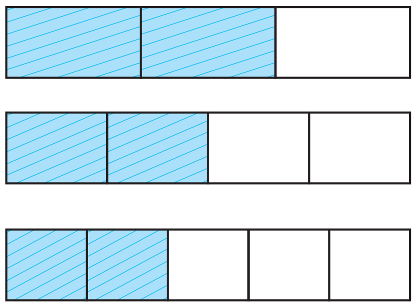
अपूर्णांकांचा अंश 1 पेक्षा वेगळा परंतु समान असेल, तर अशा अपूर्णांकांसाठीही हाच नियम असतो, हे पुढील आकृत्यांवरून समजून घ्या.

आकृत्यांमधील सर्व पट्ट्या एकसारख्या आहेत.

पट्टीच्या 3 समान भागांपैकी 2 भाग $\frac{2}{3}$

पट्टीच्या 4 समान भागांपैकी 2 भाग $\frac{2}{4}$

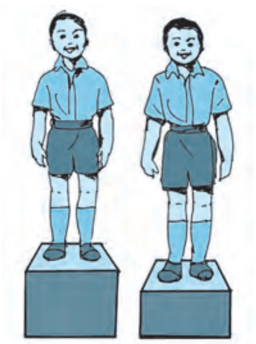
पट्टीच्या 5 समान भागांपैकी 2 भाग $\frac{2}{5}$

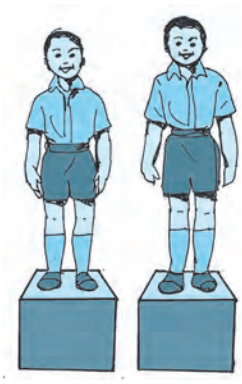


आकृतीवरून $\frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5}$.

> समान अंश असलेल्या अपूर्णांकांमध्ये ज्या अपूर्णांकाचा **छेद मोठा** असतो तो **अपूर्णांक लहान** असतो.

❑ भिन्न छेद असलेल्या अपूर्णांकांचा लहान-मोठेपणा





शिक्षिका : समजा, $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{7}$ या छेद भिन्न असलेल्या अपूर्णांकांतील लहान-मोठेपणा ठरवायचा आहे.
अशा अपूर्णांकांतील लहान-मोठेपणा कसा ठरवायचा हे समजण्यासाठी आपण एक उदाहरण पाहू.
ही दोन मुले दोन ठोकळ्यांवर उभी आहेत. त्यांच्यापैकी कोण उंच हे कसं ठरवायचं ?

सोनू : येथे ठोकळ्यांची उंची कमी-जास्त आहे. ती जर समान असेल, तर कोणाची उंची कमी व कोणाची उंची जास्त हे ठरवणं सोपं जाईल.

नंदू : आता मुलं समान उंचीच्या ठोकळ्यांवर उभी राहिल्यावर उजवीकडचा मुलगा उंच आहे हे सांगता येतं.

शिक्षिका : इथे जसं, ठोकळ्यांची उंची समान केल्यावर मुलांच्या उंचीतील कमी-जास्तपणा ठरवता येईल, तसंच दिलेल्या दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद समान केल्यावर त्यांचा लहान-मोठेपणा त्यांच्या अंशांच्या लहान-मोठेपणावरून ठरवता येईल.

नंदू : समजलं ! आधी आम्ही $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{7}$ या दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद समान करून घेऊ.

सोनू : 5 × 7 ला 5 आणि 7 या दोन्ही छेदांनी भाग जाईल, म्हणून दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद 5 × 7 म्हणजे 35 करू.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times7}{5\times7} = \frac{21}{35}$ $\qquad$ $\frac{4}{7} = \frac{4\times5}{7\times5} = \frac{20}{35}$

$\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$ म्हणून $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$

अपूर्णांकांचे छेद भिन्न असतील तर त्यांचे समान छेद असणारे सममूल्य अपूर्णांक तयार करून अपूर्णांकांचा लहान–मोठेपणा अंशांवरून ठरवता येतो.

उदाहरणसंग्रह 19

खालील अपूर्णांकांच्या जोड्यांमधील चौकटींत < , > किंवा = यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) $\frac{3}{7}$ □ $\frac{3}{7}$ $\quad$ (2) $\frac{3}{8}$ □ $\frac{2}{8}$ $\quad$ (3) $\frac{2}{11}$ □ $\frac{10}{11}$ $\quad$ (4) $\frac{5}{15}$ □ $\frac{10}{30}$

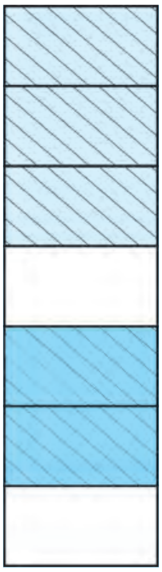
(5) $\frac{5}{8}$ □ $\frac{5}{9}$ $\quad$ (6) $\frac{4}{7}$ □ $\frac{4}{11}$ $\quad$ (7) $\frac{10}{11}$ □ $\frac{10}{13}$ $\quad$ (8) $\frac{1}{5}$ □ $\frac{1}{9}$

(9) $\frac{5}{6}$ □ $\frac{1}{8}$ $\quad$ (10) $\frac{5}{12}$ □ $\frac{1}{6}$ $\quad$ (11) $\frac{7}{8}$ □ $\frac{14}{16}$ $\quad$ (12) $\frac{4}{9}$ □ $\frac{4}{9}$

(13) $\frac{5}{18}$ □ $\frac{1}{9}$ $\quad$ (14) $\frac{2}{3}$ □ $\frac{4}{7}$ $\quad$ (15) $\frac{3}{7}$ □ $\frac{5}{9}$ $\quad$ (16) $\frac{4}{11}$ □ $\frac{1}{5}$

❐ समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज

$\frac{3}{7}$



$\frac{2}{7}$

उदा. (1) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ = किती ?

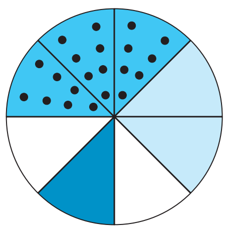
एका पट्टीचे 7 समान भाग करू. त्यांपैकी 3 भाग एका रंगाने व 2 भाग दुसऱ्या रंगाने रंगवू.

एका रंगाने रंगवलेला भाग $\frac{3}{7}$ व दुसऱ्या रंगाने रंगवलेला भाग $\frac{2}{7}$ आहे.

एकूण रंगवलेला भाग दर्शवणारा अपूर्णांक $\frac{5}{7}$ आहे.

यावरून, $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$.

उदा. (2) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$ यांची बेरीज करा.



रंगवलेला एकूण भाग, $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3+2+1}{8} = \frac{6}{8}$.

समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज करताना अपूर्णांकांच्या अंशांची बेरीज करतात व त्या अपूर्णांकांचा छेद बेरजेच्या छेदस्थानी तसाच लिहितात.

उदा. (3) बेरीज करा. $\frac{2}{6} + \frac{4}{6}$

$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6}$ परंतु $\frac{6}{6}$ म्हणजे आकृतीच्या 6 समान भागांपैकी 6 भाग घेतले हे आपल्याला माहीत आहे. याचा अर्थ ती 1 पूर्ण आकृती घेतली, म्हणून $\frac{6}{6} = 1$

यावरून लक्षात घ्या, **अपूर्णांकाचे अंश व छेद समान असतील, तर त्या अपूर्णांकाची किंमत 1 असते.**

म्हणून $\frac{7}{7} = 1$; $\frac{10}{10} = 1$; $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

लक्षात घ्या, एका आकृतीचे भाग न करता ती पूर्ण ठेवली, तरी ती 1 अशी दाखवता येते.

यावरून $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ इत्यादी.

आपल्याला माहीत आहे, की अपूर्णांकातील अंश व छेद यांचा भाजक समान असेल, तर त्या भाजकाने अंश व छेद या दोघांना भागल्यावर मिळणारा अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतो.

यावरून $\frac{5}{5} = \frac{5 \div 5}{5 \div 5} = \frac{1}{1} = 1$

उदाहरणसंग्रह 20

1. बेरीज करा.

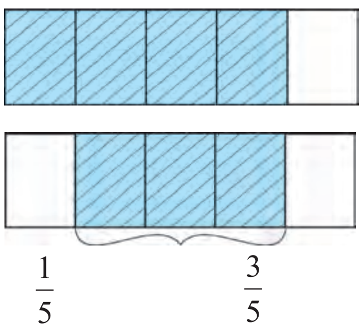
(1) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ (3) $\frac{7}{12} + \frac{2}{12}$ (4) $\frac{2}{9} + \frac{7}{9}$ (5) $\frac{3}{15} + \frac{4}{15}$

(6) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7}$ (7) $\frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10}$ (8) $\frac{4}{9} + \frac{1}{9}$ (9) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$

2. आईने एक पेरू आणला. त्यातील $\frac{3}{8}$ भाग मीनाला व $\frac{2}{8}$ भाग गीताला दिला, तर दोघींना मिळून किती भाग दिला ?

3. एका मैदानाचा $\frac{3}{4}$ भाग पाचवीच्या मुलांनी व $\frac{1}{4}$ भाग चौथीच्या मुलांनी स्वच्छ केला, तर त्या मैदानाचा एकूण किती भाग स्वच्छ झाला ?

❐ समच्छेद अपूर्णांकांची वजाबाकी



एका आकृतीचे 5 समान भाग करून त्यांपैकी 4 भाग रंगवले, म्हणजे आकृतीचा $\frac{4}{5}$ भाग रंगवला आहे.

रंगवलेल्या भागांपैकी एका भागाचा रंग पुसून टाकला.

म्हणजे $\frac{4}{5}$ मधून $\frac{1}{5}$ वजा केले.

आता रंगवलेला भाग $\frac{3}{5}$ उरला, म्हणून $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$

दोन समच्छेद अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना त्या अपूर्णांकांच्या अंशांची वजाबाकी अंशस्थानी लिहून छेदस्थानी दिलेल्या अपूर्णांकांचा छेद तसाच लिहितात.

उदा. (1) वजाबाकी करा. $\frac{7}{13} - \frac{5}{13}$

या दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद समान आहे, म्हणून या अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना, अंशांची वजाबाकी करू व छेद तसाच लिहू. $\frac{7}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7-5}{13} = \frac{2}{13}$.

उदा. (2) एका उसाचा $\frac{5}{12}$ भाग राजूला व $\frac{3}{12}$ भाग संजूला दिल्यास राजूला किती जास्त भाग मिळाला?

किती जास्त भाग मिळाला हे काढण्यासाठी वजाबाकी करावी लागेल.

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5-3}{12} = \frac{2}{12}$$

राजूला $\frac{2}{12}$ भाग जास्त मिळाला.

उदाहरणसंग्रह 21

1. वजाबाकी करा.

(1) $\frac{5}{7} - \frac{1}{7}$ (2) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ (3) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$ (4) $\frac{8}{11} - \frac{5}{11}$

(5) $\frac{9}{13} - \frac{4}{13}$ (6) $\frac{7}{10} - \frac{3}{10}$ (7) $\frac{9}{12} - \frac{2}{12}$ (8) $\frac{10}{15} - \frac{3}{15}$

2. एका भिंतीचा $\frac{7}{10}$ भाग रंगवायचा आहे. त्यापैकी $\frac{4}{10}$ भाग रामूने रंगवला, तर अजून किती भाग रंगवायचा राहिला ?

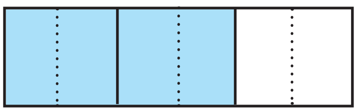
❒ भिन्नछेद अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

उदा. (1) बेरीज करा. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

प्रथम एका पट्टीच्या तीन समान भागांपैकी दोन भाग रंगवून $\frac{2}{3}$ हा अपूर्णांक दर्शवू.

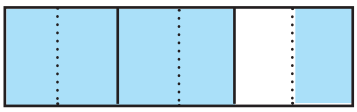
छेद समान असलेल्या अपूर्णांकांची बेरीज-वजाबाकी कशी करायची, हे आपल्याला माहीत आहे.

$\frac{2}{3}$ या अपूर्णांकात $\frac{1}{6}$ हा अपूर्णांक मिळवायचा आहे.



म्हणून याच पट्टीच्या प्रत्येक भागाचे दोन समान भाग करून $\frac{2}{3}$ चा $\frac{4}{6}$ हा सममूल्य अपूर्णांक मिळवू.

$\frac{2}{3}$ मध्ये म्हणजेच $\frac{4}{6}$ मध्ये $\frac{1}{6}$ हा अपूर्णांक मिळवायचा आहे, म्हणून या पट्टीच्या सहा भागांपैकी आणखी एक भाग रंगवू. आता पट्टीचा एकूण रंगवलेला भाग $\frac{5}{6}$ आहे.



यावरून $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$

म्हणजेच $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

उदा. (2) बेरीज करा. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$

येथे छेदांची सर्वांत लहान समान पट 10 आहे,

म्हणून अपूर्णांकांचे छेद 10 करू.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{1\times5}{2\times5}+\frac{2\times2}{5\times2}$$
$$= \frac{5}{10}+\frac{4}{10}$$
$$= \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$$

उदा. (3) बेरीज करा. $\frac{3}{8}+\frac{1}{16}$

येथे 16 ही 8 ची दुप्पट आहे,

म्हणून दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद 16 करू.

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{16} = \frac{3\times2}{8\times2}+\frac{1}{16}$$
$$= \frac{6}{16}+\frac{1}{16}$$
$$= \frac{6+1}{16} = \frac{7}{16}$$

उदा. (4) वजाबाकी करा.

$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$

दोन्ही अपूर्णांकांचा 8 हा समान छेद करू.

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8} = \frac{3\times2}{4\times2}-\frac{5}{8}$$
$$= \frac{6}{8}-\frac{5}{8}$$
$$= \frac{6-5}{8}$$
$$= \frac{1}{8}$$

उदा. (5) वजाबाकी करा.

$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$

छेदांची सर्वांत लहान समान पट 15 आहे,

म्हणून अपूर्णांकांचे छेद 15 करू.

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{3} = \frac{4\times3}{5\times3}-\frac{2\times5}{3\times5}$$
$$= \frac{12}{15}-\frac{10}{15}$$
$$= \frac{12-10}{15}$$
$$= \frac{2}{15}$$

उदाहरणसंग्रह 22

1. बेरीज करा.

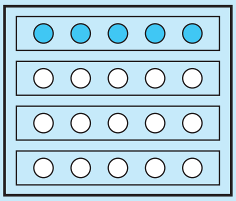
(1) $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{21}+\frac{3}{7}$ (3) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{7}+\frac{1}{2}$ (5) $\frac{3}{9}+\frac{3}{5}$

2. वजाबाकी करा.

(1) $\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$ (2) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{6}{14}-\frac{2}{7}$ (4) $\frac{4}{6}-\frac{3}{5}$ (5) $\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$

❒ समूहाच्या संदर्भात अपूर्णांक व अपूर्णांकांची पट : चित्ररूप माहितीतून अनुभव

✦ 20 ठिपक्यांच्या समूहाचा $\frac{1}{4}$



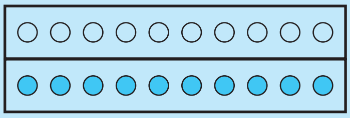
20 चा $\frac{1}{4}$ = 5

20 ÷ 4 = 5

✦ 20 ठिपक्यांच्या समूहाचा $\frac{1}{2}$

20 चा $\frac{1}{2}$ म्हणजे 10

20 ÷ 2 = 10

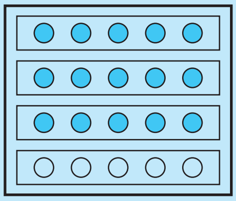


✦ 20 ठिपक्यांच्या समूहाचा $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

20 चा $\frac{3}{4}$ म्हणजे 20 चा $\frac{1}{4}$ असे 3 भाग म्हणजे 15 ठिपके

20 ÷ 4 = 5, 5 × 3 = 15



✦ 5 ची दुप्पट 10

5 चेंडूंच्या 2 ओळी

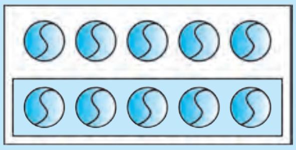
5 × 2 = 10

5 ची दुप्पट 10

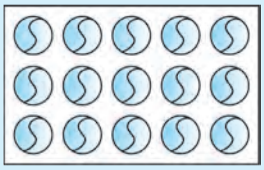
✦ 10 ची $\frac{1}{2}$ पट

10 च्या $\frac{1}{2}$ = 5

10 ची $\frac{1}{2}$ पट = 5



✦ 5 ची 3 पट



एकूण चेंडू 15

5 ची 3 पट 15

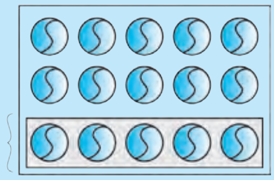
म्हणजे 5 × 3 = 15

✦ 15 ची $\frac{1}{3}$ पट

15 ची $\frac{1}{3}$ पट

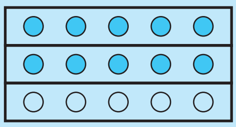
म्हणून 15 × $\frac{1}{3}$ = 5

15 ÷ 3 = 5



✦ 15 ची $\frac{2}{3}$ पट

15 ची $\frac{2}{3}$ पट करणे म्हणजे 15 ची $\frac{1}{3}$ पट करून त्याची दुप्पट करणे.



✦ मीनाजवळ 5 रुपये आहेत. तिच्याजवळ असलेल्या रुपयांच्या दुप्पट रुपये टीनाजवळ आहेत, म्हणजे टीनाजवळ $5 \times 2 = 10$ रुपये आहेत. मीनाजवळ टीनाच्या निमपट म्हणजे 10 च्या $\frac{1}{2}$ रुपये आहेत, म्हणजेच 5 रुपये आहेत.

✦ रामूला 20 किलोमीटर अंतर जायचे होते. त्यांपैकी $\frac{4}{5}$ अंतर त्याने मोटारीने पार केले, म्हणजे त्याने किती किलोमीटर अंतर पार केले ?

20 किलोमीटरची $\frac{4}{5}$ पट म्हणजे $20 \times \frac{4}{5}$ म्हणजे 20 ची $\frac{1}{5}$ पट करून त्याची 4 पट करणे.

20 चे $\frac{1}{5} = 4$, त्याची 4 पट म्हणजे $4 \times 4 = 16$.

यावरून $20 \times \frac{4}{5} = 16$.

रामूने 16 किमी अंतर मोटारीने पार केले.

उदाहरणसंग्रह 23

1. खालील प्रत्येक समूहाचा $\frac{1}{3}$ म्हणजे किती ?

(1) 15 पेन्सिली (2) 21 फुगे (3) 9 मुले (4) 18 पुस्तके

2. खालील प्रत्येकाचा $\frac{1}{5}$ म्हणजे किती ?

(1) 20 रुपये (2) 30 किमी (3) 15 लीटर (4) 25 सेमी

3. खालील संख्यांचा दिलेल्या अपूर्णांकाएवढा भाग काढा.

(1) 30 चा $\frac{2}{3}$ (2) 22 चा $\frac{7}{11}$ (3) 64 चा $\frac{3}{8}$ (4) 65 चा $\frac{5}{13}$

❐ पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

तीन वर्तुळांपैकी प्रत्येक वर्तुळाचा अर्धा भाग रंगवला आहे, म्हणजे प्रत्येक वर्तुळाचा $\frac{1}{2}$ भाग असे 3 भाग रंगवलेले आहेत.

रंगवलेला भाग $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ म्हणजे $1 + \frac{1}{2}$ किंवा $\frac{3}{2}$.

$1 + \frac{1}{2}$ हे थोडक्यात $1\frac{1}{2}$ असे लिहितात. $1\frac{1}{2}$ याचे वाचन 'एक पूर्णांक एक छेद दोन' असे करतात.

$1\frac{1}{2}$ या अपूर्णांकात 1 हा पूर्णांक भाग आणि $\frac{1}{2}$ हा अपूर्णांक भाग आहे, म्हणून अशा अपूर्णांकाला **पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक** म्हणतात. $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $7\frac{4}{9}$ हे पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक आहेत.

ज्या अपूर्णांकाचा अंश त्याच्या छेदापेक्षा मोठा असेल, त्याला **अंशाधिक अपूर्णांक** असे म्हणतात.

$\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ हे अंशाधिक अपूर्णांक आहेत. अंशाधिक अपूर्णांकाचे रूपांतर पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकात करता येते.

जसे, $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

उपक्रम

1. टोप्या रंगवा.

शेजारील चित्रातील

$\frac{1}{3}$ टोप्या लाल रंगाने रंगवा.

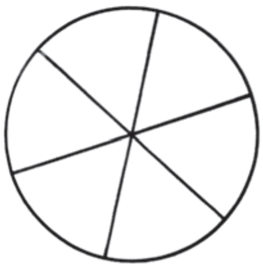
$\frac{3}{5}$ टोप्या निळ्या रंगाने रंगवा.

तुम्ही लाल रंगाने रंगवलेल्या टोप्या किती ?

तुम्ही निळ्या रंगाने रंगवलेल्या टोप्या किती ?

किती टोप्या रंगवायच्या राहिल्या ?

2. जादूची भिंगरी तयार करा.



पांढऱ्या रंगाची कार्डबोर्डची एक वर्तुळाकार चकती घ्या. त्या चकतीवर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 6 समान भाग करा.

ते भाग अनुक्रमे लाल, केशरी, पिवळा, हिरवा, निळा, जांभळा या रंगांनी रंगवा. वर्तुळाकार चकतीच्या केंद्रापाशी छिद्र पाडून त्यात एक टोकदार काडी बसवा. तुमची भिंगरी तयार झाली.

रंगवलेला प्रत्येक भाग चकतीचा किती भाग आहे ?

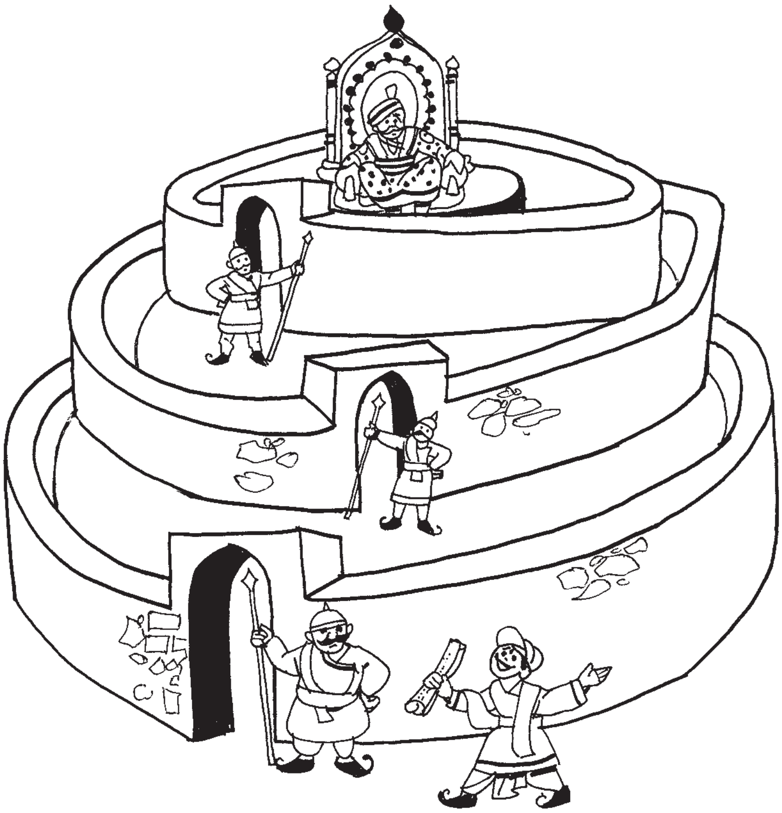
भिंगरी जोरात फिरवा. तुम्हांला कोणता रंग दिसतो ?

जरा हसूया.

नंदू : आजोबा म्हणतात, की मी व ताई दीड शहाणे आहोत, म्हणजे आम्ही दोघं मिळून तीन झालो ना ? मग आम्हांला दोघांना मिळून तीन चॉकलेटं हवीत.

आई : दोघांचं मिळून शहाणपण तीन माणसांइतकं असलं तरी तुम्ही व्यक्ती मात्र दोनच आहात बरं !

चतुर कवी



एक साहित्यप्रेमी राजा होता. उत्तम कविता पाहिली, की तो खूश होऊन बक्षीस देतो, हे एका कवीला माहीत होते. एकदा त्या कवीला छान कविता सुचली. ती राजाला दाखवून बक्षीस मिळते का पाहावे, म्हणून तो राजवाड्यापाशी गेला; पण राजापर्यंत पोहोचणे सोपे नव्हते. वाटेत वेगवेगळे चौकीदार अडवत असत. पहिल्या चौकीदाराने कशासाठी जात आहे ते विचारले. कवीने जाण्याचे कारण सांगितले. राजाकडून बक्षीस मिळण्याची शक्यता पाहिल्यावर चौकीदार म्हणाला, ''मला बक्षिसाचा $\frac{1}{10}$ भाग देण्याचे कबूल कर, तर तुला आत सोडेन.'' कवीला कबूल करावेच लागले. दुसऱ्या चौकीदाराने अडवले. तो म्हणाला, ''मला बक्षिसाचा $\frac{2}{5}$ भाग देणार असलास तर आत सोडतो.'' तिसरा चौकीदारसुद्धा लोभी होता. तो म्हणाला, ''बक्षिसाचा $\frac{1}{4}$ भाग मला देणार असशील, तर आत सोडेन.'' आता राजाचा महाल समोरच होता. कवीने चौकीदाराला म्हटले, ''पाव ऐवजी अर्धा भाग तुला देतो.'' चौकीदार खूश होऊन 'हो' म्हणाला.

राजाला कविता आवडली. त्याने विचारले, ''बक्षीस काय हवे ?'' कवी म्हणाला, ''कृपा करा आणि मला बक्षीस म्हणून 100 फटके द्या.'' राजाला फार आश्चर्य वाटले. तो म्हणाला, ''तू वेडा आहेस का ? फटके मागून घेणारा कोणी पाहिला नव्हता.'' कवी म्हणाला. '' याचं कारण हवं असेल, तर तुमच्या तीनही चौकीदारांना बोलवा.'' चौकीदार आल्यावर कवी राजाला म्हणाला, ''तुम्ही मला बक्षिसाचे 100 फटके देऊ केलेत ना ? त्यात हे लोक वाटेकरी आहेत. प्रत्येकाने आधीच आपापला बक्षिसाचा वाटा ठरवून घेतला आहे. पहिल्या चौकीदाराला बक्षीसाच्या $\frac{1}{10}$ म्हणजे ☐ फटके, दुसऱ्याला $\frac{2}{5}$ म्हणजे ☐ तर तिसऱ्याला अर्धे बक्षीस म्हणजे ☐ फटके असे वाटे ठरले आहेत.''

चौकीदारांचा लोभीपणा व कवीचे चातुर्य राजाच्या लक्षात आले. राजाने चौकीदारांना योग्य तेवढे फटके दिले. चांगल्या कवितेबद्दल कवीला बक्षीस दिले, शिवाय कवीने चौकीदारांचा लोभीपणा दाखवून दिला, म्हणून त्याला आणखी 100 मोहरा बक्षीस दिल्या.

विचार करून सांगा, कवीचे कोणते चातुर्य राजाच्या लक्षात आले ?