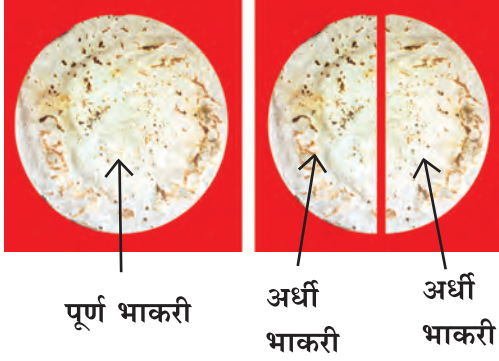


१०. अपूर्णांक



अपूर्णांकांचा अर्थ, लेखन व वाचन

◆ अर्धा

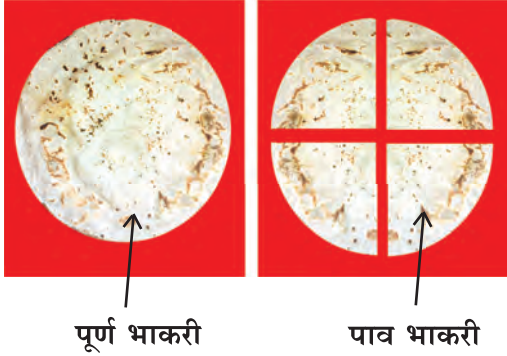


एक भाकरी दोघांत समान वाटायची आहे. तिचे दोन समान भाग करून त्यांतला एक भाग म्हणजे पूर्ण भाकरीचा अर्धा भाग होतो.

कोणत्याही एका वस्तूचे दोन समान भाग करून त्यांतील एक भाग घेतला, तर तो त्या वस्तूचा अर्धा भाग होतो. पूर्ण वस्तूचा अर्धा भाग $\frac{1}{2}$ या अपूर्णांकाने दाखवतात.



◆ पाव



एक भाकरी चारजणांत समान वाटायची आहे. तिचे चार समान भाग करून प्रत्येकाला त्यांतील एक भाग दिला, की तो भाकरीचा पाव भाग होतो.

एका वस्तूचे चार समान भाग करून त्यांतील एक भाग घेतल्यास,

तो भाग $\frac{1}{4}$ या अपूर्णांकाने दाखवतात.



$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ हे अपूर्णांक आहेत. अपूर्णांकात रेघेच्या वर लिहिलेली संख्या अंश असते आणि रेघेच्या खाली लिहिलेली संख्या छेद असते. $\frac{1}{2}$ या अपूर्णांकात १ हा अंश व २ हा छेद आहे.

$\frac{1}{2}$ चे वाचन 'एक अंश छेद दोन' किंवा 'एक छेद दोन' असे करतात.

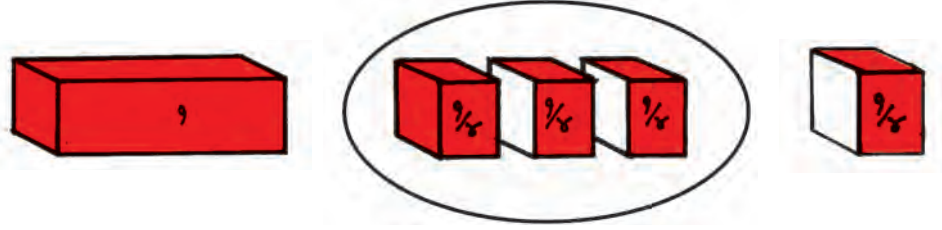
$\frac{1}{4}$ चे वाचन 'एक अंश छेद चार' किंवा 'एक छेद चार' असे करतात.

◆ पाऊण



तीन नातवंडांनी मिळून एक केक आणला व आजोबांना त्यांच्यासह चौघांत समान वाटून देण्यास सांगितले. आजोबांनी त्या केकचे चार समान भाग केले. त्यांतील प्रत्येक भाग म्हणजे पाव केक. आजोबांनी राजू, राणी व पिंकी यांना प्रत्येकी पाव भाग दिला व उरलेला पाव केक स्वतःसाठी ठेवला.

आजोबांनी दोन नातींना मिळून पाव + पाव म्हणजे अर्धा केक दिला व तीनही नातवंडांना मिळून पाव + पाव + पाव म्हणजे पाऊण केक दिला. अर्धा आणि पाव म्हणजे देखील पाऊण होतो.



कोणत्याही एका वस्तूचे ४ समान भाग केले. त्यांपैकी ३ भाग घेतले, तर घेतलेले एकूण भाग म्हणजेच पाऊण भाग. हा भाग $\frac{3}{4}$ या अपूर्णाकाने दाखवतात.

$\frac{3}{4}$ चे वाचन 'तीन अंश छेद चार' किंवा 'तीन छेद चार' असे करतात.

आणखी काही अपूर्णांक



येथे एका वर्तुळाकार चकतीचे ५ समान भाग केले असून त्यांतले ३ भाग रंगवले आहेत. चकतीचा रंगवलेला भाग $\frac{3}{5}$ या अपूर्णाकाने दाखवतात.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \text{ मिळून } \frac{3}{5} \text{ होतो, म्हणजेच } \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

कोणत्याही एका वस्तूचे ५ समान भाग केले व त्यांतले ३ घेतले, तर घेतलेले एकूण भाग $\frac{3}{5}$ या अपूर्णाकाने दाखवतात; म्हणजेच $\frac{3}{5}$ या अपूर्णाकाचा ५ हा छेद वस्तूचे किती समान भाग केले हे दाखवतो आणि ३ हा अंश तसे किती भाग घेतले हे दाखवतो.



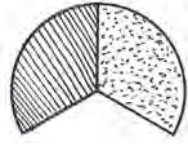
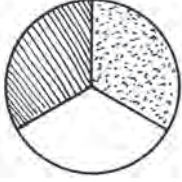
या पट्टीचे ६ समान भाग केले आहेत. त्यांतले २ भाग रंगवलेले आहेत, म्हणजे पट्टीचा $\frac{2}{6}$ भाग रंगवलेला आहे.

येथे देखील $\frac{2}{6}$ या अपूर्णाकातील ६ ही संख्या पट्टीचे किती समान भाग केले हे दाखवते आणि २ ही संख्या त्यांतले किती भाग घेतले हे दाखवते. $\frac{2}{6}$ या अपूर्णाकात २ हा अंश आहे व ६ हा छेद आहे.

$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{6}$ याप्रमाणे $\frac{6}{11}$, $\frac{6}{13}$ यांसारख्या अपूर्णाकांचे अर्थ समजावून घ्या.

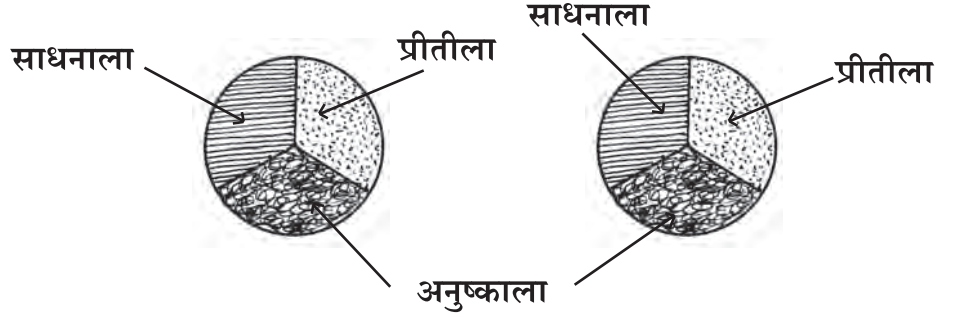
अपूर्णाकांचे वेगवेगळे अर्थ

अमिताला एका भाकरीच्या ३ समान भागांपैकी २ भाग दिले.

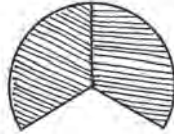


म्हणजे अमिताला $\frac{2}{3}$ भाकरी दिली.

अमिताला दिलेल्या भाकरीच्या आकाराच्या दोन समान भाकरी साधना, अनुष्का आणि प्रीती या तिघींत समान वाटायच्या आहेत.



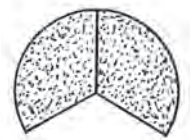
दोन्ही भाकरींचे तीन-तीन समान भाग केले. प्रत्येक भाकरीतला एकेक भाग साधना, अनुष्का आणि प्रीती यांना दिला.



साधनाला मिळालेला भाग
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$



अनुष्काला मिळालेला भाग
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$



प्रीतीला मिळालेला भाग
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

प्रत्येकीला $\frac{1}{3}$ भाग दोन वेळा दिला. म्हणजे $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ एवढा भाग मिळाला.

पण अमिता आणि इतर तिघींपैकी प्रत्येकीला मिळालेला भाग समानच आहे.

यावरून दिसते, की $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

आता हेही लक्षात घ्या, की दोन भाकरींची तिघींमध्ये समान वाटणी केल्यावर प्रत्येकीला मिळालेला भाग $\frac{2}{3}$ एवढाच आहे.

म्हणजे $\frac{2}{3}$ या अपूर्णाकाचे तीन वेगवेगळे अर्थ आहेत.

◆ एका वस्तूच्या ३ समान भागांपैकी २ भाग.

◆ दोन वेळा $\frac{1}{3}$, म्हणजे $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, म्हणजे $2 \times \frac{1}{3}$, म्हणजेच $\frac{2}{3}$ ची दुप्पट.

◆ दोन वस्तूंची तिघांमध्ये समान वाटणी.

१. खालील सारणी पूर्ण करा.

अपूर्णांक	बेरीजरूपात	पटरूपात	गुणाकाररूपात	किती वेळा
$\frac{४}{५}$	$\frac{१}{५} + \frac{१}{५} + \frac{१}{५} + \frac{१}{५}$	$\frac{१}{५}$ ची चार पट	$\frac{१}{५} \times ४$	४ वेळा $\frac{१}{५}$
$\frac{३}{४}$				
$\frac{३}{६}$				
$\frac{५}{६}$				

२. खालील आकृत्यांमध्ये रंगवलेले व न रंगवलेले भाग अपूर्णाकरूपात लिहा व त्यांचे वाचन शब्दांत लिहा.

आकृती	रंगवलेला अपूर्णांक	वाचन	न रंगवलेला अपूर्णांक	वाचन
	$\frac{३}{८}$	तीन छेद आठ	$\frac{५}{८}$	पाच छेद आठ
				
				
				
				

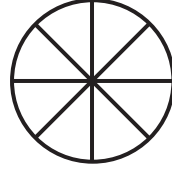
 **लक्षात घ्या :** वरील पहिल्या आकृतीत रंगवलेला भाग $\frac{३}{८}$ व न रंगवलेला भाग $\frac{५}{८}$ आहे. दोन्ही मिळून ८ पैकी ८ म्हणजे पूर्ण आकृती आहे. हेच इतर आकृत्यांमध्येही दिसते.

३. प्रत्येक आकृतीच्या खाली अक्षरांत लिहिलेला अपूर्णांक त्यापुढील चौकटीत लिहा व आकृतीचा तेवढा भाग रंगवा.

(१)



(२)



(३)



दोन छेद तीन

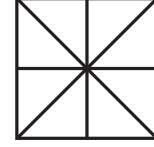
चार छेद आठ

पाच छेद सहा

(४)



(५)



दोन छेद सात

सात छेद आठ

४. खालील अपूर्णाकांतील अंश व छेद लिहा.

$$\frac{३}{७}, \frac{८}{११}, \frac{४}{५}, \frac{७}{१३}, \frac{२}{९}, \frac{५}{८}$$

पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक

◆ ३ पेरू २ व्यक्तींना समान वाटायचे आहेत. हे वाटप आपण दोन प्रकारे करू शकतो.

प्रकार १



प्रत्येक पेरूचे दोन समान भाग करा.

प्रत्येक पेरूतील १ भाग म्हणजे

$\frac{१}{२}$ पेरू प्रत्येकास द्या.

याप्रमाणे प्रत्येकाच्या वाट्याला $\frac{१}{२}$ असे ३ भाग आले,

म्हणून प्रत्येकास $\frac{१}{२} \times ३ = \frac{३}{२}$ पेरू मिळणार.

$$\text{यावरून } \frac{३}{२} = १ \frac{१}{२}$$

प्रकार २



प्रथम प्रत्येकास १ पूर्ण पेरू द्या. उरलेल्या तिसऱ्या पेरूचे दोन समान भाग करा.

प्रत्येकाला तिसऱ्या पेरूतील एक भाग म्हणजेच $\frac{१}{२}$ पेरू द्या.

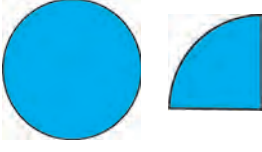
प्रत्येकाच्या वाट्याला १ पूर्ण व $\frac{१}{२}$ पेरू येईल,

म्हणून प्रत्येकाला $१ + \frac{१}{२}$ पेरू मिळेल.

$१ + \frac{१}{२}$ हेच $१ \frac{१}{२}$ असे लिहितात.

$१ \frac{१}{२}$ अशा अपूर्णाकांना पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक म्हणतात.

सव्वा, सव्वादोन, सव्वातीन, ...

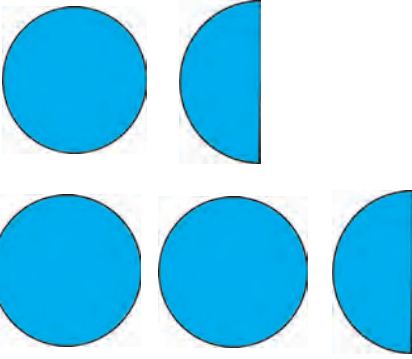


एक पूर्ण आणि पाव भाग मिळून $1 + \frac{1}{4}$ होतो. हेच थोडक्यात $1\frac{1}{4}$ असे लिहितात.

$1\frac{1}{4}$ चे वाचन 'एक पूर्णांक एक छेद चार' किंवा 'सव्वा' असे करतात.

तीन पूर्ण आणि पाव भाग मिळून $3 + \frac{1}{4}$ होतो. हेच थोडक्यात $3\frac{1}{4}$ असे लिहितात आणि 'तीन पूर्णांक एक छेद चार' किंवा 'सव्वातीन' असे वाचतात. याचप्रमाणे $2\frac{1}{4}$ याचे वाचन 'सव्वादोन' आणि $4\frac{1}{4}$ याचे वाचन 'सव्वाचार' असे करतात.

दीड, अडीच, साडेतीन,...

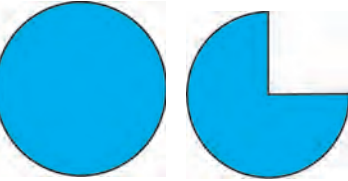


एक पूर्ण आणि अर्धा मिळून $1\frac{1}{2}$ होतो.

$1\frac{1}{2}$ चे वाचन 'एक पूर्णांक एक छेद दोन' किंवा 'दीड' असे करतात.

दोन पूर्ण आणि अर्धा याचे लेखन $2\frac{1}{2}$ असे करतात आणि वाचन 'दोन पूर्णांक एक छेद दोन' किंवा 'अडीच' असे करतात. याचप्रमाणे $3\frac{1}{2}$ याचे वाचन 'साडेतीन', $4\frac{1}{2}$ चे वाचन 'साडेचार' असे करतात.

पावणेदोन, पावणेतीन, पावणेचार,...



एक पूर्ण आणि पाऊण याचे लेखन $1\frac{3}{4}$ असे करतात आणि वाचन 'एक पूर्णांक तीन छेद चार' किंवा 'पावणेदोन' असे करतात. 'पावणेदोन' म्हणजे पाव कमी दोन, म्हणजेच दोनमधून पाव उणे केला.

याचप्रमाणे $2\frac{3}{4}$ चे वाचन पावणेतीन,

$4\frac{3}{4}$ चे वाचन पावणेपाच असे करतात.

स्वाध्याय

१. खालील अपूर्णांक वाचा व शब्दांत लिहा.

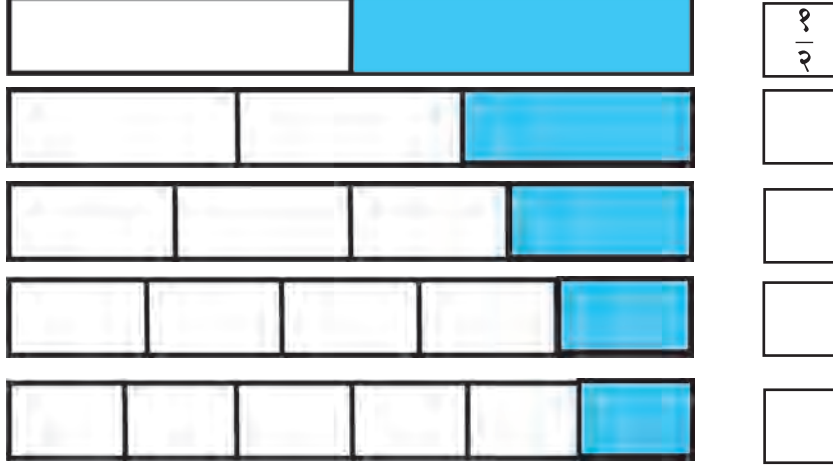
$$2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{4}, 11\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}$$

२. वाचन करा व संबंधित अपूर्णांक लिहा.

पावणेपाच, साडेदहा, पावणेपंधरा, सव्वासात, साडेअठरा, सव्वानऊ, साडेसात.

अपूर्णाकांची तुलना

खालील चित्रात समान लांबीच्या पट्ट्यांचे काही भाग रंगवले आहेत. रंगवलेला भाग कोणता अपूर्णाक दर्शवतो, हे प्रत्येक पट्टीपुढील चौकटीत लिहा.



या चित्रांचे व चौकटींत लिहिलेल्या अपूर्णाकांचे निरीक्षण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(१) $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{3}$ यांपैकी कोणता अपूर्णाक लहान आहे ?

(२) $\frac{1}{5}$ आणि $\frac{1}{6}$ यांपैकी कोणता अपूर्णाक लहान आहे ?

(३) $\frac{1}{3}$ आणि $\frac{1}{4}$ यांपैकी मोठा अपूर्णाक कोणता ?

(४) खालील चौकटींत $<$ आणि $>$ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$

(५) अंश १ असणाऱ्या अपूर्णाकांचा छेद जसजसा मोठा होत जातो, तसतसा अपूर्णाकांच्या किमतीवर काय परिणाम होत जातो ?

(६) $\frac{1}{6}$ आणि $\frac{1}{9}$ यांपैकी कोणता अपूर्णाक लहान आहे ? कारण लिहा.

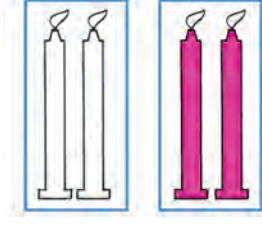
(७) खालील चौकटींत $=$, $<$ आणि $>$ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{15}$ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{200}$ $\frac{1}{100}$

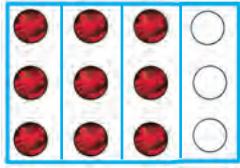
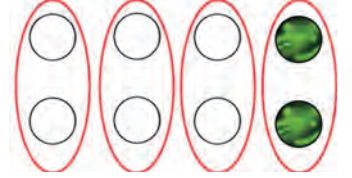
(८) तुमच्याकडे एक फळ आहे. त्याचा उपयोग करून $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$ हे तुमच्या मित्राला किंवा मैत्रिणीला कसे समजावून सांगाल ?

समूहाच्या संदर्भातील अपूर्णांक



- शेजारच्या चित्रात चार मेणबत्त्यांचा समूह आहे. त्याचे २ समान भाग करून त्यांपैकी १ भाग रंगवला आहे, म्हणजे $\frac{1}{2}$ भाग रंगवला आहे. यावरून ४ चा $\frac{1}{2}$ म्हणजे २.

- येथे ८ गोट्यांच्या समूह आहे. त्याचे ४ समान भाग केले. त्यांतील १ भाग रंगवला, म्हणजे $\frac{1}{4}$ भाग रंगवला, म्हणून ८ चा $\frac{1}{4}$ म्हणजे २.



- येथे १२ चेंडूंचा समूह आहे. त्याचे ४ समान भाग केले. त्यांतील ३ भाग रंगवले, म्हणजे $\frac{3}{4}$ भाग रंगवला, म्हणून १२ चा $\frac{3}{4}$ म्हणजे ९.

- येथे ६ पेन्सिलींचा समूह आहे. त्याचे ६ समान भाग केले. प्रत्येक भागात एकच पेन्सिल आहे. त्यांतील ५ भाग रंगवले. यावरून ६ चा $\frac{5}{6}$ म्हणजे ५.



स्वाध्याय

दिलेल्या समूहाच्या दिलेल्या अपूर्णाकाएवढ्या भागाभोवती गोल करा.

अपूर्णांक	समूह
$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{3}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{2}{4}$	
$\frac{9}{10}$	
$\frac{3}{5}$	