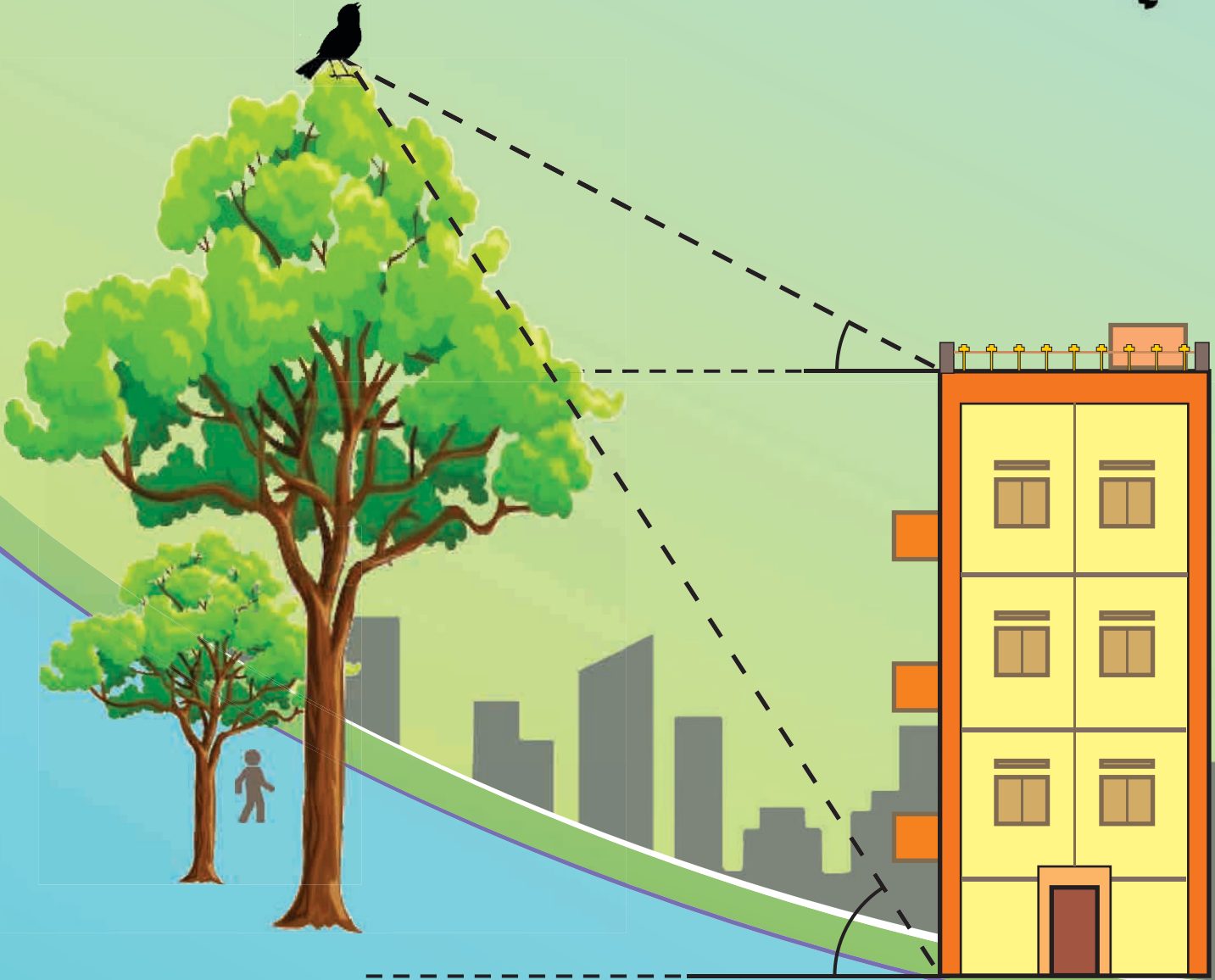


# ریاضی حصہ - II

دسویں جماعت



سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس - ۲۱۱۶ (پر نمبر ۱۶/۲۳) ایس ڈی-۳ مورخہ ۲۵ اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کردہ  
رابطہ کمیٹی کی ۲۹ دسمبر ۲۰۱۷ء کو منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۱۹-۲۰۱۸ء درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

# ریاضی

حصہ - II

دسویں جماعت



مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۲



اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب  
کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور  
ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے  
لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

Q8CUAZ

طبع اول : ۲۰۱۸ء

© مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیٹک نرمتی و ابھیاس کرم سنشو دھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۳

اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیٹک نرمتی و ابھیاس کرم سنشو دھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔ اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائریکٹر، مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیٹک نرمتی و ابھیاس کرم سنشو دھن منڈل کی تحریری اجازت کے بغیر کسی بھی شکل میں شائع نہ کیا جاسکتا۔

(2018)

### Urdu Translators

Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed  
Mr. Ansari Badrudduja Shabbeer Ahemad  
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

### Co-ordinator (Urdu)

Khan Navedul Haque Inamul Haque  
Special Officer for Urdu,  
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

### Co-ordinator (Marathi)

Smt. Ujwala S. Godbole  
I/O. Special Officer for Mathematics  
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

### Urdu D.T.P. & Layout

Altaf Ameen (Sadan Graphics)  
Malegaon-423203

### Cover, Illustrations and Computer Drawings

Shri. Sandip Koli, Artist, Mumbai

### Production

Shri Sachchitanand Aphale (C.P.O)  
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)  
Shri Prashant Hame (Asst. Production Officer)

### Paper

70, GSM Creamvowe

### Print Order

N/PB/2018-19/1,00,000

### Printer

PRINTOGRAPHY SYSTEMS (INDIA) PVT. LTD.,  
MUMBAI

### Publisher

Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)  
M.S. Bureau of Textbook Production,  
Prabhadevi, Mumbai - 25

### ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ❖ ڈاکٹر منگلا ناراینگر (صدر)
- ❖ ڈاکٹر شریتمتی جے شری اترے (رکن)
- ❖ ڈاکٹر ونایک گوڈ بولے (رکن)
- ❖ شریتمتی پراجکتی گوکھلے (رکن)
- ❖ شری راماکانت سرودے (رکن)
- ❖ شری سندپ پنچ بھائی (رکن)
- ❖ شریتمتی پوجا جاڈھو (رکن)
- ❖ شریتمتی اجولا گوڈ بولے (رکن سکریٹری)

### ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریتمتی جے شری پورندرے
- شری راجندر چودھری
- شری رام وینیاں کر
- شری اننا پاپریٹ
- جناب انصاری
- شری شریپاد ویشپانڈے
- شری سریش داتے
- شری امیش ریلے
- شری ہنسی ہوالے
- شری روہنی شرکے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمن داوان کر
- شری شری کانت تن پارکھی
- شری سنیل شری واستو
- جناب انصاری عبدالحمید عبدالحمید
- شریتمتی سورنا دلش پانڈے
- شریتمتی تروین پوپٹ
- شری پرمودھو تیرے
- ڈاکٹر سہستربدھے
- شری وسنت شیوالے
- شری پرتاپ کاشد
- شری ملند بھاکرے
- شری گیا نیشور ماشلکر
- شری گنیش کولتے
- شری سندیش سوناوانے
- شری سدھیر پائل
- شری پرکاش کاپسے
- شری رویندر کھنڈارے
- شریتمتی سواتی دھرم مادھیکاری
- شری اردنکار تیواری
- شری مللے شام پٹھی
- شریتمتی آریا بھڑے

## بھارت کا آئین

### تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت و سنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو  
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں  
اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:  
انصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛  
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛  
مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع،  
اور ان سب میں  
اُخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور  
سالمیت کا تئیں ہو؛  
اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین  
ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں،  
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

## راشٹر گیت

جَن گَن مَن - اِدھ نایک جیہ ہے  
بھارت - بھاگیہ ودھاتا۔

پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا  
دراوڑ، اُتکل، بنگ،

وڈھیہ، ہماچل، یمن، گنگا،  
اُچھل جل دھ ترنگ،  
توشہ نامے جاگے، توشہ آسشس ماگے،  
گا ہے توجیہ گاتھا،

جَن گَن منگل دایک جیہ ہے،  
بھارت - بھاگیہ ودھاتا۔

جیہ ہے، جیہ ہے، جیہ ہے،  
جیہ جیہ جیہ جیہ ہے۔

## عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم و گونا گوں ورثے پر  
فخر محسوس کرتا ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا اور ہر ایک  
سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا  
ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

## پیش لفظ

عزیز طلبہ!

دسویں جماعت کے نصاب میں آپ کا استقبال ہے۔

ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II، کی درسی کتابوں کا آپ اس سال مطالعہ کریں گے۔

ریاضی حصہ II میں علم ہندسہ، علم مثلث، محدودی علم ہندسہ اور مساحت جیسے اہم حصے شامل ہیں۔ نویں جماعت تک متعارف کرائے گئے موضوعات کا آپ کو مزید مطالعہ کرنا ہے، کاروبار میں استعمال سے دی ہوئی مثالوں کے ذریعے ان کی وضاحت ہوگی۔ جہاں جہاں نیا حصہ، ضابطے یا اطلاق ہے، وہاں آسان، سہل وضاحت اور تشریح دی ہوئی ہے۔ ہر باب میں نمونے کی مثالیں تشریح کے ساتھ حل کی گئی ہیں، مشق و اعادہ کے لیے مثالیں دی ہوئی ہیں اس کے علاوہ ذہین و پُر جوش طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز سوالات تارے کے اضافی نشان سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ عام طلبہ کو اگر دسویں کے بعد ریاضی کا مطالعہ نہیں کرنا ہو تب بھی انھیں بنیادی ریاضیاتی تصورات سمجھنا چاہیے تاکہ وہ دیگر شعبوں میں کام کے دوران ضرورت کے مطابق ریاضی کا استعمال کر سکیں۔ انھیں اتنا علم اس کتاب کے ذریعے مل جائے گا۔ عنوان 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت دیا ہوا مواد دسویں کے بعد بھی ریاضی کے مطالعے کے خواہش مند طلبہ کو مہارت حاصل کرنے میں فائدہ مند ثابت ہوگا، لہذا ایسے طلبہ کو اس کا مطالعہ ضرور کرنا چاہیے۔ پوری کتاب کم از کم ایک مرتبہ ضرور پڑھ کر سمجھنے کی کوشش کریں۔

دسویں کا امتحان اہمیت کا حامل مانا جاتا ہے۔ اس امتحان کا تناؤ لیے بغیر اچھا مطالعہ کر کے من چاہی کامیابی حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو

نیک خواہشات!

ڈاکٹر سنیل مگر

ڈائریکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پبلیک نرمتی

واہیاس کرم سنشو دھن منڈل، پونہ

پونہ۔

تاریخ: ۱۸ مارچ ۲۰۱۸ء، گڈی پاڑوا

بھارتیہ سور: ۲۷ / پھاگن ۱۹۳۹

دسویں جماعت ریاضی حصہ II نصابِ تعلیم سے ذیل کی صلاحیتیں طلبہ میں فروغ پائیں گی۔

متوقع صلاحیتیں	اکائی	زمرہ
<ul style="list-style-type: none"> <li>• متشابہ مثلثوں کے خواص، متماثل مثلثوں کے خواص اور فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کر کے مثالیں حل کرنا۔</li> <li>• متشابہ مثلثوں کی تشکیل کرنا۔</li> <li>• دائرے کے وتر اور مماس کے خواص کا استعمال کرنا۔</li> <li>• دائرے کے مماس کی تشکیل کرنا۔</li> </ul>	<p>1.1 متشابہ مثلث</p> <p>1.2 دائرہ</p>	1. علم ہندسہ
<ul style="list-style-type: none"> <li>• دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔</li> <li>• تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین معلوم کرنا۔</li> <li>• خط کی ڈھلان معلوم کرنا۔</li> </ul>	2.1 محددی علم ہندسہ	2. محددی علم ہندسہ
<ul style="list-style-type: none"> <li>• دائرہ کے قوس کی لمبائی معلوم کرنا۔</li> <li>• دائرہ کے تراشے اور قطعہ دائرہ کا رقبہ معلوم کرنا۔</li> <li>• دیے ہوئے سہ ابعادی اجسام کی سطحوں کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا۔</li> </ul>	3.1 سطح کا رقبہ اور حجم	3. مساحت
<ul style="list-style-type: none"> <li>• علم مثلث کی متماثلہ مساوات استعمال کر کے مثالیں حل کرنا۔</li> <li>• درخت کی اونچائی معلوم کرنا، ندی کے پاٹ کی چوڑائی معلوم کرنا، ایسی نوعیت کے مسائل کے لیے علم مثلث کا استعمال کرنا۔</li> </ul>	4.1 علم مثلث	4. علم مثلث

## اساتذہ کے لیے ہدایات

پہلے کتاب کا اچھی طرح سے مطالعہ کر کے اسے سمجھ لیں۔ مختلف موضوعات کی وضاحت، تشریح اور ضابطوں کی تصدیق کرنے جیسی اہم باتوں کے لیے عملی کاموں کی مدد لیں۔

تجربات کے ذریعے قدر پیمائی کریں۔ جس کے لیے عملی کام کا استعمال کریں۔ آزادانہ طور پر غور کرنے پر طلبہ کی حوصلہ افزائی کریں۔ مختلف طریقوں سے لیکن منطقی طریقے سے مثالیں حل کرنے والے طلبہ کی ہمت افزائی کریں اور انہیں شاباشی دیں۔ علم ہندسہ کے مسئلوں کے بیانات ذہن میں رکھ کر ان کا اطلاق کر کے مثالیں حل کرنے کی مہارت کو فروغ دینے کے لیے کتابوں میں دیے ہوئے عملی کام کے علاوہ مزید عملی کام دیے جاسکتے ہیں۔

## تجربات کی فہرست کا نمونہ

1. دفتی کا ایک مثلثی ٹکڑا کاٹ لیجیے۔ میز پر ایک موم بتی یا چھوٹا چراغ جلائیے۔ دیوار اور چراغ یا موم بتی کے درمیان مثلثی ٹکڑا رکھیے۔ اس کے سایے کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا سایہ اور اصل مثلث متشابہ ہیں۔ اسے طے کیجیے۔ (اصل مثلث اور اس کا سایہ ایک دوسرے کے متشابہ ہونے کے لیے کیا احتیاط برتیں گے؟)
2. ایک جیسی پیمائش کے دو قائمہ زاویہ مثلث کاٹ لیجیے۔ مثلث کے راسوں کو اور دو اضلاع کو A، B، C نام دیجیے۔ ان میں سے ایک قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر پر عمود کھینچیے۔ عمود کے پایہ کو 'D' نام دیجیے۔ عمود پر سے کاٹ کر دو چھوٹے مثلث بنائیے۔ تینوں قائمہ الزاویہ مثلث کس ایک سے ایک مطابقت سے ایک دوسرے کے متشابہ ہوتے ہیں اسے لکھیے۔
3. ایک دائرہ بنائیے۔ اس کا اندرونی حصہ، بیرونی حصہ اور دائرے پر ہر ایک میں ایک، اس طرح تین نقاط لیجیے۔ ان تمام نقاط میں سے ہر ایک نقطے سے دائرے پر کتنے مماس کھینچے جاسکتے ہیں؟ اس کی جدول بنائیے۔ جدول میں کچی اشکال بنا کر دکھائیے۔
4. 'دو نقاط سے بے شمار دائرے کھینچے جاسکتے ہیں' اسے دکھانے کے لیے دیے ہوئے نقاط سے کم سے کم 5 مختلف دائرے کھینچیے۔
5. دائرے میں کیل ٹھونکے ہوئے جیو بورڈ لیجیے۔ ربر بینڈ کا استعمال کر کے ذیل میں سے کسی بھی ایک مسئلے کے لیے جیو بورڈ پر شکل بنائیے۔  
(1) قوسی زاویے (2) مماس۔ قاطع۔ زاویے کا مسئلہ (3) مخالف قطعہ دائرے میں زاویے کا مسئلہ
6. ایک دائرے اور ایک زاویے کا نمونہ (ماڈل) لے کر مختلف حالتوں میں قطعہ دائرہ بنائیے۔ یہ تمام اشکال اپنی بیاض میں بنائیے۔
7. ایک زاویے کے چار مساوی حصے کیجیے۔ کمپاس (پرکار) اور پٹی (اسکیل) کا استعمال کیجیے۔
8. ایک بیکر لیجیے اس کی اونچائی اور پینڈے کا نصف قطر ناپیے۔ اس میں کتنا پانی سمائے گا، اسے ضابطے کی مدد سے معلوم کیجیے۔
9. مخروطی شکل کا کاغذی پیالہ لیجیے۔ اس کے پینڈے اور اوپری دائرے کا نصف قطر ناپیے۔ پیالے کی اونچائی (بلندی) ناپیے۔ اس پیالے میں کتنا پانی سمائے گا۔ ضابطے کی مدد سے معلوم کیجیے۔ اسے پانی سے مکمل بھر کر پانی کی جسامت معلوم کیجیے۔ پانی کی سمائی (حجم) اور ضابطے سے معلوم کردہ حجم کے درمیان موازنہ کر کے تصدیق کیجیے۔
10. موٹی دفتی کے دو متشابہ مثلث کاٹ لیجیے ان کے رتبوں کی نسبت (i) کیا ان کے احاطے کے مربع کے تناسب میں ہے؟ یا (ii) ان کے وسطانیوں کے مربعوں کے تناسب میں ہے؟ خود اپنے طور پر ناپ کر طے کیجیے۔

## فہرست

صفحات	ابواب
01 سے 29	1. تشابہت
30 سے 46	2. فیثاغورث کا مسئلہ
47 سے 90	3. دائرہ
91 سے 99	4. ہندسی عمل
100 سے 123	5. محدود علم ہندسہ
124 سے 139	6. علم مثلث
140 سے 163	7. مساحت
164 سے 168	● جوابات کی فہرست

## آئیے سیکھیں



- دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت
- تناسب کے بنیادی مسئلے کا عکس
- تین متوازی خطوط کے ذریعے خط تقاطع پر بننے والے حائل قطعات کی نسبت
- مثلثوں کی مشابہت کی آزمائشیں (کسوٹیاں)
- تناسب کا بنیادی مسئلہ
- مثلث کے زاویے کے ناصف کی خصوصیت
- مشابہ مثلثوں کے رقبوں کی خصوصیت

## آئیے ذرا یاد کریں



ہم نسبت اور تناسب کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ دو اعداد  $a$  اور  $b$  کی نسبت  $\frac{a}{b}$  ہے۔ اس بیان کو اعداد  $a$  اور  $b$  کی  $m : n$  کی نسبت میں لکھتے ہیں۔

اس تصور کے لیے ہم عموماً مثبت حقیقی اعداد پر غور کرتے ہیں، یہ ہمیں معلوم ہے کہ قطعہ خط کی لمبائی اور کسی بھی شکل کا رقبہ مثبت حقیقی عدد ہوتا ہے۔ ہمیں مثلث کے رقبے کا ضابطہ معلوم ہے۔

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} \times \frac{1}{2} = \text{مثلث کا رقبہ}$$

## آئیے سمجھ لیں

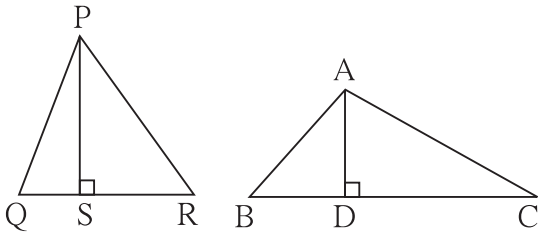


### دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت (Ratio of areas of two triangles)

کوئی بھی دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

مثال:  $\triangle ABC$  کا قاعدہ  $BC$  ہے اور ارتفاع  $AD$  ہے۔

$\triangle PQR$  کا قاعدہ  $QR$  ہے اور ارتفاع  $PS$  ہے۔



شکل 1.2

شکل 1.1

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$

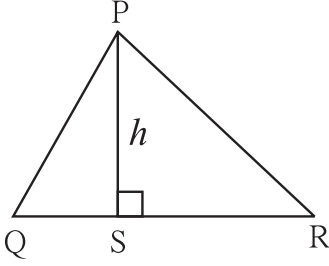
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

اس بناء پر دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے قاعدے اور نظیری ارتفاعوں کے حاصل ضرب کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

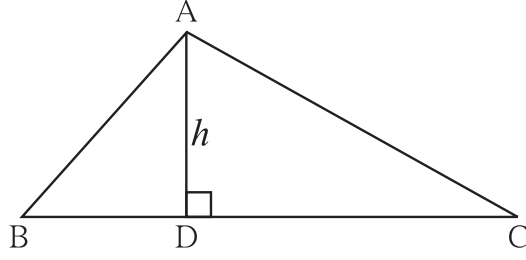
$$\frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2} = \text{اگر ایک مثلث کا قاعدہ } b_1 \text{ اور ارتفاع } h_1 \text{ ہو اور دوسرے مثلث کا قاعدہ } b_2 \text{ اور ارتفاع } h_2 \text{ ہو تو ان کے رقبوں کی نسبت}$$

یہاں دو مثلثوں کے رقبوں کے تعلق سے کچھ شرائط رکھ کر دیکھتے ہیں۔

**شرط 1 :** دونوں مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہوں تب



شکل 1.4



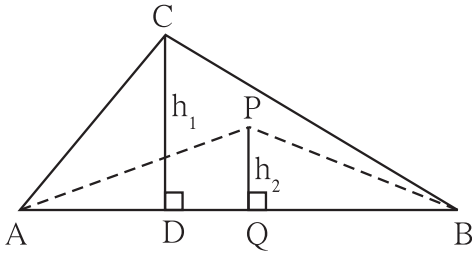
شکل 1.3

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

**خصوصیت :** مساوی ارتفاع والے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں۔

**شرط 2 :** دونوں مثلثوں کے قاعدے مساوی ہوں تب



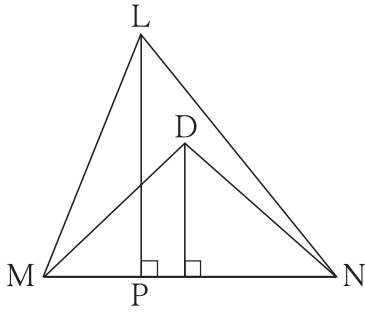
شکل 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

**خصوصیت :** مساوی لمبائی کے قاعدے کے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری ارتفاعوں کے تناسب میں ہوتے ہیں۔

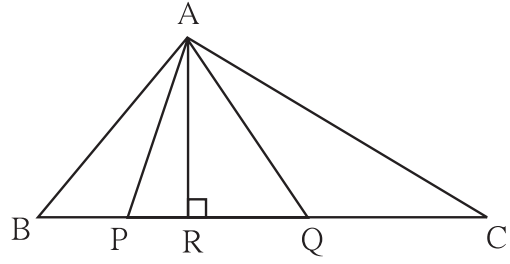
عملی کام : درج ذیل خانوں کو مناسب طور سے پر کیجیے۔



شکل 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



شکل 1.6

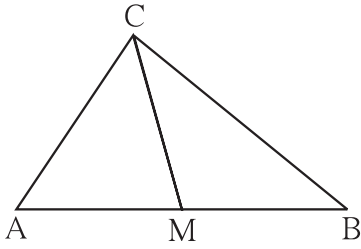
$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(iii) نقطہ M قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے۔

$\Delta ABC$  کا وسطانیہ، قطعہ CM ہے۔

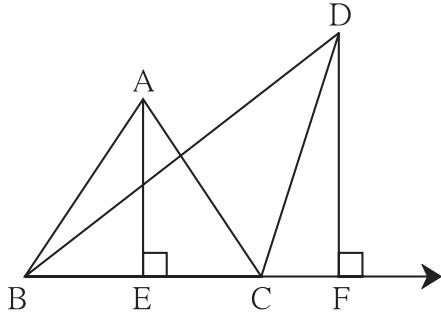
$$\begin{aligned} \therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} &= \frac{\square}{\square} \\ &= \frac{\square}{\square} = \square \end{aligned}$$

وجہ لکھیے۔



شکل 1.8

حل کردہ مثالیں



شکل 1.9

مثال (1) : متصلہ شکل میں

قطعہ  $BC \perp AE$  قطعہ،  $BC \perp DF$  قطعہ

تو  $DF = 6$ ،  $AE = 4$

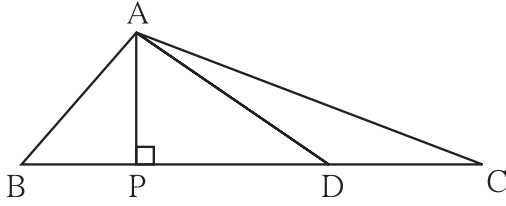
معلوم کیجیے۔  $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

حل : (مساوی قاعدوں والے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری ارتفاع کے تناسب میں ہوتے ہیں) ...

مثال (2) :  $\triangle ABC$  کے ضلع BC پر نقطہ D اس طرح ہے کہ  $BC = 15$  ،  $DC = 6$  تو  $A(\triangle ABD) : A(\triangle ABC)$  اور  $A(\triangle ABD) : A(\triangle ADC)$  معلوم کیجیے۔



شکل 1.10

حل :  $\triangle ABC$  ،  $\triangle ADC$  ،  $\triangle ABD$  تینوں مثلثوں کا مشترک راس A ہے اور ان کے قاعدے ایک ہی خط میں واقع ہیں۔ یعنی تینوں مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں۔

$$DC = 6 ، BC = 15$$

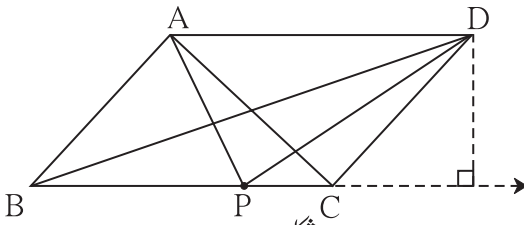
$$\therefore BD = BC - DC = 15 - 6 = 9$$

$$\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ABC)} = \frac{BD}{BC} \dots (\text{مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں})$$

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ADC)} = \frac{BD}{DC} \dots (\text{مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں})$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$



شکل 1.11

مثال (3) :  $\square ABCD$  ایک متوازی الاضلاع ہے P ، ضلع BC پر کوئی ایک نقطہ ہے تو مساوی رقبے کے مثلثوں کی دو جوڑیاں معلوم کیجیے۔

حل :  $\square ABCD$  ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$$\therefore AD \parallel BC \text{ اور } AB \parallel DC$$

$\triangle ABC$  اور  $\triangle BDC$  پر غور کیجیے۔

یہ دونوں مثلث دو متوازی خطوط کے درمیان بنائے گئے ہیں۔

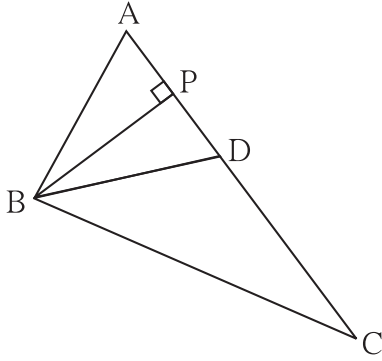
اس لیے متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ دونوں مثلثوں کے ارتفاع کو ظاہر کرے گا۔ اب  $\triangle ABC$  اور  $\triangle BDC$  کا قاعدہ BC مساوی ہے اور ارتفاع بھی مساوی ہے۔

$$\therefore A(\triangle ABC) = A(\triangle BDC)$$

$\triangle ABC$  اور  $\triangle ABD$  میں AB ، مساوی قاعدہ ہے

اور اونچائی بھی مساوی ہے۔

$$\therefore A(\triangle ABC) = A(\triangle ABD)$$



شکل 1.12

مثال (4) : متصلہ شکل میں  $\triangle ABC$  کے ضلع  $AC$  پر نقطہ  $D$  اس طرح ہے کہ  
 $BP \perp AC$ ،  $DC = 9$ ،  $AC = 16$  تو ذیل کی نسبتیں معلوم کیجیے۔

i)  $\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ABC)}$       ii)  $\frac{A(\triangle BDC)}{A(\triangle ABC)}$

iii)  $\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle BDC)}$

حل :  $\triangle ABC$  کے ضلع  $AC$  پر نقاط  $P$  اور  $D$  ہیں یعنی  $\triangle ABD$ ،  $\triangle BDC$ ،

$\triangle APB$ ،  $\triangle ABC$  ان تمام مثلثوں کا مشترک راس  $B$  ہے اور اضلاع  $AD$ ،

$DC$ ،  $AC$ ،  $AP$  ایک ہی خط میں واقع ہیں۔ اس لیے ان تمام مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں۔

لہذا ان مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوں گے۔

$$AC = 16, DC = 9$$

$$\therefore AD = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore \frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16} \quad \dots \text{ (مساوی ارتفاع کے مثلث)}$$

$$\frac{A(\triangle BDC)}{A(\triangle ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16} \quad \dots \text{ (مساوی ارتفاع کے مثلث)}$$

$$\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9} \quad \dots \text{ (مساوی ارتفاع کے مثلث)}$$

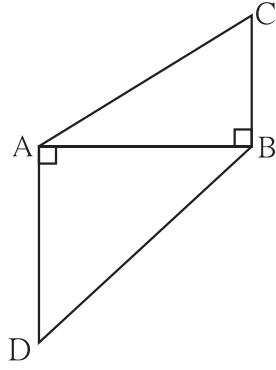
اسے ذہن نشین کر لیں



- دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے قاعدے اور نظیری ارتفاع کے حاصل ضرب کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔
- مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔
- مساوی قاعدوں کے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری ارتفاعوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔

### مشقی سیٹ 1.1

1. ایک مثلث کا قاعدہ 9 اور ارتفاع 5 ہے۔ دوسرے مثلث کا قاعدہ 10 اور ارتفاع 6 ہے۔ تو ان مثلثوں کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔



شکل 1.13

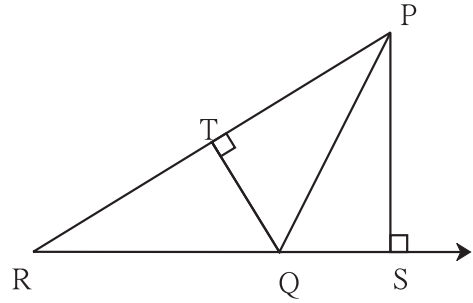
2. دی ہوئی شکل 1.13 میں  $DA \perp AB$ ،  $BC \perp AB$  میں

معلوم کیجیے۔  $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$  ہو تو  $AD = 8$ ،  $BC = 4$

3. متصلہ شکل میں قطعہ  $RQ \perp PS$  قطعہ،

قطعہ  $PR \perp QT$  اگر  $QR = 6$ ،  $PS = 6$ ،

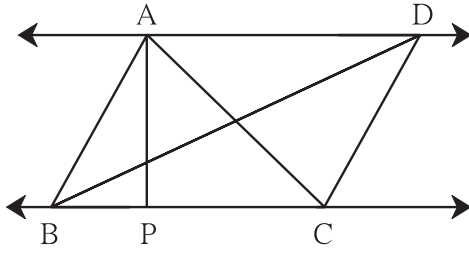
معلوم کیجیے۔  $PR = 12$  ہو تو  $QT$



شکل 1.14

4. متصلہ شکل میں  $AD \parallel BC$ ،  $AP \perp BC$  ہو تو

معلوم کیجیے۔  $A(\Delta ABC) : A(\Delta BCD)$



شکل 1.15

5. متصلہ شکل میں،

$AD \perp BC$ ،  $PQ \perp BC$

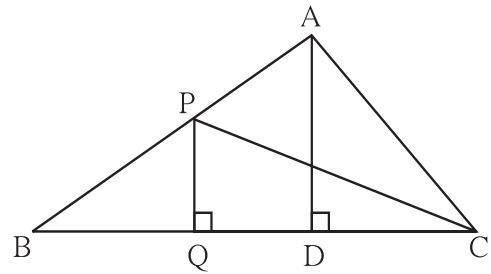
تو درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

i)  $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$

ii)  $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

iii)  $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$

iv)  $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

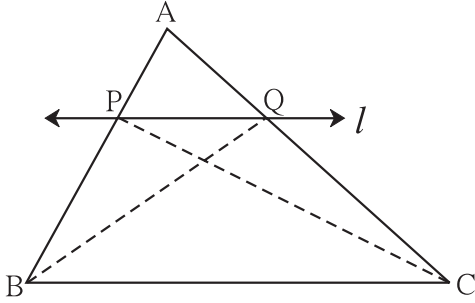


شکل 1.16



**متناسبت کا بنیادی مسئلہ (Basic Proportionality Theorem)**

مسئلہ : اگر ایک خط کسی مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہو اور باقی دو اضلاع کو دو متفرق نقاط پر قطع کرے تب وہ خط ان اضلاع کو تناسب میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل 1.17

دیا ہوا ہے :  $\triangle ABC$  میں BC قطعہ  $l \parallel$  خط اور خط  $l$  ضلع BC

کو P پر اور ضلع AC کو Q پر قطع کرتا ہے۔

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ ثابت کرنا ہے :}$$

عمل : قطعہ PC اور قطعہ BQ کھینچیں۔

ثبوت :  $\triangle APQ$  اور  $\triangle PQB$  مساوی ارتفاع کے مثلث ہیں۔

$$\dots \text{ (مساوی ارتفاع کے مثلث) } \dots \text{ (I)}$$

$$\therefore \frac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle PQB)} = \frac{AP}{PB}$$

$$\text{اسی طرح , } \frac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle PQC)} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\dots \text{ (مساوی ارتفاع کے مثلث) } \dots \text{ (II)}$$

$\triangle PQB$  اور  $\triangle PQC$  کا مساوی قاعدہ ہے اور  $BC \parallel$  قطعہ PQ قطعہ

یعنی  $\triangle PQB$  اور  $\triangle PQC$  کے ارتفاع مساوی ہیں۔

$$\therefore A(\triangle PQB) = A(\triangle PQC) \dots \text{ (III)}$$

$$\therefore \frac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle PQB)} = \frac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle PQC)}$$

$$\dots \text{ [(I) اور (III) سے]}$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\dots \text{ [(I) اور (II) سے]}$$

**متناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس (Converse of B.P.T)**

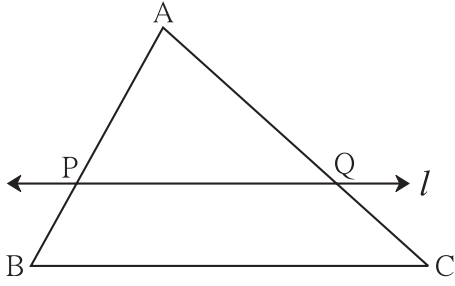
مسئلہ : ایک خط اگر مثلث کے کسی بھی دو ضلعوں کو متفرق نقاط پر قطع کرتے ہوئے یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے

متوازی ہوتا ہے۔

$\triangle ABC$  کے ضلع AB اور ضلع AC کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے اور

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ ہو تو } BC \parallel \text{ خط } l$$

اس مسئلے کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دیا جاسکتا ہے۔



شکل 1.18

عملی کام :

●  $\triangle ABC$  کوئی ایک مثلث بنائیے۔

● مثلث کے  $\angle B$  کی تنصیف کیجیے اور اس کا ناصف ضلع AC کو جس نقطے پر قطع کرتا ہے اسے D نام دیجیے۔

● اضلاع کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

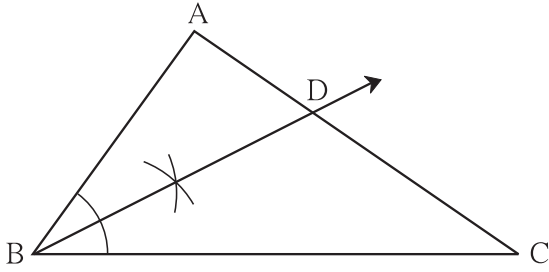
AB =  سم ، BC =  سم

AD =  سم ، DC =  سم

●  $\frac{AD}{DC}$  اور  $\frac{AB}{BC}$  نسبتیں لکھیے۔

● دونوں نسبتیں تقریباً مساوی ہیں۔ یہ نتیجہ اخذ کیجیے۔

● اسی مثلث کے کسی دوسرے زاویے کی تنصیف کیجیے اور مندرجہ بالا طریقے پر نسبتیں معلوم کیجیے۔ یہ نسبتیں بھی مساوی ہوتی ہیں اس نتیجہ کو اخذ کیجیے۔



شکل 1.19

آئیے سمجھ لیں



مثلث کے زاویے کے ناصف کی خصوصیت (Property of angle Bisector of a triangle)

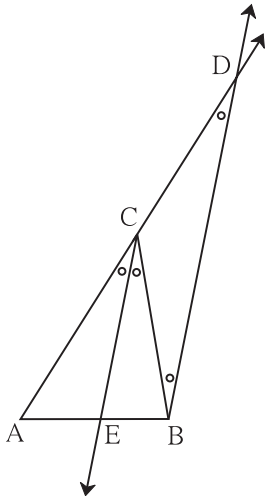
مسئلہ : مثلث کے زاویے کا ناصف اُس زاویے کے مقابل کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

دیا ہوا ہے :  $\triangle ABC$  میں  $\angle C$  کا ناصف قطعہ AB کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرنا ہے :  $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

عمل : نقطہ B سے گزرنے والی شعاع CE کے متوازی ایک خط

کھینچیے جو AC کو بڑھانے پر نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔



شکل 1.20

ثبوت : شعاع BD || شعاع CE اور خط تقاطع AD خط تقاطع ہے۔

$$\therefore \angle ACE = \angle CDB \quad \dots \text{ (I) (نظیری زاویے)}$$

اسی طرح BC کو خط تقاطع لیا جائے تو

$$\angle ECB \cong \angle CBD \quad \dots \text{ (II) (متبادلہ زاویے)}$$

$$\text{لیکن, } \angle ACE \cong \angle ECB \quad \dots \text{ (III) (دیا ہوا ہے)}$$

$$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB \quad \dots \text{ [بیانات (I)، (II) اور (III) سے]}$$

میں،  $\triangle CBD$

$$\text{ضلع } CB \cong \text{ضلع } CD \quad \dots \text{ (متماثل زاویوں کے مقابل کے اضلاع)}$$

$$\therefore CB = CD \quad \dots \text{ (IV)}$$

اب  $\triangle ABD$  میں،

$$\text{ضلع } EC \parallel \text{ضلع } BD \quad \dots \text{ (عمل کے ذریعے)}$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD} \quad \dots \text{ (تناسبت کا بنیادی مسئلہ)}$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB} \quad \dots \text{ [بیانات (IV) اور (V) سے]}$$

مزید معلومات کے لیے :

مندرجہ بالا مسئلے کے ثبوت کو دوسرے طریقے سے آپ خود لکھیے۔

اس کے لیے شکل 1.21 میں دکھائے ہوئے طریقے سے

$\triangle ABC$  بنائیے۔  $DN \perp AC$  اور  $DM \perp AB$

کھینچیے۔

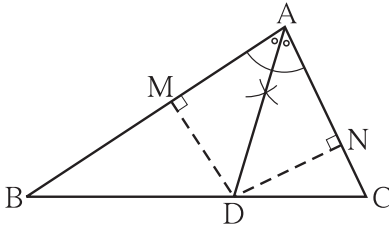
(I) مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے

تناسب میں ہوتے ہیں۔

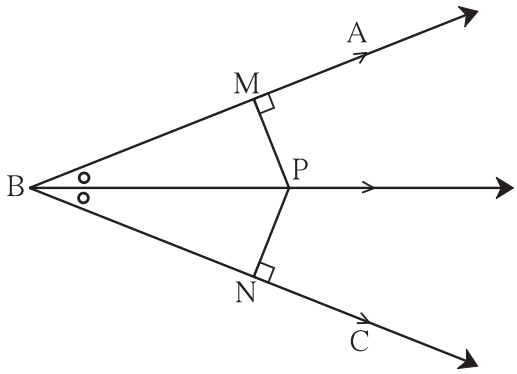
(II) زاویے کے ناصف پر واقع ہر نقطہ زاویہ کی ساقین سے ہم فاصلہ

ہوتا ہے۔

ان خصوصیات کا استعمال کیجیے۔



شکل 1.21



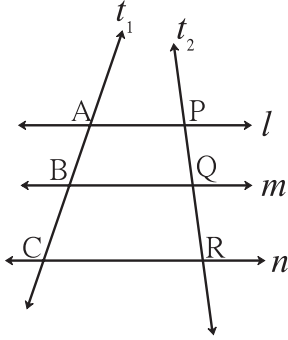
شکل 1.22

مشلت کے زاویے کے ناصف کی خصوصیت کا عکس (Converse of angle bisector of a triangle) :

$\triangle ABC$  کے ضلع BC پر اگر نقطہ D اس طرح ہو کہ  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  تو  $\angle BAC$  کی ناصف شعاع AD ہے۔

**عملی کام :** تین متوازی خطوط کے ذریعے ان کے خط تقاطع پر بننے والے حائل قطعات کی خصوصیت

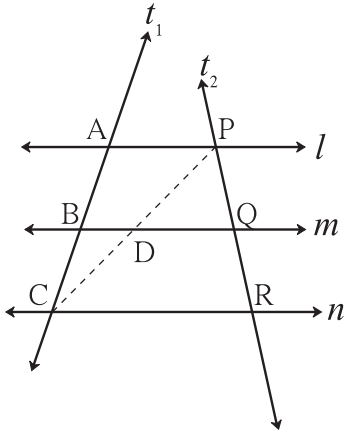
(Property of three parallel lines and their transversals)



شکل 1.23

- تین متوازی خطوط کھینچیے۔
- انہیں  $n, m, l$  نام دیجیے۔
- $t_1$  اور  $t_2$  دو خطوط تقاطع کھینچیے۔
- خط تقاطع  $t_1$  پر بننے والے حائل قطعات AB اور BC ہیں۔
- خط تقاطع  $t_2$  پر بننے والے حائل قطعات PQ اور QR ہیں۔
- $\frac{AB}{BC}$  اور  $\frac{PQ}{QR}$  نسبتیں معلوم کیجیے جو تقریباً مساوی ہیں اس کا نتیجہ اخذ کیجیے۔

مسئلہ : تین متوازی خطوط کے ذریعے ایک خط تقاطع پر بننے والے حائل قطعات کی نسبت، ان ہی متوازی خطوط کے ذریعے کسی دوسرے خط تقاطع پر بننے والے نظیری حائل قطعات کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 1.24

دیا ہوا ہے : خط  $m \parallel$  خط  $m \parallel$  خط  $l$  خط

$t_1$  اور  $t_2$  خطوط تقاطع ہیں۔

خط تقاطع  $t_1$  ان متوازی خطوط کو بالترتیب A, B, C پر اور خط تقاطع  $t_2$  ان متوازی خطوط کو بالترتیب P, Q, R پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے :  $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

ثبوت : قطعہ PC کھینچیے۔ جو خط  $m$  کو D پر قطع کرتا ہے۔

$\triangle ACP$  میں،  $BD \parallel AP$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} \quad \dots \text{(I) (متناسبت کی بنیادی مسئلہ) } \dots$$

$\triangle CPR$  میں،  $DQ \parallel CR$

$$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR} \quad \dots \text{(II) (متناسبت کی بنیادی مسئلہ) } \dots$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR} \quad \dots \text{[سے (I) اور (II)]}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$$

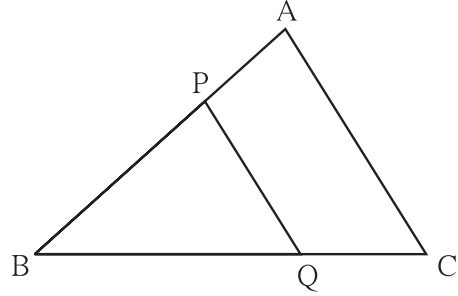
اسے ذہن نشین کر لیں



(1)  $\triangle ABC$  میں اگر  $B - P - A$  اور  $B - Q - C$

قطعہ  $PQ \parallel$  قطعہ  $AC$  ہوتو

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$

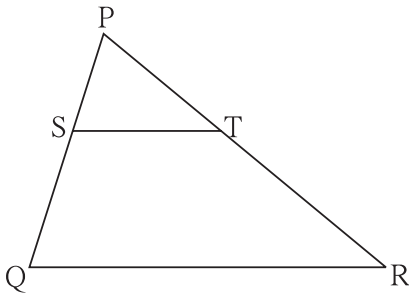


شکل 1.25

(2)  $\triangle PQR$  میں اگر  $P - S - Q$  اور  $P - T - R$

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$$

تو قطعہ  $ST \parallel$  قطعہ  $QR$

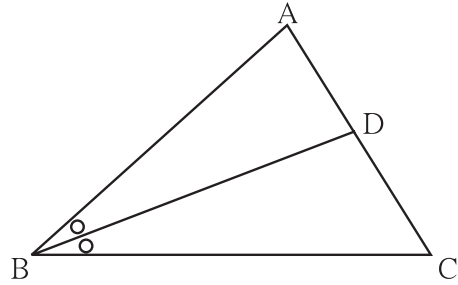


شکل 1.26

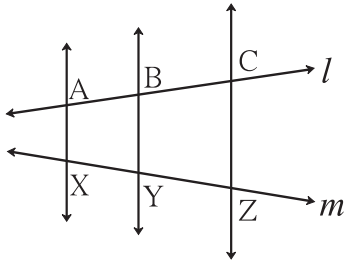
(3)  $\triangle ABC$  کے  $\angle ABC$  کا  $BD$  ناصف ہے اور اگر

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

تو  $A - D - C$  ہوتو



شکل 1.27



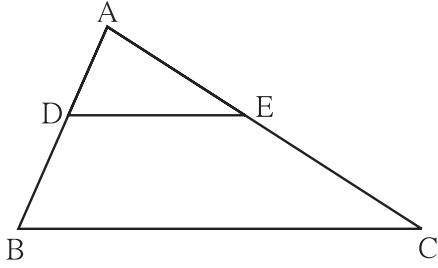
شکل 1.28

(4) اگر خط  $AX \parallel$  خط  $BY \parallel$  خط  $CZ$

اور خط  $l$  اور خط  $m$  خطوط تقاطع انہیں بالترتیب  $A, B, C$

اور  $X, Y, Z$  پر قطع کرتے ہوں تو

$$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$$



شکل 1.29

مثال (1) : (شکل 1.29)،  $\triangle ABC$  میں  $DE \parallel BC$

اگر  $DB = 5.4$  سم،  $AD = 1.8$  سم،  $EC = 7.2$  سم

تو  $AE$  معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle ABC$  میں،

$$DE \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{... (تناسبت کا بنیادی مسئلہ)}$$

$$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$$

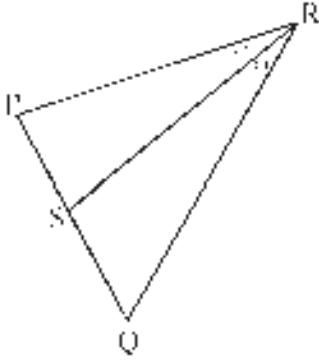
$$\therefore AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$$

$$\therefore AE = 2.4 \text{ سم}$$

مثال (2) :  $\triangle PQR$  میں  $\angle R$  کا نصف قطعہ  $RS$  ہے (شکل 1.30)۔ اگر  $PR = 15$ ،  $RQ = 20$ ،  $PS = 12$  تو

$SQ$  معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle PQR$  میں  $\angle R$  کا نصف قطعہ  $RS$  ہے۔



شکل 1.30

... (مثلث کے زاویے کے نصف کی خصوصیت)

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$$

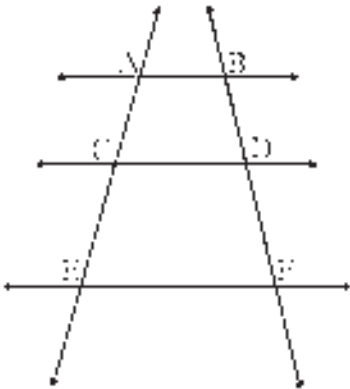
$$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$$

$$\therefore SQ = 16$$

عملی کام : دی ہوئی شکل 1.31 میں،  $AB \parallel CD \parallel EF$  اگر  $AC = 5.4$ ،

$BD = 7.5$ ،  $CE = 9$  تو خالی چوکون مناسب طور پر مکمل کر کے  $DF$  معلوم کیجیے۔

حل :  $AB \parallel CD \parallel EF$

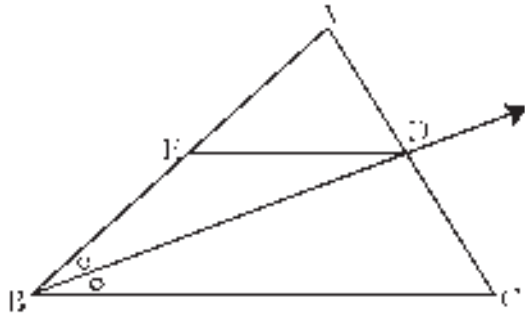


شکل 1.31

... ( )

$$\frac{AC}{\square} = \frac{\square}{DF}$$

$$\frac{5.4}{9} = \frac{\square}{DF} \quad , \quad \therefore DF = \square$$



شکل 1.32

عملی کام :  $\triangle ABC$  میں،  $\angle ABC$  کی ناصف شعاع BD ہے۔

تو  $A - E - B$  قطعہ،  $DE \parallel BC$  ضلع،  $A - D - C$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB} \text{ ثابت کیجیے کہ}$$

ثبوت :  $\triangle ABC$  میں،  $\angle B$  کی ناصف شعاع BD ہے۔

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \quad \dots \text{ (I)}$$

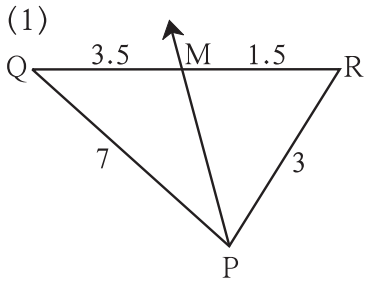
$\triangle ABC$  میں،  $DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB} \quad \dots \text{ (II)}$$

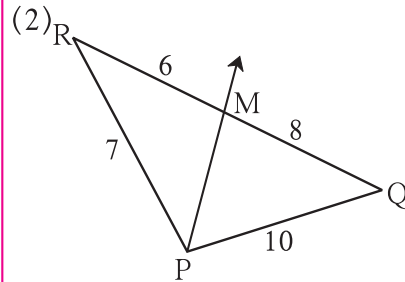
$$\frac{AB}{EB} = \frac{AB}{EB} \quad \dots \text{ [ (I) اور (II) سے ]}$$

## مشقی سیٹ 1.2

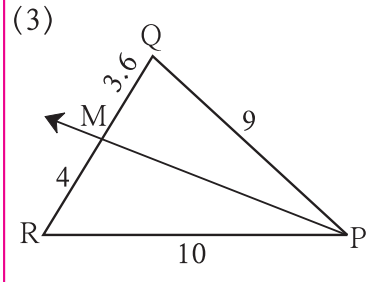
1. ذیل میں کچھ مثلث اور قطعات کی لمبائیاں دی ہوئی ہیں۔ ان کی مدد سے بتائیے کہ کس شکل میں  $\angle QPR$  کی ناصف شعاع PM ہے۔



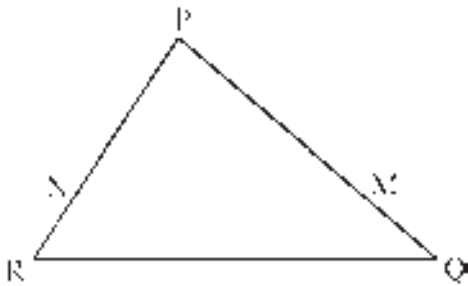
شکل 1.33



شکل 1.34



شکل 1.35

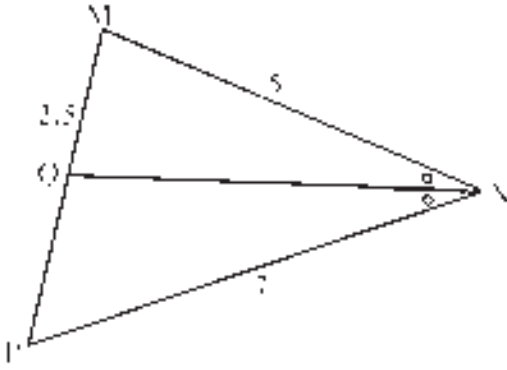


شکل 1.36

2.  $\triangle PQR$  میں  $PR = 20$ ،  $PQ = 25$ ،  $PM = 15$

$NR = 8$  تو خط NM، ضلع RQ کے متوازی ہے یا نہیں؟

اپنے جواب کی وجہ بھی لکھیے۔



شکل 1.37

3.  $\triangle MNP$  کے  $\angle N$  کا نصف NQ ہے۔

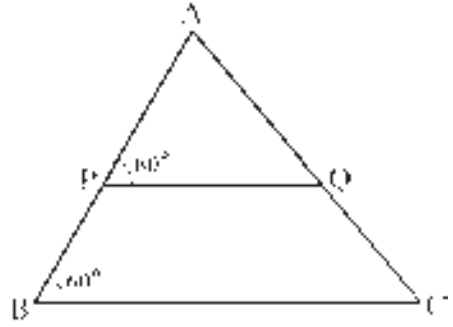
اگر  $MN = 5$ ،  $PN = 7$ ،  $MQ = 2.5$

ہو تو QP معلوم کیجیے۔

4. شکل 1.38 میں کچھ زاویوں کی پیمائشیں دی ہوئی ہیں۔

اس پر سے دکھائیے کہ

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$



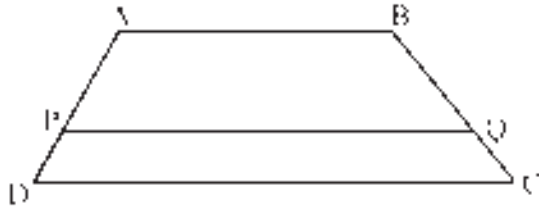
شکل 1.38

5. ذوزنقہ ABCD میں،

ضلع DC || قطعہ PQ || ضلع AB

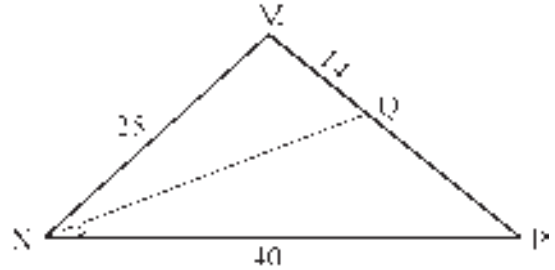
اگر  $AP = 15$ ،  $PD = 12$ ،  $QC = 14$  تو BQ

معلوم کیجیے۔



شکل 1.39

6. شکل میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے QP معلوم کیجیے۔

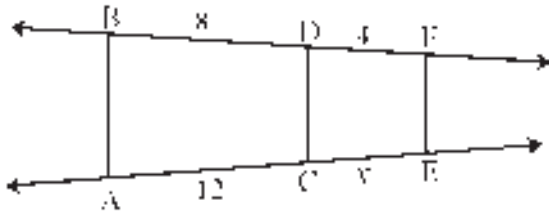


شکل 1.40

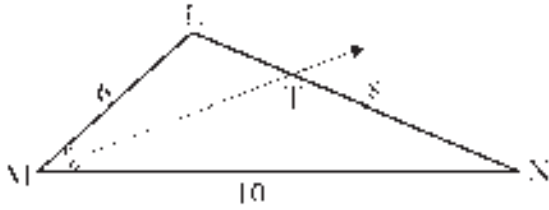
7. متصلہ شکل میں اگر

$AB \parallel CD \parallel FE$

تو x کی قیمت معلوم کیجیے اور AE معلوم کیجیے۔



شکل 1.41



شکل 1.42

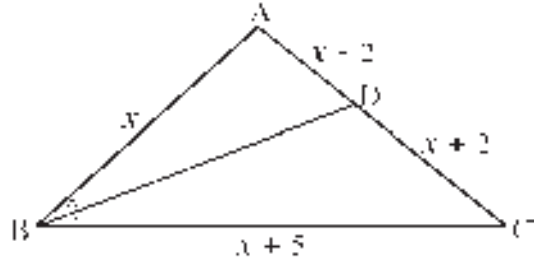
8.  $\triangle LMN$  میں،  $\angle LMN$  کی ناصف شعاع MT ہے۔

اگر  $LM = 6$ ،  $MN = 10$ ،  $TN = 8$  ہو تو LT معلوم کیجیے۔

9.  $\triangle ABC$  میں،  $\angle ABC$  کا ناصف قطعہ BD ہے۔

اگر  $AB = x$ ،  $BC = x + 5$ ،  $AD = x - 2$

تو  $DC = x + 2$  ہو تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔



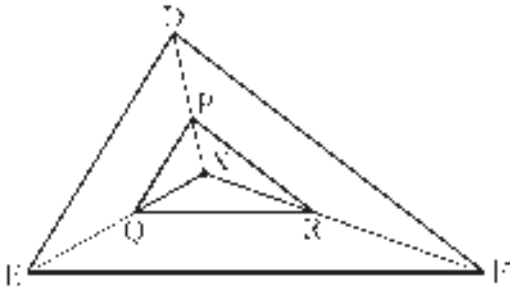
شکل 1.43

10. متصلہ شکل میں 1.44 میں مثلث کے اندرون میں کوئی ایک نقطہ X ہے۔

نقطہ X کو مثلث کے راسوں سے ملایا گیا ہے۔ اسی طرح،

قطعہ  $PQ \parallel$  قطعہ DE، قطعہ  $QR \parallel$  قطعہ EF

تو  $DF \parallel$  قطعہ PR ثابت کرنے کے لیے درج ذیل خانہ پر کیجیے۔



شکل 1.44

ثبوت:  $\triangle XDE$  میں،

$$PQ \parallel DE$$

$$\therefore \frac{XP}{\square} = \frac{\square}{QE}$$

...

... (I) (متناسبت کا بنیادی مسئلہ) ...

میں،  $\triangle XEF$

$$QR \parallel EF$$

$$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

...

... (II)

$$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

... [بیانات (I) اور (II) سے] ...

$\therefore$  قطعہ PR  $\parallel$  قطعہ DF

... (متناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس) ...

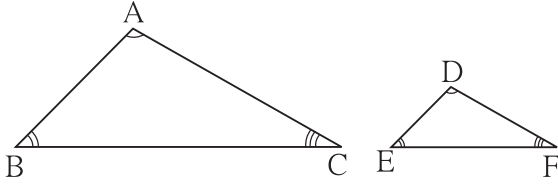
11\*  $\triangle ABC$  میں  $AB = AC$ ،  $\angle B$  اور  $\angle C$  کے ناصف ضلع AC اور ضلع AB کو بالترتیب نقاط D اور E پر قطع کرتے

ہیں تو ثابت کیجیے کہ  $ED \parallel BC$  قطعہ

آئیے ذرا یاد کریں



### متشابه مثلث (Similar triangles)



شکل 1.45

،  $\angle A \cong \angle D$  میں اگر  $\triangle DEF$  اور  $\triangle ABC$

اور  $\angle C \cong \angle F$ ،  $\angle B \cong \angle E$

$$\text{تو } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

$\triangle DEF$  اور  $\triangle ABC$  متشابه مثلث ہیں۔

اور اگر  $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEF$  متشابه ہوں تو اسے علامت ' ~ ' کا استعمال کر کے  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  لکھتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں

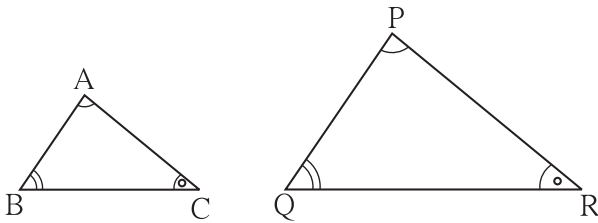


### مثلثوں کی متشابهت کی آزمائشیں (Tests for similarity of triangles)

دو مثلثوں کو متشابه ہونے کے لیے ان کے تینوں نظیری اضلاع کا تناسب میں ہونا اور تینوں نظیری زاویوں کا متماثل ہونا ضروری ہے۔ لیکن ان چھ شرائط میں سے کوئی تین شرائط بھی پوری ہوں تو باقی شرائط خود بخود پوری ہو جاتی ہیں، یعنی دو مثلثوں کو متشابه ہونے کے لیے کوئی تین ہی مخصوص شرائط پوری ہونا کافی ہیں۔ ان تینوں شرائط کی جانچ کریں تو وہ دونوں مثلث متشابه ہیں یا نہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ ایسی کافی شرائط کے سیٹ کو متشابهت کی آزمائشیں کہتے ہیں۔ یعنی دو مثلثوں کو متشابه دکھانے کے لیے یہ مخصوص شرائط کافی ہوتی ہیں۔

#### مثلثوں کی متشابهت کے لیے زا۔ زا۔ زا آزمائش (AAA Test for similarity of triangles) :

دو مثلثوں کے راسوں کے درمیان دی ہوئی ایک سے ایک کی مطابقت کے لحاظ سے بننے والے تینوں نظیری زاویے متماثل ہوں تو وہ مثلث متشابه ہوتے ہیں۔

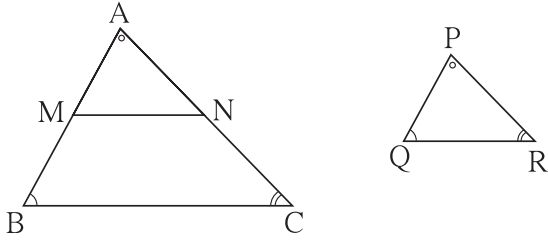


شکل 1.46

کی  $\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  میں  $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PQR$

مطابقت سے اگر  $\angle B \cong \angle Q$ ،  $\angle A \cong \angle P$

تو  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$   $\angle C \cong \angle R$



شکل 1.47

مزید معلومات کے لیے :

زا-زا آزمائش کا ثبوت :

دیا ہوا ہے :  $\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  میں،

$$\angle C \cong \angle R, \angle B \cong \angle Q, \angle A \cong \angle P$$

ثابت کرنا ہے :  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

ثبوت : فرض کریں  $\triangle ABC$ ،  $\triangle PQR$  سے بڑا ہے۔

AB پر ایک نقطہ M اور AC پر نقطہ N اس طرح لیجیے کہ  $AM = PQ$  اور  $AN = PR$

اس بنیاد پر  $\triangle AMN \cong \triangle PQR$  دکھائیے۔

اس کی مدد سے  $MN \parallel BC$  دکھایا جاسکتا ہے

اب تناسب کے بنیادی مسئلے کے رؤ سے

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\text{یعنی، } \frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN} \quad \dots \text{ (عمل عکس سے) ...}$$

$$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN} \quad \dots \text{ (عمل ترکیب سے) ...}$$

$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}, \text{ اسی طرح } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}, \therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

مثلثوں کی متشابہت کے لیے زا-زا آزمائش (AA Test for similarity of triangles) :

راسوں کے درمیان ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویوں کے متماثل

ہوں تو پہلے مثلث کا باقی ماندہ تیسرا زاویہ دوسرے مثلث کے باقی ماندہ تیسرے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

یہ ہمیں معلوم ہے کہ ایک مثلث کے دو زاویے، دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویوں کے متماثل ہوں تو بھی یہ شرط دونوں مثلثوں کو متشابہ

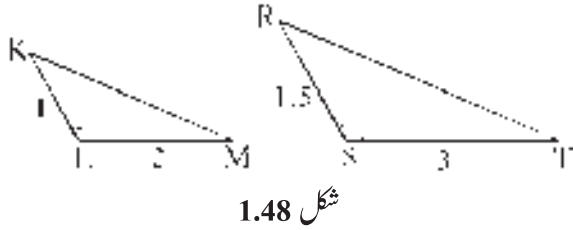
ہونے کے لیے کافی ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث متشابہ

ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو متشابہت کی زا-زا آزمائش کہتے ہیں۔

مثلثوں کی تشابہت کے لیے ضل-ضل-آزمائش (SAS Test for Smilarity of triangles) :

دو مثلثوں کے درمیان کوئی ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے اگر ان کے نظیری اضلاع کی دو جوڑیاں ایک ہی تناسب میں ہوں اور ان اضلاع کو شامل کرنے والے زاویے متماثل ہوں تو دونوں مثلث تشابہ ہوتے ہیں۔



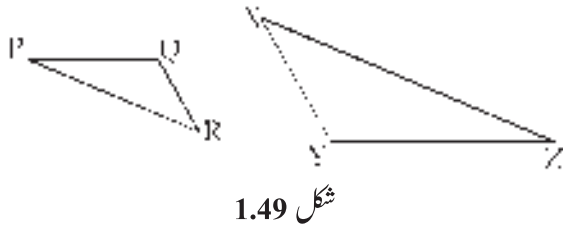
مثال :  $\triangle RST$  اور  $\triangle KLM$  میں

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}, \angle KLM \cong \angle RST$$

$$\therefore \triangle KLM \sim \triangle RST$$

مثلثوں کی تشابہت کے لیے ضل-ضل-آزمائش (SSS Test for similarity of Triangles) :

دو مثلثوں کے راسوں میں دی ہوئی کوئی ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسرے مثلث کے تینوں نظیری اضلاع کے تناسب میں ہوں تو دونوں مثلث تشابہ ہوتے ہیں۔ مثلثوں کی تشابہت کی اس آزمائش کو ضل-ضل-آزمائش کہتے ہیں۔



مثال :  $\triangle XYZ$  اور  $\triangle PQR$  میں،

$$\text{اگر } \frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

$$\triangle PQR \sim \triangle XYZ$$

تشابہ مثلثوں کی خصوصیات (Properties of similar triangles) :

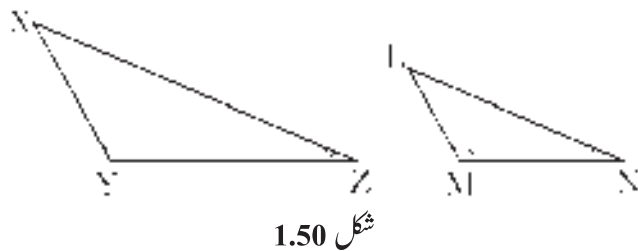
(انعکاسی خاصیت Reflexivity) ...  $\triangle ABC \sim \triangle ABC$  (1)

(تشانگلی خاصیت Symmetry) ... اگر  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  تب  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$  (2)

(3) اگر  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  اور  $\triangle DEF \sim \triangle GHI$  ہو تب  $\triangle ABC \sim \triangle GHI$

(عبوری خاصیت Transitivity) ...

حل کردہ مثالیں



مثال (1) :  $\triangle XYZ$  میں  $\angle Z = 30^\circ$ ،  $\angle Y = 100^\circ$ ،

$\triangle LMN$  میں  $\angle N = 30^\circ$ ،  $\angle M = 100^\circ$

تو کیا  $\triangle LMN$  اور  $\triangle XYZ$  تشابہ ہیں؟

اگر ہوں تو کس آزمائش کے لحاظ سے؟

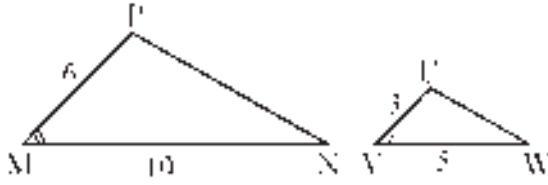
حل :  $\triangle LMN$  اور  $\triangle XYZ$  میں،

$$\angle Y = 100^\circ , \angle M = 100^\circ , \therefore \angle Y \cong \angle M$$

$$\angle Z = 30^\circ , \angle N = 30^\circ , \therefore \angle Z \cong \angle N$$

$$\therefore \triangle XYZ \sim \triangle LMN \quad \dots \text{(زا-زا آزمائش سے)}$$

مثال (2) : شکل 1.5 میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے بتائیے کیا دیے ہوئے مثلث متشابه ہیں؟ اگر ہوں تو کس آزمائش کی رؤ سے؟



شکل 1.51

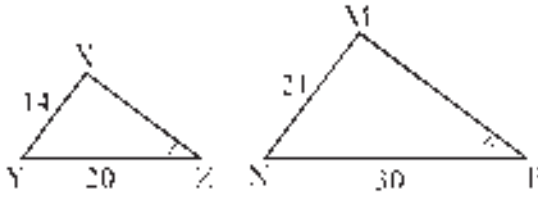
$$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$$

... (دیا ہوا ہے) اور  $\angle M \cong \angle V$

$$\therefore \triangle PMN \sim \triangle UVW \quad \dots \text{(متشابهت کی ضل-ضل-زا آزمائش سے)}$$

مثال (3) : شکل 1.52 میں دی ہوئی معلومات کی رؤ سے کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں مثلث متشابه ہیں؟ اگر کہہ سکتے ہیں تو کس آزمائش کی رؤ سے؟



شکل 1.52

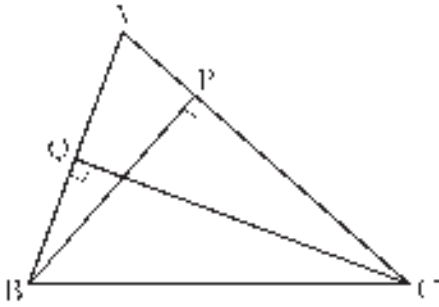
$$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$$

$\angle Z \cong \angle P$  دیا ہوا ہے لیکن  $\angle Z$  اور  $\angle P$ ، تناسب والے اضلاع کو شامل کرنے والے زاویے نہیں ہیں۔

$\therefore \triangle MNP$  اور  $\triangle XYZ$  متشابه ہیں ہم ایسا نہیں کہہ سکتے۔



شکل 1.53

مثال (4) : متصلہ شکل میں  $A - P - C$  ،  $CQ \perp AB$  ،  $BP \perp AC$

$A - Q - B$  تودکھائیے کہ  $\triangle AQC$  اور  $\triangle APB$  متشابه ہیں۔

حل :  $\triangle AQC$  اور  $\triangle APB$  میں،

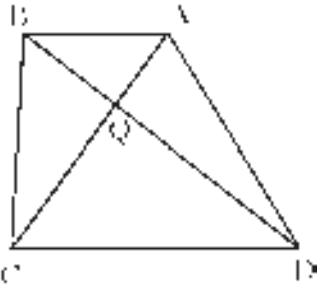
$$\angle APB = \square^\circ \quad \dots (I)$$

$$\angle AQC = \square^\circ \quad \dots (II)$$

$$\therefore \angle APB \cong \angle AQC \quad \dots \text{ [سے (II) اور (I)]}$$

$$\angle PAB \cong \angle QAC \quad \dots (\square)$$

$$\therefore \triangle APB \sim \triangle AQC \quad \dots \text{ (زا-زا آزمائش)}$$



شکل 1.54

مثال (5) : اگر ذواربعۃ الاضلاع ABCD کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ Q پر قطع کرتے ہیں

اور  $2QA = QC$  اور  $2QB = QD$  تودکھائیے کہ  $DC = 2AB$

$$2QA = QC$$

دیا ہوا ہے :

$$2QB = QD$$

ثابت کرنا ہے :  $CD = 2AB$

$$2QA = QC \quad , \quad \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2} \quad \dots (I) \quad \text{ثبوت :}$$

$$2QB = QD \quad , \quad \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2} \quad \dots (II)$$

$$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$$

... [سے (II) اور (I)]

$\triangle AQB$  اور  $\triangle CQD$  میں،

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$$

... (ثابت کیا گیا ہے)

$$\angle AQB \cong \angle DQC$$

... (متقابلہ زاویے)

$$\therefore \triangle AQB \sim \triangle CQD \quad \dots \text{ (متشابهت کی ضل-ضل آزمائش)}$$

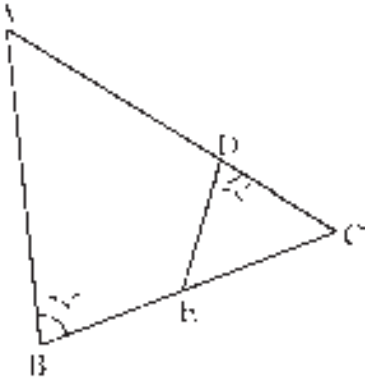
$$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD} \quad \dots \text{ (نظیری اضلاع تناسب میں ہیں)}$$

$$\text{لیکن } \frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \quad , \quad \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$$

[سے (I)]

$$\therefore 2AB = CD$$

### مشقی سیٹ 1.3



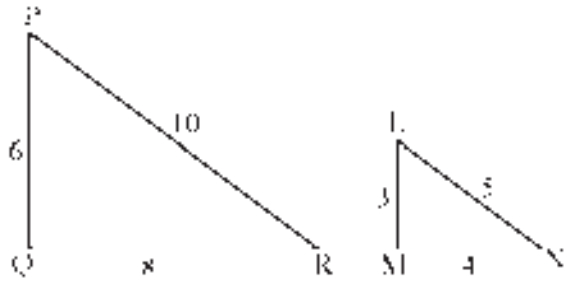
شکل 1.55

1. شکل 1.55 میں  $\angle ABC = 75^\circ$ ،  $\angle EDC = 75^\circ$  تو دونوں

مثلث کس آزمائش کی رو سے متشابه ہیں؟  
ان کی متشابهت کی ایک سے ایک کی مطابقت لکھیے۔

2. شکل 1.56 میں دیے ہوئے مثلث کیا متشابه ہیں؟

اگر ہیں تو کس آزمائش کی رو سے؟

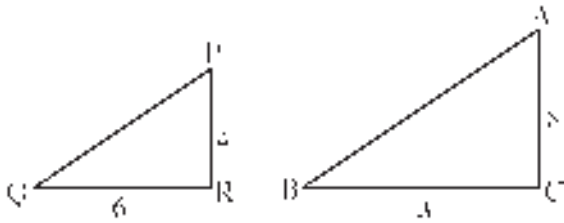


شکل 1.56

3. شکل 1.57 میں دکھائے ہوئے کے مطابق 8 میٹر اور 4

میٹر اونچائی کے دو ستون ہموار زمین پر کھڑے ہیں۔ سورج کی روشنی کے ذریعے چھوٹے ستون کے سائے کی لمبائی 6 میٹر ہے

تو اسی وقت بڑے ستون کے سائے کی لمبائی کیا ہوگی؟



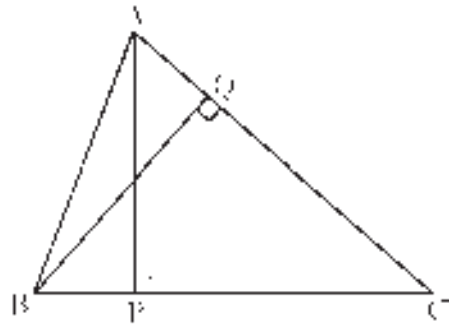
شکل 1.57

4.  $\triangle ABC$  میں،  $BQ \perp AC$ ،  $AP \perp BC$ ،

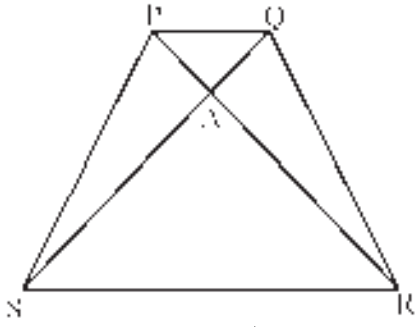
$A - Q - C$ ،  $B - P - C$  ہو تو دکھائیے کہ

$\triangle CPA \sim \triangle CQB$  اگر  $AP = 7$ ،

$BQ = 8$ ،  $BC = 12$  تو  $AC$  معلوم کیجیے۔



شکل 1.58



شکل 1.59

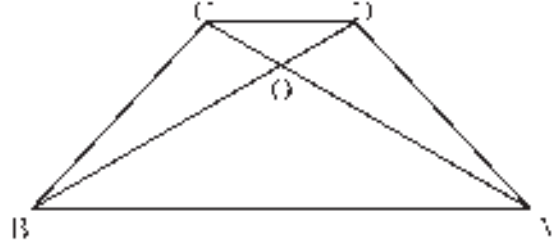
5. شکل 1.59 میں ذوزنقہ PQRS میں،

ضلع  $PQ \parallel$  ضلع  $SR$ ،  $AR = 5 AP$

$AS = 5AQ$  ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$SR = 5PQ$$

6. ذوزنقہ ABCD میں DC ضلع  $AB \parallel$  ضلع، وتر AC اور وتر BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔  
 $AB = 20$ ،  $DC = 6$ ،  $OB = 15$  تو OD معلوم کیجیے۔



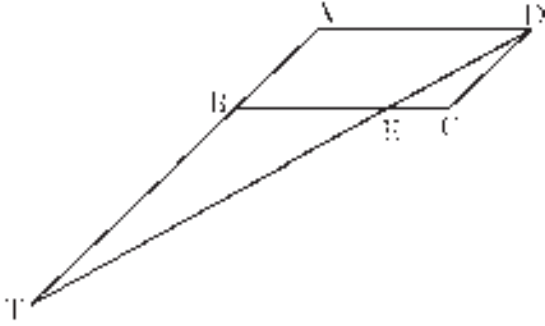
شکل 1.60

7.  $\square ABCD$  ایک متوازی الاضلاع ہے۔

ضلع BC پر ایک نقطہ E ہے۔ خط DE، شعاع AB

کو نقطہ T پر قطع کرتا ہے۔

تو دکھائیے کہ  $DE \times BE = CE \times TE$



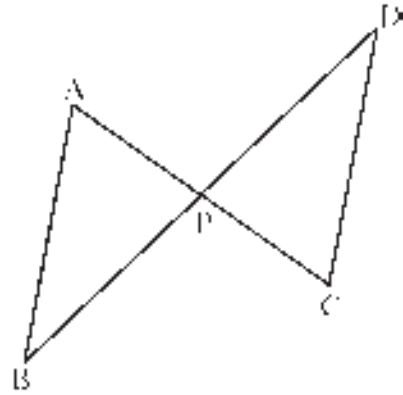
شکل 1.61

8. شکل 1.62 میں قطعہ AC اور قطعہ BD ایک

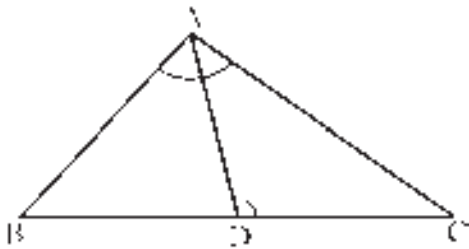
دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں اور

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$$

تو ثابت کیجیے کہ  $\triangle ABP \sim \triangle CDP$



شکل 1.62



شکل 1.63

9. شکل 1.63 میں  $\triangle ABC$  میں ضلع BC پر نقطہ D

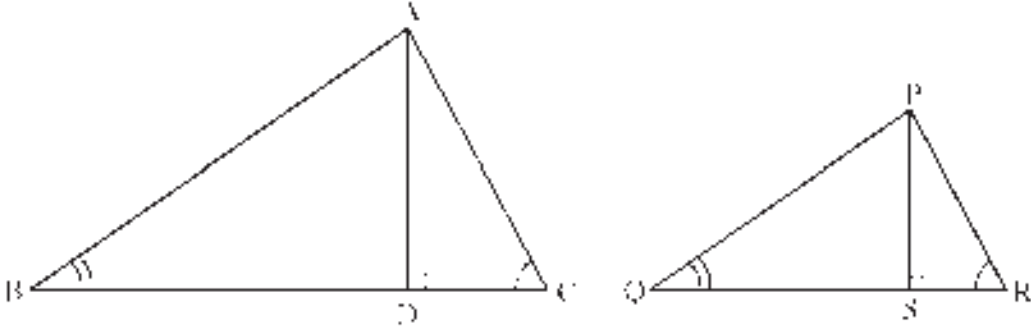
اس طرح ہے کہ  $\angle BAC \cong \angle ADC$

تو ثابت کیجیے کہ  $CA^2 = CB \times CD$



متشابه مثلثوں کے رقبوں کا مسئلہ (Theorem of areas of similar triangles) :

مسئلہ : اگر دو مثلث متشابه ہوں تو ان کے رقبوں کی نسبت، ان کے نظیری ضلعوں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 1.64

دیا ہوا ہے :  $PS \perp QR$  ،  $AD \perp BC$  ،  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2} \quad \text{ثابت کرنا ہے :}$$

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} \quad \text{ثبوت :} \quad \dots (I)$$

،  $\triangle PQR$  اور  $\triangle ABD$  میں،

$$\angle B \cong \angle Q \quad \dots \text{ (دیا ہوا ہے)}$$

$$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ \quad \dots \text{ (دیا ہوا ہے)}$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle PQS \quad \dots \text{ (زا-زا آزمائش)}$$

$$\therefore \frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ} \quad \dots (II)$$

لیکن ،  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \quad \dots (III)$$

بیانات (II)، (III) کی رؤ سے،

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

مثال (1) :  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$  ،  $A(\triangle ABC) = 16$  ،  $A(\triangle PQR) = 25$  تو نسبت  $\frac{AB}{PQ}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

(متشابه مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری ضلعوں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے) ...

$$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

... (جزرالمربع لینے پر) ...

$$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2} , \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$$

مثال (2) : دو متشابه مثلثوں کے نظیری ضلعوں کی نسبت 2 : 5 ہے۔ چھوٹے مثلث کا رقبہ 64 مربع سم ہے تو بڑے مثلث کا رقبہ کتنا ہے؟

حل : فرض کریں  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

فرض کریں  $\triangle ABC$  چھوٹا مثلث ہے اور  $\triangle PQR$  بڑا مثلث ہے۔

(متشابه مثلثوں کے رقبوں کی نسبت) ...

$$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$$

$$\therefore \frac{64}{A(\triangle PQR)} = \frac{4}{25}$$

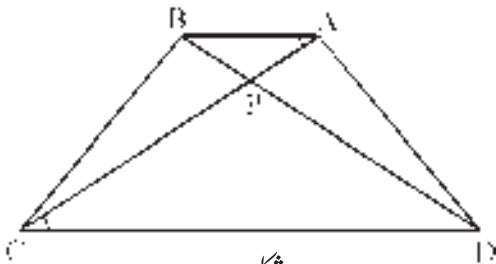
$$4 \times A(\triangle PQR) = 64 \times 25$$

$$A(\triangle PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$$

∴ بڑے مثلث کا رقبہ = 400 مربع سم

مثال (3) : ذوزنقہ ABCD میں  $AB \parallel CD$  ضلع، وتر AC اور وتر BD ایک دوسرے کو P پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کیجیے کہ  $\frac{A(\triangle APB)}{A(\triangle CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



شکل 1.65

حل : ذوزنقہ ABCD میں  $AB \parallel CD$  ضلع

،  $\triangle APB$  اور  $\triangle CPD$  میں،

$\angle PAB \cong \angle PCD$  ... (متبادلہ زاویے)

$\angle APB \cong \angle CPD$  ... (متقابلہ زاویے)

∴  $\triangle APB \sim \triangle CPD$  ... (زا-زا آزمائش)

(متشابه مثلثوں کے رقبوں کا مسئلہ) ...

$$\frac{A(\triangle APB)}{A(\triangle CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$$

## مشقی سیٹ 1.4

1. دو متشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعوں کی نسبت 5 : 3 ہے تو ان کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

2.  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$  ہو تو درج ذیل کی خانہ پری کیجیے۔

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

3.  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$  تو درج ذیل کی خانہ پری کیجیے۔ اگر  $A(\triangle ABC) = 80$  اور  $A(\triangle PQR) = 125$

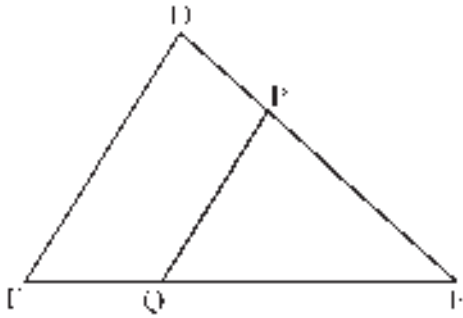
$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle \dots)} = \frac{80}{125} = \frac{\square}{\square}, \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

4. اگر  $\triangle LMN \sim \triangle PQR$ ،  $9 \times A(\triangle PQR) = 16 \times A(\triangle LMN)$  اور  $QR = 20$  ہو تو  $MN$  معلوم کیجیے۔

5. دو متشابہ مثلثوں کے رقبے 225 مربع سم اور 81 مربع سم ہیں۔ اگر چھوٹے مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی 12 سم ہو تو بڑے مثلث کے نظیری ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

6.  $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEF$  دونوں متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔  $A(\triangle ABC) : A(\triangle DEF) = 1 : 2$  اور  $AB = 4$  ہو تو  $DE$  کی لمبائی معلوم کیجیے۔

7. شکل 1.66 میں  $DE$  قطعہ  $\parallel PQ$  قطعہ، مربع اکائی  $A(\triangle PQF) = 20$ ،  $PF = 2DP$  ہو تو  $A(\square DPQE)$  معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 1.66

$A(\triangle PQF) = 20$  مربع اکائی،  $PF = 2DP$

فرض کریں  $DP = x$ ، اس لیے  $PF = 2x$

$$DF = DP + \square = \square + \square = 3x$$

$\triangle FDE$  اور  $\triangle FPQ$  میں،

$\angle FDE \cong \angle \square$  ... (نظیری زاویے)

$\angle FED \cong \angle \square$  ... (نظیری زاویے)

$\therefore \triangle FDE \sim \triangle FPQ$  ... (زا-زا آزمائش)

$$\therefore \frac{A(\triangle FDE)}{A(\triangle FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\triangle FDE) = \frac{9}{4} A(\triangle FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

$$A(\square DPQE) = A(\triangle FDE) - A(\triangle FPQ)$$

$$= \square - \square$$

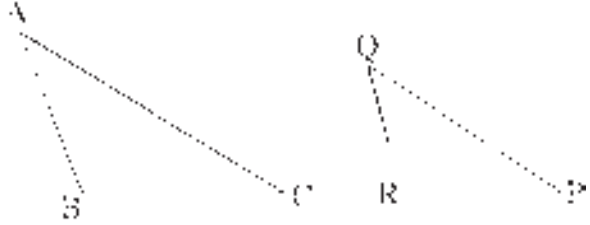
$$= \square$$

1. درج ذیل ضمنی سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) اگر  $\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  میں ایک سے ایک کی مطابقت ہے۔ اور  $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$  ہو تو ذیل میں سے

کون سے بیان صحیح ہیں؟

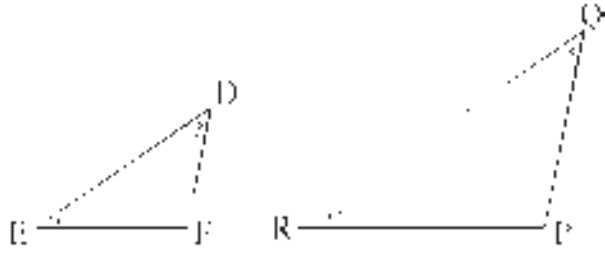
- (A)  $\triangle PQR \sim \triangle ABC$   
 (B)  $\triangle PQR \sim \triangle CAB$   
 (C)  $\triangle CBA \sim \triangle PQR$   
 (D)  $\triangle BCA \sim \triangle PQR$



شکل 1.67

(2) اگر  $\triangle PQR$  اور  $\triangle DEF$  میں،  $\angle R \cong \angle E$ ،  $\angle D \cong \angle Q$ ، تو درج ذیل میں غلط بیان کون سا ہے؟

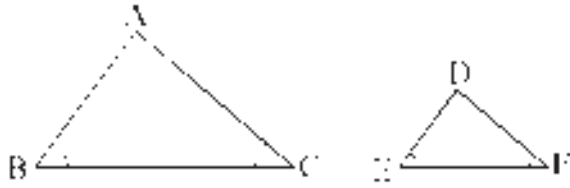
- (A)  $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$  (B)  $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$   
 (C)  $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$  (D)  $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



شکل 1.68

(3)  $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEF$  میں  $\angle F = \angle C$ ،  $\angle B = \angle E$  اور  $AB = 3DE$  تو دونوں مثلثوں سے متعلق کون سا

بیان صحیح ہے؟



شکل 1.69

(A) وہ متماثل نہیں ہیں اور متشابه بھی نہیں ہیں۔

(B) وہ متشابه ہیں لیکن متماثل نہیں ہیں۔

(C) وہ متماثل ہیں اور متشابه بھی ہیں۔

(D) درج بالا میں سے کوئی بھی بیان صحیح نہیں ہے۔

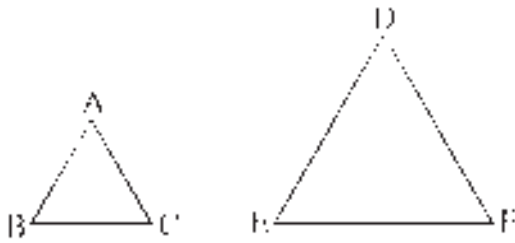
(4)  $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEF$  یہ دونوں متساوی الاضلاع

مثلث ہیں۔

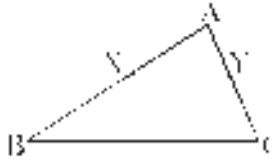
اور  $A(\triangle ABC) : A(\triangle DEF) = 1 : 2$

$AB = 4$  ہو تو  $DE$  کی لمبائی کیا ہوگی؟

- (A)  $2\sqrt{2}$  (B) 4 (C) 8 (D)  $4\sqrt{2}$



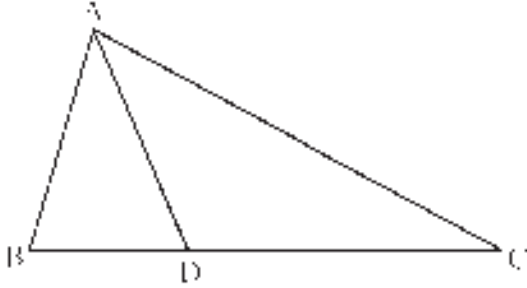
شکل 1.70



شکل 1.71

(5) شکل 1.71 میں BC قطعہ  $XY \parallel$  قطعہ ہو تو درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے؟

- (A)  $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$  (B)  $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$   
 (C)  $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$  (D)  $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



شکل 1.72

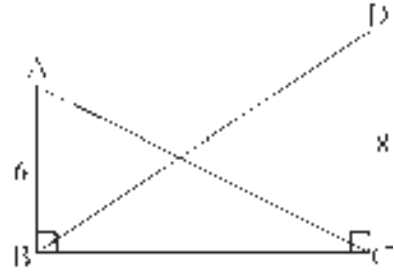
2.  $\triangle ABC$  میں  $B - D - C$  اور  $BD = 7$ ،  $BC = 20$  تو درج ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

- (1)  $\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ADC)}$   
 (2)  $\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ABC)}$   
 (3)  $\frac{A(\triangle ADC)}{A(\triangle ABC)}$

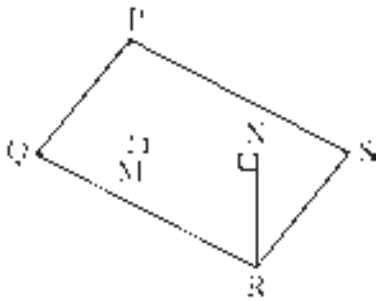
3. مساوی ارتفاع والے دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت 2 : 3 ہے۔ چھوٹے مثلث کا قاعدہ 6 سم ہے تو بڑے مثلث کے نظیری قاعدے کی لمبائی کیا ہوگی؟

4. شکل 1.73 میں  $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DCB)} = ?$  ہو تو کتنا؟  $DC = 8$ ،  $AB = 6$



شکل 1.73



شکل 1.74

5. شکل 1.74 میں  $PM = 10$  سم

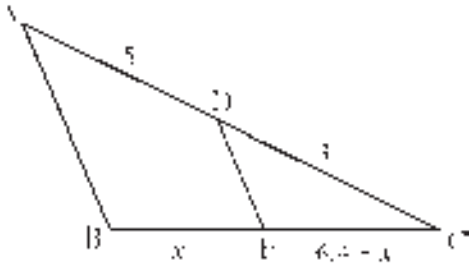
$A(\triangle PQS) = 100$  مربع سم

$A(\triangle QRS) = 110$  مربع سم

ہو تو NR معلوم کیجیے۔

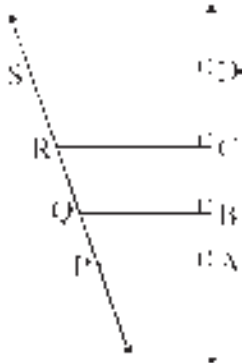
6.  $\triangle MNT \sim \triangle QRS$ ، نقطہ T سے کھینچے گئے ارتفاع کی لمبائی 5 ہے، نقطہ S سے کھینچے گئے ارتفاع کی لمبائی 9 ہے تو نسبت

$\frac{A(\triangle MNT)}{A(\triangle QRS)}$  معلوم کیجیے۔



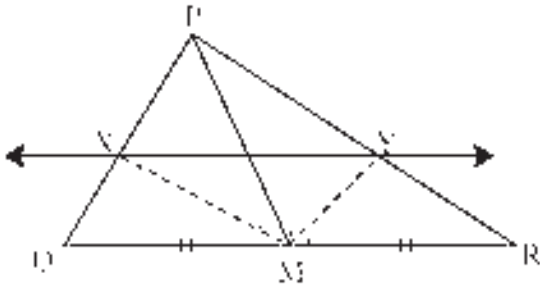
شکل 1.75

7. شکل 1.75 میں  $A - D - C$  اور  $B - E - C$ ،  
 ضلع  $AB \parallel DE$  قطعہ، اگر  $AD = 5$ ،  $DC = 3$ ،  
 $BC = 6.4$  تو  $BE$  معلوم کیجیے۔



شکل 1.76

8. شکل 1.76 میں قطعہ  $PA$ ، قطعہ  $QB$ ، قطعہ  $RC$  اور  
 قطعہ  $SD$  یہ سب خط  $AD$  پر عمود ہیں۔  $AB = 60$ ،  
 $BC = 70$ ،  $CD = 80$ ،  $PS = 280$  ہو تو  
 $RS$ ،  $QR$  معلوم کیجیے۔



شکل 1.77

9.  $\triangle PQR$  میں قطعہ  $PM$  وسطانیہ ہے۔  $\angle PMQ$  اور  
 $\angle PMR$  کے ناصف ضلع  $PQ$  اور ضلع  $PR$  کو بالترتیب نقاط  
 $X$  اور  $Y$  پر قطع کرتے ہیں۔  
 تو ثابت کیجیے کہ  $XY \parallel QR$   
 ثبوت میں خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔  
 $\triangle PMQ$  میں،  $\angle PMQ$  کی ناصف شعاع  $MX$  ہے۔

$$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

... (I) (مثلث کے زاویے کے ناصف کا مسئلہ) ...

$\triangle PMR$  میں،  $\angle PMR$  کی ناصف شعاع  $MY$  ہے۔

$$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

... (II) (مثلث کے زاویے کے ناصف کا مسئلہ) ...

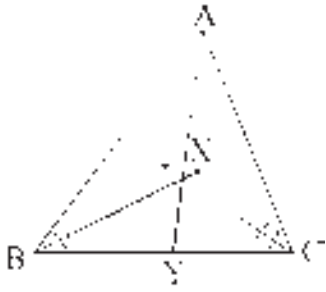
لیکن،  $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$

... ( $MQ = MR$  ہے یعنی  $M$  کا وسطی نقطہ)

$$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$$

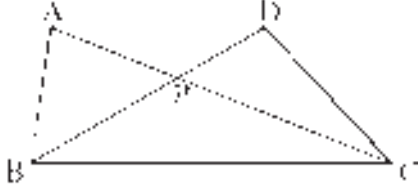
$$\therefore XY \parallel QR$$

(متناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس) ...



شکل 1.78

10. شکل 1.78 میں  $\triangle ABC$  کے  $\angle B$  اور  $\angle C$  کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ X پر قطع کرتے ہیں۔ خط AX، ضلع BC کو Y پر قطع کرتا ہے۔ اگر  $AB = 5$ ،  $AC = 4$ ،  $BC = 6$  ہو تو  $\frac{AX}{XY}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 1.79

11.  $\square ABCD$  میں،  $AD \parallel BC$  قطعہ، وتر AC اور وتر BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں، تو دکھائیے کہ  $\frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PD}$

12. شکل 1.80 میں  $XY \parallel AC$  ضلع، اگر  $2 \times AX = 3 \times BX$  اور  $XY = 9$  تو AC کی قیمت معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 1.80

$$2AX = 3BX \quad , \quad \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$$

عملی کام :

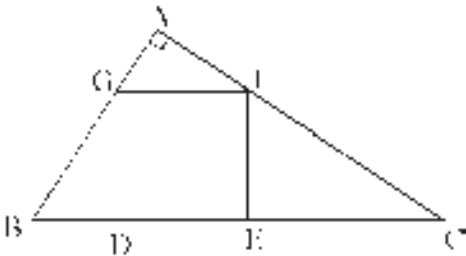
$$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \quad \dots \text{ (عمل ترکیب کے ذریعے)}$$

$$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \quad \dots \text{ (I)}$$

$\triangle BCA \sim \triangle BYX$  ... (متشابه مثلثوں کی ..... آزمائش)

$$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY} \quad \dots \text{ (متشابه مثلثوں کے نظیری اضلاع)}$$

$$\therefore \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} = \frac{AC}{9} \quad , \quad \therefore AC = \boxed{\phantom{000}} \quad \dots \text{ (I)}$$



شکل 1.81

13\*  $\triangle ABC$  میں  $\angle A = 90^\circ$ ، ایک مربع ہے جس کے راس D اور E ضلع BC پر ہیں۔ نقطہ F، ضلع AC پر اور نقطہ G ضلع AB پر ہے تو ثابت کیجیے کہ  $DE^2 = BD \times EC$

اشارہ :  $\triangle GBD$  اور  $\triangle CFE$  کو متشابه دکھائیے  $GD = FE = DE$  کا استعمال کریں



## فیثا غورث کا مسئلہ Theorem of Pythagoras

2

آئیے سیکھیں

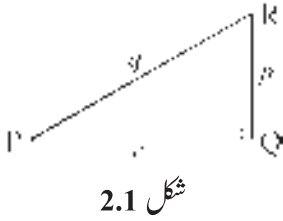


- فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ
- ہندسی وسط کا مسئلہ
- فیثا غورث کا مسئلہ
- فیثا غورث کے مسئلے کا اطلاق
- تشابہت اور قائمہ الزاویہ مثلث
- پولونیس کا مسئلہ

آئیے ذرا یاد کریں



فیثا غورث کا مسئلہ : قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی ماندہ دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



میں،  $\triangle PQR$   $\angle PQR = 90^\circ$

$$\therefore (PR)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2$$

اسے ہم  $PR^2 = PQ^2 + QR^2$  لکھتے ہیں۔

$\triangle PQR$  کے اضلاع PQ، QR اور PR کی لمبائیاں بالترتیب  $r$ ،  $p$ ،  $q$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کے مطابق شکل 2.1 سے متعلق فیثا غورث کا مسئلہ  $q^2 = p^2 + r^2$  بھی لکھا جاتا ہے۔

فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ :

تین طبعی اعداد اس طرح ہوں کہ اگر ایک عدد کا مربع، باقی دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو ان کو فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ کہتے ہیں۔ مثلاً (11, 60, 61) اعدادِ ثلاثہ میں،

$$11^2 = 121, 60^2 = 3600, 61^2 = 3721, 121 + 3600 = 3721$$

اس مثال میں بڑے عدد کا مربع، باقی دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہے۔

$\therefore$  (11, 60, 61) فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اسی طرح (3, 4, 5)، (5, 12, 13)، (8, 15, 17)، (7, 24, 25) وغیرہ بھی فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں؟ جانچ کیجیے۔

فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ میں اعداد کسی بھی ترتیب میں لکھے جاسکتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ حاصل کرنے کا ضابطہ :

اگر  $a, b, c$  طبعی اعداد ہوں اور  $a > b$  ہو تو

$[(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), 2ab]$ ، فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہوتے ہیں۔

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \quad \dots (I)$$

$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \quad \dots (II)$$

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 \quad \dots (III)$$

$$\therefore (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 \quad \dots [(I), (II) \text{ اور } (III) \text{ سے}]$$

اس لیے اعداد  $[(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), 2ab]$  فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اعدادِ ثلاثہ کے اس ضابطے کو فیثا غورث کے مختلف اعدادِ ثلاثہ حاصل کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مثلاً  $a = 5$  اور  $b = 3$  لینے پر

$a^2 + b^2 = 34$  ,  $a^2 - b^2 = 16$  ,  $2ab = 30$  اس لیے اعداد  $(34, 16, 30)$  فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اس کی آپ تصدیق کر لیں۔

$a$  اور  $b$  کے لیے مختلف طبعی اعداد لے کر ضابطے کی مدد سے فیثا غورث کے 5 اعدادِ ثلاثہ معلوم کیجیے۔

گذشتہ جماعت میں ہم  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  اور  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ، زاویوں والے قائمہ الزاویہ مثلثوں کی خصوصیت دیکھ چکے ہیں۔

(I)  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  پیمائش کے زاویوں کے مثلث کی خصوصیت :

قائمہ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویے  $30^\circ$  اور  $60^\circ$  کے ہوں تو  $30^\circ$  پیمائش کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر کا نصف ہوتا ہے اور

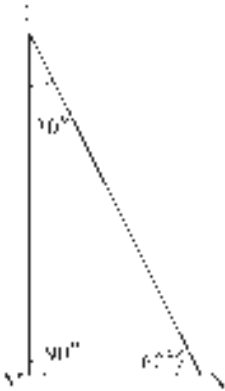
$60^\circ$  پیمائش کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر کا  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  گنا ہوتا ہے۔

شکل 2.2 کا مشاہدہ کیجیے۔  $\triangle LMN$  میں،  $\angle M = 90^\circ$ ،  $\angle N = 60^\circ$ ،  $\angle L = 30^\circ$ ،

$$\therefore 30^\circ \text{ کے مقابل کا ضلع} = MN = \frac{1}{2} \times LN$$

$$60^\circ \text{ کے مقابل کا ضلع} = LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$$

اگر سم  $LN = 6$  ہو تو  $MN$  اور  $LM$  معلوم کیجیے۔



شکل 2.2

$$MN = \frac{1}{2} \times LN$$

$$= \frac{1}{2} \times 6$$

$$= 3 \text{ سم}$$

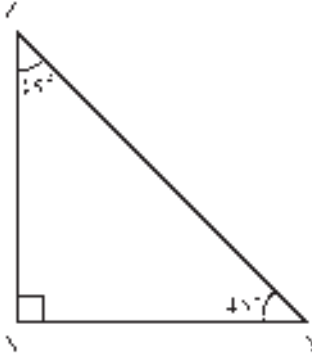
$$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$$

$$= 3\sqrt{3} \text{ سم}$$

(II)  $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$  پیمائش کے زاویوں کے مثلث کی خصوصیت :

قائمہ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائش  $45^\circ$  اور  $45^\circ$  ہو تو قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع وتر کا  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  گنا ہوتا ہے۔



شکل 2.3

شکل 2.3 کا مشاہدہ کیجیے۔  $\triangle XYZ$  میں،

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times XZ$$

$$YZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times XZ$$

اگر ہم  $XZ = 3\sqrt{2}$  ہو تو  $XY$  اور  $YZ$  معلوم کیجیے۔

$$XY = YZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

$$\therefore XY = YZ = 3 \text{ سم}$$

7 ویں جماعت میں ہم نے رقبے کی مدد سے فیثاغورث کے مسئلے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس میں ہم نے چار قائمہ الزاویہ مثلثوں اور ایک مربع کے رقبوں کا استعمال کیا تھا۔ اس مسئلے کا ثبوت ہم کچھ دوسرے طریقے سے دے سکتے ہیں۔

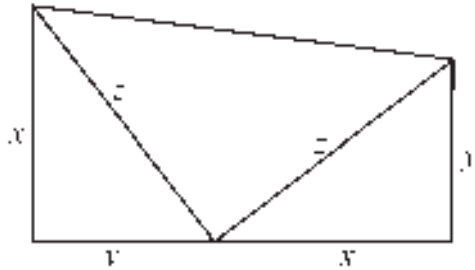
عملی کام :

شکل 2.4 میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو متماثل قائمہ الزاویہ مثلث لیجیے۔ ان کے وتروں کی لمبائی کے مساوی لمبائی کے دو ضلع

والا ایک متساوی الساقین قائمہ الزاویہ مثلث لیجیے۔ یہ تینوں قائمہ الزاویہ مثلث جوڑ کر ایک ذوزنقہ تیار کیجیے۔

$$\text{اونچائی} \times (\text{متوازی ضلعوں کی لمبائیوں کا مجموعہ}) \times \frac{1}{2} = \text{ذوزنقہ کا رقبہ}$$

اس ضابطے کا استعمال کرتے ہوئے ذوزنقہ کا رقبہ، تینوں مثلثوں کے رقبوں کے مساوی لکھ کر فیثاغورث کا مسئلہ ثابت کیجیے۔



شکل 2.4

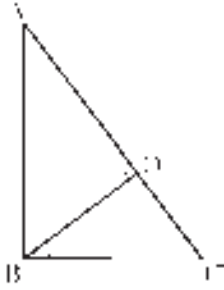
## آئیے سمجھ لیں



اب ہم فیثاغورث کے مسئلے کا ثبوت متشابہ مثلثوں کی مدد سے دیں گے۔ اسے ثابت کرنے کے لیے قائمہ الزاویہ مثلثوں کی متشابہت کے متعلق خصوصیت کا مطالعہ کریں گے۔

### متشابہت اور قائمہ الزاویہ مثلث

مسئلہ : قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر پر کھینچے ہوئے ارتفاع سے جو مثلث بنتے ہیں۔ وہ اصل قائمہ الزاویہ مثلث کے متشابہ ہوتے ہیں اور آپس میں ایک دوسرے کے بھی متشابہ ہوتے ہیں۔



شکل 2.5

دیا ہوا ہے :  $\triangle ABC$  میں،  $\angle ABC = 90^\circ$

قطعہ  $BD \perp AC$ ،  $A - D - C$

ثابت کرنا ہے :  $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$\triangle ADB \sim \triangle BDC$

ثبوت :

اسی طرح،  $\triangle ABC$  اور  $\triangle BDC$  میں

$\angle BCD \cong \angle ACB$  ... (مشترک زاویے)

$\angle BDC \cong \angle ABC$  ... ( $90^\circ$  زاویے)

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$  ... (زا-زا آزمائش) ... (II)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC$  ... [بیانات (I) اور (II) سے] ... (III)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$  ... [بیانات (I)، (II) اور (III) سے] ... (عبوری خاصیت)

$\triangle ABC$  اور  $\triangle ADB$  میں

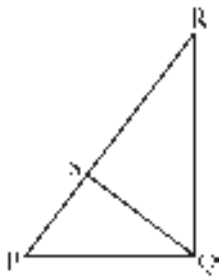
$\angle DAB \cong \angle BAC$  ... (مشترک زاویے)

$\angle ADB \cong \angle ABC$  ... ( $90^\circ$  زاویے)

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$  ... (زا-زا آزمائش) ... (I)

### ہندسی وسط کا مسئلہ (Theorem of Geometrical Mean)

مسئلہ : قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر پر کھینچا ہوا ارتفاع، اس ارتفاع کے ذریعے بننے والے وتر کے دونوں حصوں کا ہندسی وسط ہوتا ہے۔



شکل 2.6

ثبوت : قائمہ الزاویہ مثلث PQR میں، وتر  $PR \perp QS$  قطعہ

$\therefore \triangle QSR \sim \triangle PSQ$  ... (قائمہ الزاویہ مثلثوں کی متشابہت)

$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$

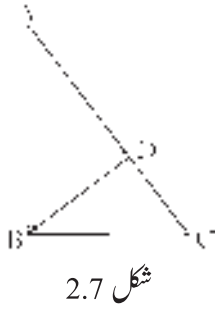
$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$  ... ( $\because SQ = QS$ )

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

اس لیے ارتفاع QS، قطعہ PS اور قطعہ SR کا ہندسی وسط ہے۔

### فیثاغورث کا مسئلہ (Theorem of Pythagoras)

مسئلہ : قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.7

دیا ہوا ہے :  $\triangle ABC$  میں،  $\angle ABC = 90^\circ$

ثابت کرنا ہے :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

عمل : نقطہ B سے ضلع AC پر قطعہ BD عمود کھینچیں۔

A - D - C

ثبوت :  $\triangle ABC$  میں،

(عمل) ...  $AC \perp BD$  وتر

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$  ... (قائمہ الزاویہ مثلثوں کی مشابہت)

اسی طرح،  $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC} \quad \dots \text{(نظیری اضلاع)}$$

$$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore BC^2 = DC \times AC \quad \dots \text{(II)}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB} \quad \dots \text{(نظیری اضلاع)}$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore AB^2 = AD \times AC \quad \dots \text{(I)}$$

(I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$= AC (AD + DC)$$

$$= AC \times AC$$

... (A - D - C)

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

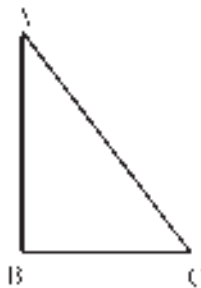
$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

### فیثاغورث کے مسئلے کا عکس (Converse of Pythagoras theorem)

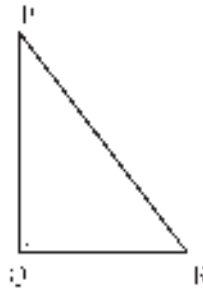
مسئلہ : کسی مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع، دیگر دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے :  $\triangle ABC$  میں،  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ثابت کرنا ہے :  $\angle ABC = 90^\circ$



شکل 2.8



شکل 2.9

عمل :  $\triangle PQR$  اس طرح بنائیے کہ  $\angle PQR = 90^\circ$ ،  $BC = QR$ ،  $AB = PQ$

ثبوت :  $\triangle PQR$  میں،  $\angle Q = 90^\circ$

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \quad \dots \text{ (فیثاغورث کا مسئلہ) } \\ = AB^2 + BC^2 \quad \dots \text{ (عمل) } \quad \dots \text{ (I)}$$

$$= AC^2 \quad \dots \text{ (دیا ہوا ہے) } \quad \dots \text{ (II)}$$

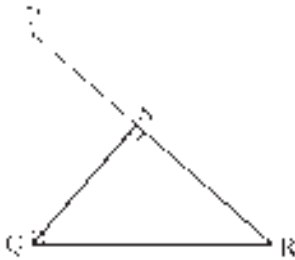
$$\therefore PR^2 = AC^2$$

$$\therefore PR = AC \quad \dots \text{ (III)}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR \quad \dots \text{ (ضل-ضل-آزمائش)}$$

$$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90^\circ$$

اسے ذہن نشین کر لیں



شکل 2.10

(1) (a) متشابہت اور قائمہ الزاویہ مثلث :

$\triangle PQR$  میں،  $\angle Q = 90^\circ$ ، قطعہ  $QS \perp PR$  قطعہ

یہاں،  $\triangle PQR \sim \triangle PSQ \sim \triangle QSR$

اس طرح سے شکل 2.10 میں بننے والے تمام قائمہ الزاویہ مثلث

ایک دوسرے کے متشابہ ہیں۔

(b) ہندسی وسط کا مسئلہ :

درج بالا شکل میں،  $\triangle PSQ \sim \triangle QSR$

$$\therefore QS^2 = PS \times SR$$

$\therefore$  قطعہ PS اور قطعہ SR کا ہندسی وسط قطعہ QS ہے۔

(2) فیثاغورث کا مسئلہ :

قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

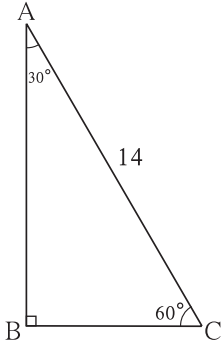
(3) فیثاغورث کے مسئلے کا عکس :

کسی مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع، باقی دو اضلاع کے مجموعے کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمہ الزاویہ ہوتا ہے۔

اس کے علاوہ ایک اور خصوصیت بہت زیادہ استعمال ہوتی ہے اسے دھیان میں رکھیے۔

(4) قائمہ الزاویہ مثلث میں ایک ضلع کی لمبائی، وتر کی لمبائی کا نصف ہو تو اس ضلع کے مقابل کا زاویہ  $30^\circ$  ہوتا ہے۔

یہ خصوصیت  $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$  مسئلے کا عکس ہے۔



شکل 2.11

مثال (1) : شکل 2.11 کا مشاہدہ کیجیے۔

$\triangle ABC$  میں،  $\angle A = 30^\circ$ ،  $\angle B = 90^\circ$ ،  $AC = 14$

ہوتو  $AB$  اور  $BC$  معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle ABC$  میں،

$$\rightarrow \angle B = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \therefore \angle C = 60^\circ$$

30° - 60° - 90° مسئلے کی رؤ سے

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$$

$$AB = 7\sqrt{3}$$

$$BC = \frac{1}{2} \times AC$$

$$BC = \frac{1}{2} \times 14$$

$$BC = 7$$

مثال (2) : شکل 2.12 کا مشاہدہ کیجیے۔

$\triangle ABC$  میں  $AD \perp BC$  قطعہ،  $\angle C = 45^\circ$

$BD = 5$  اور  $AC = 8\sqrt{2}$  معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle ADC$  میں  $\angle ADC = 90^\circ$ ،  $\angle C = 45^\circ$  اس لیے  $\angle DAC = 45^\circ$

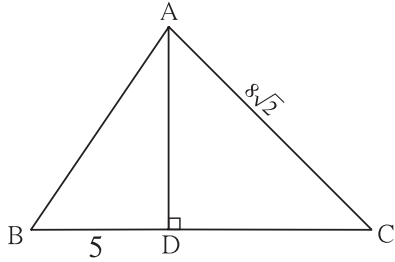
$$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} \quad \dots \text{ (45° - 45° - 90° مسئلے کی رؤ سے)}$$

$$\therefore DC = 8, \therefore AD = 8$$

$$BC = BD + DC$$

$$= 5 + 8$$

$$\therefore BC = 13$$



شکل 2.12

مثال (3) : شکل 2.13 میں  $\angle PQR = 90^\circ$ ،  $QN \perp PR$  قطعہ،

$PN = 9$ ،  $NR = 16$  تو  $QN$  معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle PQR$  میں  $QN \perp PR$  قطعہ

(ہندسی وسط کا مسئلہ) ...

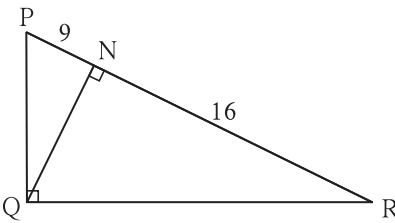
$$\therefore NQ^2 = PN \times NR$$

$$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$$

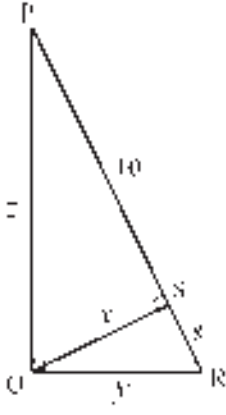
$$= \sqrt{9 \times 16}$$

$$= 3 \times 4$$

$$= 12$$



شکل 2.13



شکل 2.14

مثال (4) : شکل 2.14 کا مشاہدہ کیجیے۔  $\triangle PQR$  میں،  $\angle PQR = 90^\circ$ ،  
 PR قطعہ QS  $\perp$  قطعہ ہو تو  $x$ ،  $y$ ،  $z$  کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل :  $\triangle PQR$  میں،  $\angle PQR = 90^\circ$

PR قطعہ QS  $\perp$  قطعہ

(ہندسی وسط کا مسئلہ) ...

$$\begin{aligned} QS &= \sqrt{PS \times SR} \\ &= \sqrt{10 \times 8} \\ &= \sqrt{5 \times 2 \times 8} \\ &= \sqrt{5 \times 16} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x = 4\sqrt{5}$$

$\triangle PSQ$  میں،  $\angle QSP = 90^\circ$

(فیثاغورث کا مسئلہ) ...  $PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$$\begin{aligned} &= (4\sqrt{5})^2 + 10^2 \\ &= 16 \times 5 + 100 \\ &= 80 + 100 \\ &= 180 \\ &= 36 \times 5 \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = 6\sqrt{5} \quad \therefore z = 6\sqrt{5}$$

$\triangle QSR$  میں،  $\angle QSR = 90^\circ$

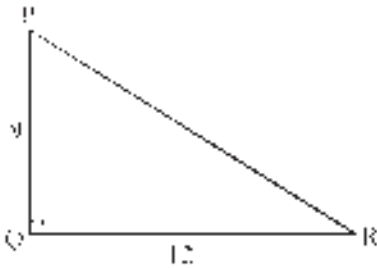
(فیثاغورث کا مسئلہ) ...  $QR^2 = QS^2 + SR^2$

$$\begin{aligned} &= (4\sqrt{5})^2 + 8^2 \\ &= 16 \times 5 + 64 \\ &= 80 + 64 \\ &= 144 \end{aligned}$$

$$\therefore QR = 12, \quad \therefore y = 12$$

$$\text{جواب : } z = 6\sqrt{5}, y = 12, x = 4\sqrt{5}$$

مثال (5) : قائمہ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 9 سم اور 12 سم ہیں تو وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 2.15

حل :  $\triangle PQR$  میں،  $\angle Q = 90^\circ$

سم  $QR = 12$ ، سم  $PQ = 9$

(فیثاغورث کے مسئلے کی رؤ سے) ...

$$\begin{aligned} PR^2 &= PQ^2 + QR^2 \\ &= 9^2 + 12^2 \\ &= 81 + 144 \end{aligned}$$

$$\therefore PR^2 = 225$$

$$\therefore PR = 15$$

$\therefore$  مثلث کے وتر کی لمبائی = 15 سم

مثال (6) :  $\triangle LMN$  میں،  $l = 5$ ،  $m = 13$ ،  $n = 12$  ہو تو قائمہ الزاویہ مثلث ہے یا نہیں، طے کیجیے۔

یہاں  $l$ ،  $m$ ،  $n$  بالترتیب  $\angle L$ ،  $\angle M$ ،  $\angle N$  کے مقابل کے اضلاع ہیں۔

حل :  $l = 5$ ،  $m = 13$ ،  $n = 12$

$$l^2 = 25$$

$$m^2 = 169$$

$$n^2 = 144$$

$$\therefore m^2 = l^2 + n^2$$

اس لیے فیثاغورث کے مسئلے کے عکس کی رو  $\triangle LMN$  قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال (7) : شکل 2.16 کا مشاہدہ کیجیے۔

$\triangle ABC$  میں،  $AD \perp BC$  قطعہ تو ثابت کیجیے کہ

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

حل :  $\triangle ADC$  میں  $\angle ADC = 90^\circ$  فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے،

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \dots (I)$$

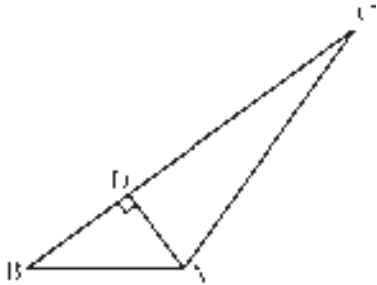
$\triangle ADB$  میں  $\angle ADB = 90^\circ$ ، فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad \dots (II)$$

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \dots [(I) \text{ اور } (II) \text{ سے}]$$

$$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$



شکل 2.16

### مشقی سیٹ 2.1

1. درج ذیل اعدادِ ثلاثہ میں سے فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

(i) (3, 5, 4)

(ii) (4, 9, 12)

(iii) (5, 12, 13)

(iv) (24, 70, 74)

(v) (10, 24, 27)

(vi) (11, 60, 61)

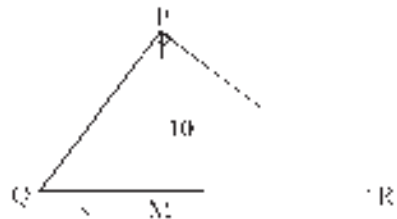


شکل 2.17

2. شکل 2.17 میں  $\angle MNP = 90^\circ$ ،

قطعہ  $NQ \perp$  قطعہ  $MP$ ،

معلوم کیجیے۔  $QP = 4$ ،  $MQ = 9$  ہو تو

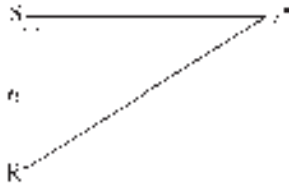


شکل 2.18

3. شکل 2.18 میں  $\angle QPR = 90^\circ$

قطعہ  $PM \perp$  قطعہ  $QR$  اور  $Q-M-R$

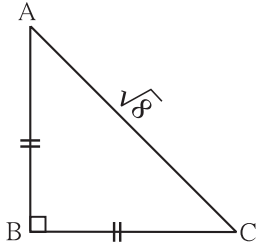
معلوم کیجیے۔  $QM = 8$ ،  $PM = 10$  اس کی مدد سے  $QR$



شکل 2.19

4. شکل 2.19 میں،  $\triangle PSR$  میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے RP اور PS معلوم کیجیے۔

5. شکل 2.20 میں دی ہوئی معلومات کی بناء پر AB اور BC معلوم کرنے کے لیے عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 2.20

$$\begin{aligned}
 AB &= BC \quad \dots \left( \boxed{\phantom{00}} \right) \\
 \therefore \angle BAC &= \boxed{\phantom{00}} \\
 \therefore AB = BC &= \boxed{\phantom{00}} \times AC \\
 &= \boxed{\phantom{00}} \times \sqrt{8} \\
 &= \boxed{\phantom{00}} \times 2\sqrt{2} \\
 &= \boxed{\phantom{00}}
 \end{aligned}$$

6. ایک مربع کے وتر کی لمبائی 10 سم ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔



شکل 2.21

7. شکل 2.21 میں،  $FG \perp ED$ ،  $\angle DFE = 90^\circ$ ، اگر  $GD = 8$ ،  $FG = 12$  ہو تو درج ذیل معلوم کیجیے۔

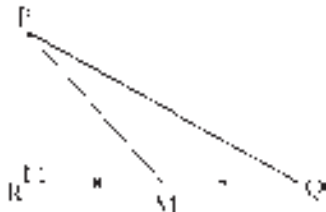
- (i) EG    (ii) FD    (iii) EF

8. ایک مستطیل کی لمبائی 35 سم اور چوڑائی 12 سم ہے تو اس مستطیل کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

9\*. شکل 2.22 میں ضلع QR کا وسطی نقطہ M ہے۔

$\angle PQR = 90^\circ$  ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$$



شکل 2.22

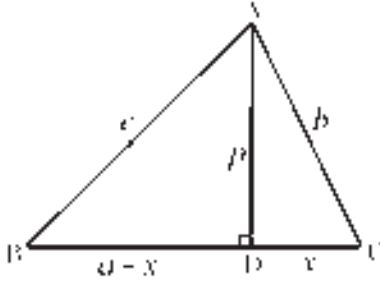
10\*. راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل واقع عمارتوں کی دیواریں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ 5.8 میٹر لمبی سیڑھی کا ایک

سر راستے پر کہیں رکھا ہوا ہے تو اس کا اوپری سرا پہلی عمارت کی 4 میٹر اونچائی پر واقع کھڑکی تک پہنچتا ہے۔ اسی جگہ سے سیڑھی دوسری

جانب موڑنے پر اس کا اوپری سرا دوسری عمارت کی 4.2 میٹر اونچائی پر واقع کھڑکی تک پہنچتا ہے۔ راستے کی چوڑائی معلوم کیجیے۔



فیثا غورث کے مسئلے میں قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر اور قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کے درمیان آپسی تعلق یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع اور دیگر دو اضلاع کا تعلق بتایا گیا ہے۔ مثلث میں حادہ زاویے کے مقابل کے ضلع کا دیگر دو اضلاع کے درمیان تعلق اسی طرح منفرجہ زاویے کے مقابل کے ضلع کا دیگر دو اضلاع کے درمیان تعلق فیثا غورث کے مسئلے کے ذریعے طے کرتے ہیں۔ یہ تعلق مندرجہ ذیل مثال سے سمجھ لیجیے۔



شکل 2.23

مثال (1) :  $\triangle ABC$  میں حادہ زاویہ ہے، قطعہ  $AD \perp BC$  قطعہ

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$$

تو ثابت کیجیے کہ شکل 2.23 میں،

$$\text{فرض کیجیے } DC = x, BC = a, AD = p, AC = b, AB = c$$

$$\therefore BD = a - x$$

میں فیثا غورث کے مسئلے کی رؤ سے

$$c^2 = (a-x)^2 + \square$$

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square \quad \dots (I)$$

میں فیثا غورث کے مسئلے کی رؤ سے

$$b^2 = p^2 + \square \quad \dots (\text{فیثا غورث کے مسئلے کی رؤ سے})$$

$$p^2 = b^2 - \square \quad \dots (II)$$

بیان (II) میں حاصل شدہ  $p^2$  کی قیمت بیان (I) میں رکھنے پر،

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$$

مثال (2) :  $\triangle ABC$  میں، منفرجہ زاویہ ہے۔

شکل 2.24 میں، قطعہ  $AD \perp BC$  قطعہ

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

تو ثابت کیجیے کہ

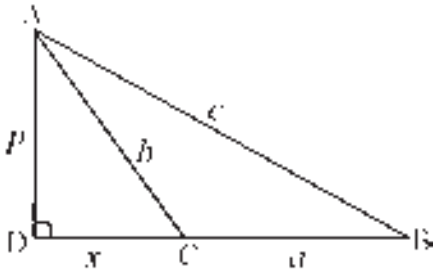
$$\text{فرض کریں } DC = x, BC = a, AB = c, AC = b, AD = p$$

$$\therefore DB = a + x$$

میں فیثا غورث کے مسئلے کی رؤ سے،

$$c^2 = (a+x)^2 + p^2$$

$$= a^2 + 2ax + x^2 + p^2 \quad \dots (I)$$



شکل 2.24

اسی طرح  $\triangle ADC$  میں،

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$p^2 = b^2 - x^2 \quad \dots (II)$$

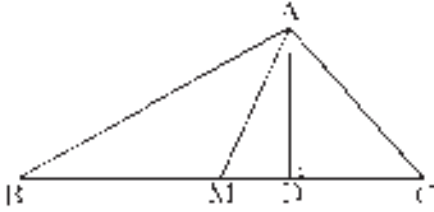
$\therefore$  مساوات (II) میں حاصل ہونے والے  $p^2$  کی قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ax + b^2$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

اپولونیس کا مسئلہ (Apollonius' Theorem)



شکل 2.25

$\triangle ABC$  میں نقطہ M، ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔ تو

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

دیا ہوا ہے:  $\triangle ABC$  میں ضلع BC کا وسطی نقطہ M ہے۔

ثابت کرنا ہے:  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

عمل: قطعہ  $AD \perp$  قطعہ BC کھینچیں۔

ثبوت: اگر قطعہ AM، قطعہ BC پر عمود نہ ہو تو  $\angle AMB$  اور  $\angle AMC$  میں سے کوئی ایک منفرجہ زاویہ ہوگا اور دوسرا حادہ زاویہ ہوگا۔

شکل میں  $\angle AMB$ ، منفرجہ زاویہ ہے اور  $\angle AMC$  حادہ زاویہ ہے۔

درج بالا مثال (1) اور (2) سے

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD \quad \dots (I)$$

اور  $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$$\therefore AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD \quad \dots (\because BM = MC) \quad \dots (II)$$

$\therefore$  (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

اگر ضلع  $BC \perp$  قطعہ  $AM$  ہو تو اس مسئلے کا ثبوت آپ خود لکھیں۔

اس مثال کے ذریعے مثلث کے ضلعوں اور وسطانیہ کے درمیان آپسی تعلق سمجھ میں آتا ہے۔ اسے ہی اپولونیس کا مسئلہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

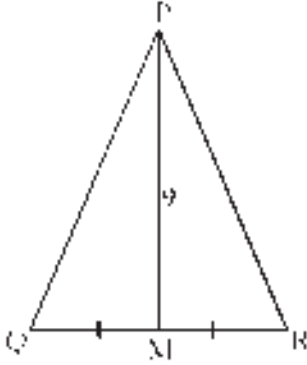
مثال (1):  $\triangle PQR$  میں قطعہ  $PM$  وسطانیہ ہے۔  $PM = 9$  اور  $PQ^2 + PR^2 = 290$  ہو تو  $QR$  معلوم کیجیے۔

حل:  $\triangle PQR$  میں قطعہ  $PM$  وسطانیہ ہے۔

ضلع  $QR$  کا وسطی نقطہ M ہے۔

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

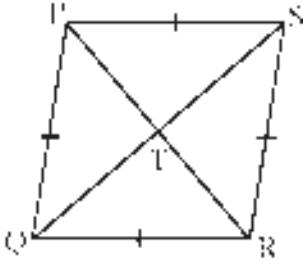
اپولونیس کے مسئلے کی رڈ سے،



شکل 2.26

$$\begin{aligned} PQ^2 + PR^2 &= 2PM^2 + 2QM^2 \\ \therefore 290 &= 2 \times 9^2 + 2QM^2 \\ \therefore 290 &= 2 \times 81 + 2QM^2 \\ \therefore 290 &= 162 + 2QM^2 \\ \therefore 2QM^2 &= 290 - 162 \\ \therefore 2QM^2 &= 128 \\ \therefore QM^2 &= 64 \\ \therefore QM &= 8 \\ \therefore QR &= 2QM \\ &= 2 \times 8 \\ &= 16 \end{aligned}$$

مثال (2) : ثابت کیجیے کہ معین کے وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، اس کے ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.27

دیا ہوا ہے :  $\square PQRS$  ایک معین ہے۔ اس کے وتر PR اور QS ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔

$$PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2 \quad \text{ثابت کرنا ہے :}$$

ثبوت : معین کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس لیے اپولونیس کے مسئلے کے ذریعے،

$$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2 \quad \dots (I)$$

$$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2 \quad \dots (II)$$

اس لیے (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

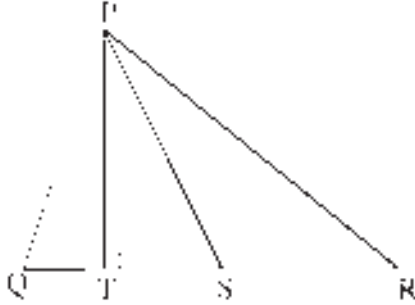
$$\begin{aligned} PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 &= 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2 \\ &= 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2 \quad \dots (\because RT = PT) \\ &= 4PT^2 + 4QT^2 \\ &= (2PT)^2 + (2QT)^2 \\ &= PR^2 + QS^2 \end{aligned}$$

(اس مثال کو فیثاغورث کے مسئلے کے ذریعے بھی حل کر سکتے ہیں۔)

## مشقی سیٹ 2.2

1.  $\triangle PQR$  میں، ضلع  $QR$  کا وسطی نقطہ  $S$  ہے۔ اگر  $PQ = 11$ ،  $PR = 17$ ،  $PS = 13$  ہو تو  $QR$  کی لمبائی معلوم کیجیے۔

2.  $\triangle ABC$  میں  $AB = 10$ ،  $AC = 7$ ،  $BC = 9$  ہو تو نقطہ  $C$  سے ضلع  $AB$  پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 2.28

3. شکل 2.28 میں قطعہ  $PS$ ، یہ  $\triangle PQR$  کا وسطانیہ ہے

اور  $PT \perp QR$  ہو تو ثابت کیجیے کہ

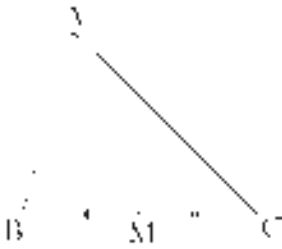
$$(1) PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

$$(2) PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

4. شکل 2.29 میں  $\triangle ABC$  کے ضلع  $BC$  کا وسطی نقطہ  $M$  ہے۔

اگر مربع سم  $290$ ،  $AB^2 + AC^2 = 290$  سم،  $AM = 28$  ہو تو

$BC$  معلوم کیجیے۔



شکل 2.29

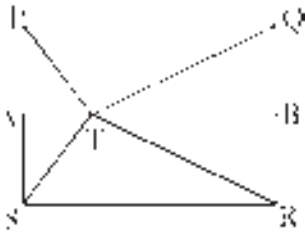
5\* شکل 2.30 میں دکھائے ہوئے کے مطابق نقطہ  $T$  مستطیل  $PQRS$

کے اندرون میں ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$$

(شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق  $A - T - B$ ، اس طرح کہ

$SR \parallel AB$  ضلع کھینچیے)



شکل 2.30

## مجموعہ سوالات 2

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں کون سا فیثاغورث کا اعدادِ ثلاثہ ہے؟

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) قائمہ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ 169 ہے تو اس مثلث کے وتر کی لمبائی کیا ہوگی؟

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) درج ذیل میں سے کس تاریخ کو فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ ہوں گے؟

- (A) 15 / 08 / 17 (B) 16 / 08 / 16 (C) 3 / 5 / 17 (D) 4 / 9 / 15

(4) مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں  $a, b, c$  ہے اگر  $a^2 + b^2 = c^2$  ہو تو وہ کس قسم کا مثلث ہوگا؟

- (A) منفرجتہ الزاویہ مثلث (B) حادۃ الزاویہ مثلث  
(C) قائمۃ الزاویہ مثلث (D) متساوی الاضلاع مثلث

(5) ایک مربع کے وتر کی لمبائی  $10\sqrt{2}$  سم ہے۔ اس کا احاطہ ..... ہے۔

- (A) 10 سم (B)  $5\sqrt{2}$  سم (C) 20 سم (D) 40 سم

(6) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر بنائے گئے ارتفاع کی وجہ سے وتر کے 4 سم اور 9 سم لمبائی کے دو حصے بنتے ہیں تو اس ارتفاع کی لمبائی کتنی ہے؟

- (A) 9 سم (B) 4 سم (C) 6 سم (D)  $2\sqrt{6}$  سم

(7) قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 24 سم اور 18 سم لمبائی کے ہیں۔ مثلث کے وتر کی لمبائی ..... ہوگی۔

- (A) 24 سم (B) 30 سم (C) 15 سم (D) 18 سم

(8)  $\triangle ABC$  میں  $AB = 6\sqrt{3}$  سم،  $AC = 12$  سم اور  $BC = 6$  سم تو  $\angle A$  کی پیمائش کیا ہوگی؟

- (A)  $30^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $45^\circ$

2. درج ذیل مثالیں حل کیجیے۔

- (i) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کی لمبائی  $2a$  ہے۔ مثلث کے ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔  
(ii) کیا 7 سم، 24 سم، 25 سم ضلعوں کی لمبائی والا مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگا؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔  
(iii) ایک مستطیل کے اضلاع کی لمبائی 11 سم اور 60 سم ہے۔ اس کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔  
(iv) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کی لمبائی 9 سم اور 12 سم ہے۔ مثلث کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔  
(v) متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث کے متماثل اضلاع کی لمبائی  $x$  ہے۔ وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔  
(vi)  $\triangle PQR$  میں  $PQ = \sqrt{5}$ ،  $QR = \sqrt{5}$ ،  $PR = \sqrt{5}$  ہو تو کیا  $\triangle PQR$  قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟ اگر ہو تو مثلث کا کون سا زاویہ قائمہ زاویہ ہے۔

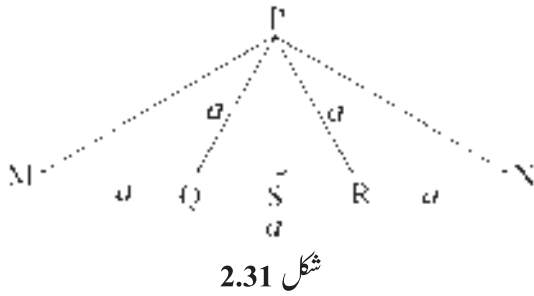
3.  $\triangle RST$  میں  $\angle S = 90^\circ$ ،  $\angle T = 30^\circ$ ،  $RT = 12$  سم تو  $RS$  اور  $ST$  معلوم کیجیے۔

4. ایک مستطیل کا رقبہ 192 مربع سم ہے۔ اس کی لمبائی 16 سم ہے تو اس مستطیل کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

5\*. ایک متساوی الاضلاع مثلث کا ارتفاع  $3\sqrt{3}$  سم ہے۔ مثلث کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

6.  $\triangle ABC$  میں قطعہ  $AP$  وسطانیہ ہے۔ اگر  $BC = 18$ ،  $AB^2 + AC^2 = 260$  ہو تو  $AP$  معلوم کیجیے۔

7.  $\triangle ABC$  متساوی الاضلاع مثلث ہے۔ قاعدہ BC پر نقطہ P اس طرح ہے کہ  $PC = \frac{1}{3} BC$ ، اگر سم  $AB = 6$  سم ہو تو AP معلوم کیجیے۔



8. شکل 2.3 میں  $M - Q - R - N$  ہے اور

دی ہوئی معلومات کی مدد سے ثابت کیجیے کہ

$$PM = PN = \sqrt{3} \times a$$

9. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع میں وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، اس کے ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

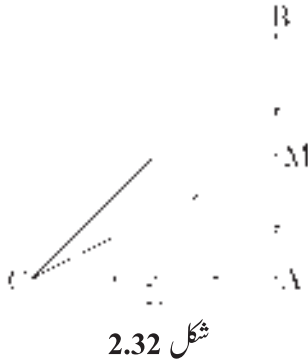
10. نازیہ اور حذیفہ ایک مقام سے ایک ہی وقت میں مشرق اور شمال کی سمت یکساں رفتار سے روانہ ہوئے دو گھنٹے بعد ان کے درمیان فاصلہ

$15\sqrt{2}$  کلومیٹر ہے۔ تو ان کی فی گھنٹہ رفتار معلوم کیجیے۔

11.  $\triangle ABC$  میں  $\angle BAC = 90^\circ$ ، قطعہ BL اور

قطعہ CM، مثلث ABC کے وسطانیہ ہیں، تو

$$4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$$



12. ایک متوازی الاضلاع میں دو متصلہ اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کا مجموعہ مربع سم 130 ہے۔ اس کے ایک وتر کی لمبائی 14 سم ہے۔

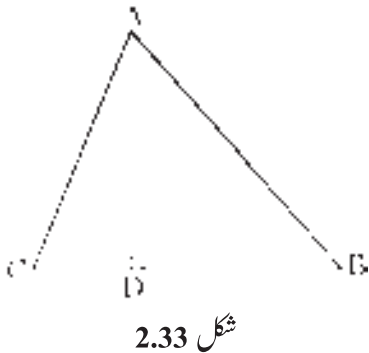
لمبائی کتنی ہے؟ دوسرے وتر کی

13.  $\triangle ABC$  میں BC قطعہ  $AD \perp$  قطعہ اور

$$BD = 3CD$$

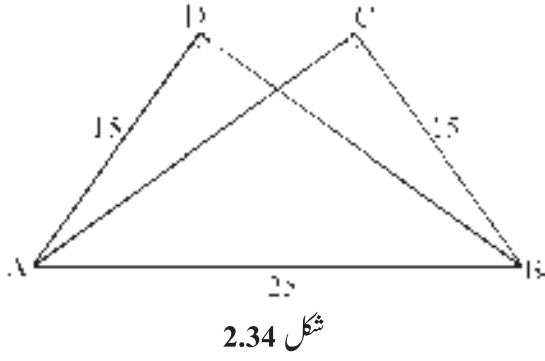
ثابت کیجیے کہ

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$



14\*. متساوی الساقین مثلث میں متماثل اضلاع کی لمبائی 13 سم ہے۔ اُس مثلث کا قاعدہ 10 سم ہے، تو اس مثلث کے ہندسی مرکز سے

اور قاعدے کے مقابل کے راس کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔



15. ذوزنقہ ABCD میں

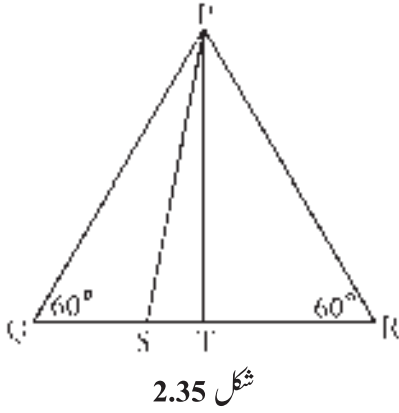
قطعہ DC  $\parallel$  قطعہ AB

قطعہ AD  $\perp$  قطعہ BD

قطعہ BC  $\perp$  قطعہ AC

اگر  $AD = 15$ ،  $BC = 15$  اور  $AB = 25$  ہو تو

A ( $\square$ ABCD) کتنا ہے؟



16\* شکل 2.35 میں  $\triangle PQR$  متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

قطعہ QR پر نقطہ S اس طرح ہے کہ

$$QS = \frac{1}{3} QR$$

$$9PS^2 = 7PQ^2$$

17\*  $\triangle PQR$  کا وسطانیہ قطعہ PM ہے اگر  $PQ = 40$ ،  $PR = 42$  اور  $PM = 29$  ہو تو QR معلوم کیجیے۔

18  $\triangle ABC$  کا وسطانیہ قطعہ AM ہے اگر  $AB = 22$ ،  $AC = 34$ ،  $BC = 24$  ہو تو قطعہ AM کی لمبائی معلوم کیجیے۔



ICT Tools or Links

انٹرنیٹ سے 'Story on the life of Pythagoras' حاصل کیجیے اور Slide show تیار کیجیے۔



آئیے سیکھیں



- ایک، دو، تین نقاط سے گزرنے والے دائرے
- قاطع خط اور مماس
- مس کرنے والے دائرے
- دائرہ کے قوس
- قوسی زاویہ اور مقطوعہ قوس
- مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع
- مماس قاطع زاویے کا مسئلہ
- وتروں کے تقاطع کا مسئلہ

آئیے ذرا یاد کریں



دائرہ کے تعلق سے اصطلاحات 'مرکز، نصف قطر، قطر، وتر، اندرون، بیرون' سے بخوبی واقف ہیں۔  
'متماثل دائرے، ہم مرکز دائرے اور قطع کرنے والے دائرے' ان اصطلاحوں کو یاد کیجیے۔



متقاطع دائرے



ہم مرکز دائرے



متماثل دائرے

نویں جماعت میں مطالعہ کیے ہوئے وتروں کی خصوصیت ذیل کے عملی کام کی مدد سے یاد کیجیے۔

**عملی کام (I):** بازو کی شکل 3.1 میں C مرکز والے دائرے کا وتر قطعہ DE ہے۔

DE وتر  $CF \perp$  قطعہ

اگر دائرے کا قطر 20 سم اور  $DE = 16$  ہو تو  $CF = ?$

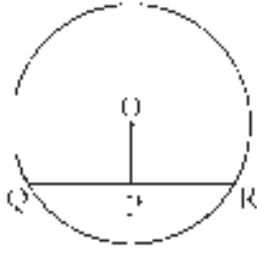
اس سوال کو حل کرنے کے لیے استعمال کیے گئے مسئلے اور خصوصیت کو یاد کر کے لکھیے۔



شکل 3.1

- (1) دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود
- (2)
- (3)

ان خصوصیت کا استعمال کر کے سوال حل کیجیے۔



شکل 3.2

عملی کام (II) : متصلہ شکل 3.2 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔

قطعہ QR وتر ہے۔ نقطہ P وتر QR کا وسطی نقطہ ہے۔

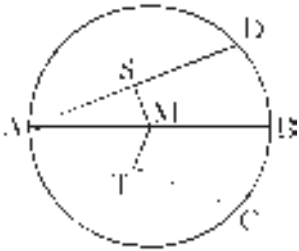
اگر  $OP = 10$  ،  $QR = 24$  ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

اس سوال کو حل کرنے کے لیے استعمال میں آنے والے مسئلے لکھیے۔

(1)

(2)

ان مسئلوں کا استعمال کر کے مثال حل کیجیے۔



شکل 3.3

عملی کام (III) : شکل 3.3 میں دائرے کا مرکز M ہے اور قطعہ AB قطر ہے۔

AD وتر  $MS \perp$  قطعہ ، AC وتر  $MT \perp$  قطعہ ،

$\angle DAB \cong \angle CAB$  ہو تو ثابت کیجیے  $AD \cong AC$  وتر

اس سوال کو حل کرنے کے لیے درج ذیل میں سے کون سا مسئلہ استعمال کریں گے؟

(1) دائرے کے دو وتر، دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوں تو ان کی لمبائی مساوی ہوتی ہے۔

(2) ایک ہی دائرے کے متماثل وتر، دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

اس کے علاوہ مثلث کے متماثلت کی درج ذیل میں سے کون سی آزمائش استعمال ہوگی؟

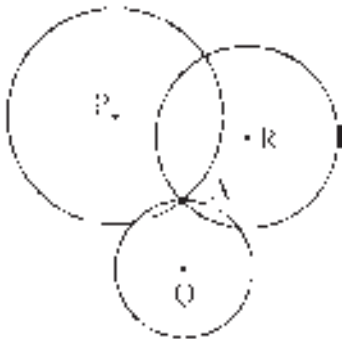
(1) ضل زا ضل (2) زا ضل زا (3) ضل ضل ضل (4) زا ضل (5) وتر ضلع آزمائش

مناسب آزمائش اور مسئلہ کا استعمال کر کے ثبوت لکھیے۔

آئیے سمجھ لیں



ایک، دو، تین نقاط سے گزرنے والے دائرے



شکل 3.4

متصلہ شکل 3.4 میں، ایک مستوی میں نقطہ A دکھایا گیا ہے۔ P، Q اور R مراکز

کے تین دائرے نقطہ A سے گزرتے ہیں۔ کیا آپ کو ایسا محسوس ہوتا ہے کہ نقطہ A سے

گزرنے والے اور کتنے دائرے ہو سکتے ہیں؟

آپ کا جواب بہت زیادہ یا 'بے شمار' اس طرح ہو تو صحیح ہے۔ ایک ہی نقطہ

سے گزرنے والے بے شمار دائرے ہوتے ہیں۔

متصلہ شکل 3.5 میں A اور B متفرق نقاط سے گزرنے والے کتنے دائرے ہوں گے؟

A، B، C ان تینوں نقاط سے کتنے دائرے گزر سکتے ہیں؟

ذیل میں دیے ہوئے عملی کام میں کتنے جوابات حاصل ہوتے ہیں۔ آئیے دیکھتے ہیں۔

شکل 3.5

**عملی کام (I) :** نقطہ A اور نقطہ B کو ملانے والا قطعہ خط AB کھینچئے۔

اس قطعہ کا عمودی ناصف خط  $l$  کھینچئے۔ خط  $l$  پر نقطہ P مرکز ہے اور PA کو

نصف قطر مان کر دائرہ بنائیے۔ دیکھیے کہ یہ دائرہ نقطہ B سے گزرتا ہے۔ اس کی

وجہ معلوم کیجئے۔ (عمودی ناصف کی خصوصیت یاد کیجئے)



شکل 3.6

خط  $l$  پر ایک اور نقطہ Q لیجئے۔ Q کو مرکز اور QA کو نصف قطر مان کر بنایا گیا۔ کیا یہ دائرہ بھی نقطہ B سے گزرتا ہے؟ ذرا غور کیجئے۔

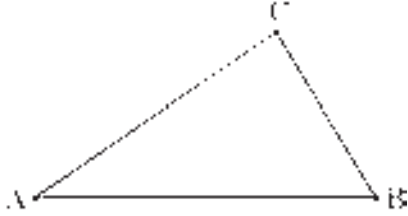
نقطہ A اور نقطہ B سے گزرنے والے اور کتنے دائرے آپ بنا سکتے ہیں؟ ان کے مراکز کہاں واقع ہوں گے؟

**عملی کام (II) :** غیر ہم خطی نقاط A، B، C لیجئے۔

ان تینوں نقاط سے گزرنے والا دائرہ بنانے کے لیے ہمیں کیا کرنا ہوگا؟

ان تینوں نقاط سے گزرنے والا دائرہ بنائیے۔

کیا ان تین نقاط سے گزرنے والے مزید دائرے بنائے جاسکتے ہیں؟ غور کیجئے۔



شکل 3.7

**عملی کام (III) :** تین غیر ہم خطی نقاط D، E، F لیجئے۔ ان تینوں نقاط سے گزرنے والا دائرہ بنانے کی کوشش کیجئے۔ اس طرح ہمیں دائرہ بنانا ممکن

ہے یا نہیں۔ اگر نہیں ہے تو وہ کیوں نہیں بنایا جاسکتا؟ غور کیجئے۔

اسے ذہن نشین کر لیں

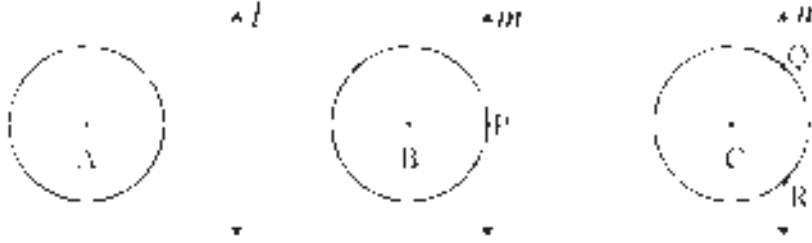


(1) ایک نقطہ سے بے شمار دائرے گزرتے ہیں۔

(2) دو مختلف نقاط سے بے شمار دائرے گزرتے ہیں۔

(3) تین غیر ہم خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزرتا ہے۔

(4) تین ہم خطی نقاط سے ایک بھی دائرہ نہیں گزرتا۔

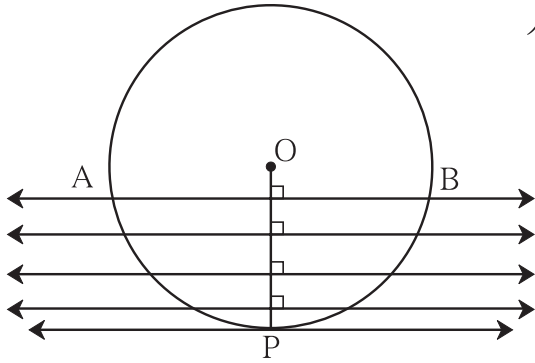


شکل 3.8

شکل 3.8 میں خط  $l$  اور دائرہ میں ایک بھی مشترک نقطہ نہیں ہے۔

شکل 3.8 میں خط  $m$  اور دائرہ میں نقطہ  $P$  ایک ہی مشترک نقطہ ہے۔ یہاں خط  $m$  دائرے کا مماس ہے اور نقطہ  $P$  مماسی نقطہ یا مماسی نقطہ کہلاتا ہے۔

شکل 3.8 میں خط  $n$  اور دائرے میں، دو مشترک نقاط ہیں۔ نقاط  $Q$  اور  $R$  خط  $n$  اور دائرے کے نقطہ تقاطع ہیں اور خط  $n$ ، قاطع خط ہے۔ دائرے کے مماس کی ایک اہم خصوصیت ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیجیے۔



شکل 3.9

**عملی کام:** مرکز 'O' والا ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ اس دائرے کا ایک نصف قطر

قطعہ OP بنائیے۔ اس نصف قطر پر ایک عمودی خط کھینچیے۔ اس خط

اور دائرے کے نقطہ تقاطع کو A اور B نام دیجیے۔ غور کیجیے کہ خط AB

نقطہ O سے نقطہ P کی جانب اس طرح کھسکتا ہے کہ اس کی پہلی

حالت، نئی حالت کے متوازی رہے۔ یعنی کھسکتا ہو خط AB اور

نصف قطر، ان کے درمیان کا زاویہ قائمہ زاویہ برقرار رہے گا۔ ایسا

ہوتے وقت نقطہ A اور نقطہ B دائرے پر ایک دوسرے کے قریب

آنے لگتے ہیں۔ اور آخر میں نقطہ P میں شامل ہو جاتے ہیں۔

اس حالت میں خط AB کی آخری حالت دائرے کا مماس ہوگا۔ البتہ نصف قطر OP اور خط AB کی نئی حالت کے درمیان کا زاویہ قائمہ زاویہ رہتا ہے۔

اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ دائرے کے کسی بھی نقطہ سے گزرنے والا مماس اس نقطہ کو مرکز سے جوڑنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کو 'مماس نصف قطر کا مسئلہ' کہتے ہیں۔

مماس - نصف قطر مسئلہ (Tangent-radius Theorem)

مسئلہ : ایک دائرے کے کسی بھی نقطہ سے گزرنے والا مماس، اس نقطہ کو مرکز سے جوڑنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔  
یہ مسئلہ بالواسطہ طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

دیا ہوا ہے : 'O' مرکز والے دائرے کو خط  $l$ ، نقطہ A پر مس کرتا ہے۔ قطعہ OA نصف قطر ہے۔

ثابت کرنا ہے : OA نصف قطر  $\perp$  خط  $l$

ثبوت : فرض کیجیے۔ خط  $l$ ، خط OA پر عمود نہیں ہے۔

فرض کیجیے، نقطہ O سے گزرنے والے خط  $l$  پر دوسرا عمودی خط OB کھینچا گیا ہے۔

ظاہر ہے نقطہ B، نقطہ A سے متفرق ہونا چاہیے۔

خط  $l$  پر نقطہ C، اس طرح لیجیے کہ A-B-C اور  $BA = BC$

اب  $\triangle OBA$  اور  $\triangle OBC$  میں،

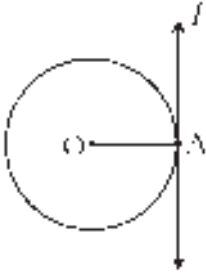
... (عمل)  $BC \cong BA$  قطعہ

... (ہر ایک قائمہ زاویہ)  $\angle OBC \cong \angle OBA$

... (مشترک)  $OB \cong OB$  قطعہ

... (ضلع زاصل آزمائش)  $\therefore \triangle OBC \cong \triangle OBA$

$\therefore OC = OA$



شکل 3.10

لیکن قطعہ OA، نصف قطر ہے۔

اس لیے OC قطعہ بھی نصف قطر ہوگا۔

$\therefore$  نقطہ C دائرے پر واقع ہوگا۔ یعنی خط  $l$ ، دائرے کو نقاط A

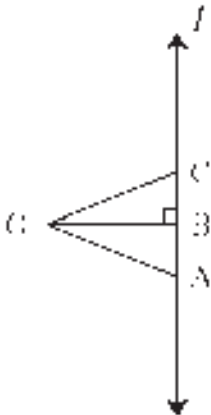
اور C دونوں نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

یہ بیان دیے ہوئے بیان سے متضاد ہے۔ کیونکہ خط  $l$  مماس ہے۔

لہذا خط  $l$  دائرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے)

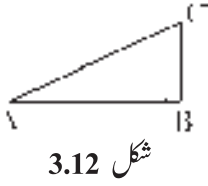
خط  $l$ ، نصف قطر OA پر عمود نہیں ہے، یہ غلط ہے۔

$\therefore$  OA نصف قطر  $\perp$  خط  $l$



شکل 3.11

## آئیے ذرا یاد کریں



شکل 3.12

ہم قائمہ الزاویہ مثلث میں، وتر، سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے، ہمارے سیکھے ہوئے کن کن مسئلوں کے ذریعے اسے ثابت کر سکتے ہیں؟

## آئیے سمجھ لیں



### مماس - نصف قطر مسئلہ کا عکس (Converse of tangent radius theorem)

مسئلہ : دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے سے گزرنے والا اور اس نصف قطر پر عمودی خط، اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔

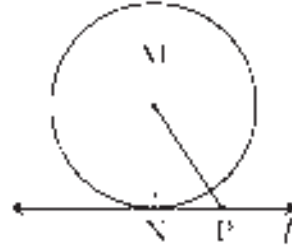
دیا ہوا ہے : خط MN، مرکز M والے دائرے کا نصف قطر ہے۔

نقطہ N سے گزرنے والا خط l نصف قطر MN پر عمود ہے۔

ثابت کرنا ہے : خط l اس دائرے کا مماس ہے۔

ثبوت : خط l پر نقطہ N کے علاوہ کوئی دوسرا ایک نقطہ P لیجیے۔

قطعہ MP کھینچیے۔



شکل 3.13

اب،  $\triangle MNP$  میں  $\angle N$  قائمہ زاویہ ہے۔

∴ قطعہ MP وتر ہے۔

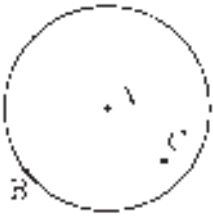
∴ قطعہ MN > قطعہ MP

∴ نقطہ P کا دائرے پر واقع ہونا ممکن نہیں ہے۔ یعنی خط l پر نقطہ N کے علاوہ کوئی اور دوسرا نقطہ دائرے پر نہیں ہے۔

∴ خط l دائرے کو صرف نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔

∴ خط l اس دائرے کا مماس ہے۔

## آئیے بحث کریں



شکل 3.14

A مرکز والے دائرے پر نقطہ B دیا ہوا ہے۔ اس دائرے کا نقطہ B سے گزرنے والا مماس کھینچنا ہے۔

نقطہ B سے گزرنے والے بے شمار خطوط ہوتے ہیں۔ ان میں سے کون سا خط اس دائرے کا مماس

ہو سکتا ہے؟ وہ کیسے معلوم کریں گے؟

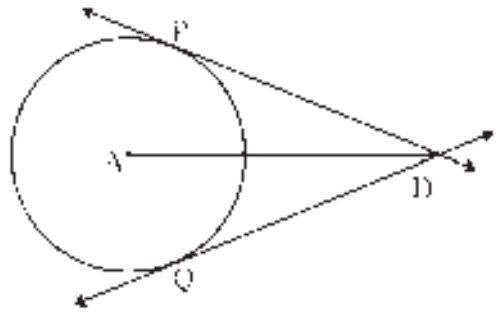
کیا نقطہ B سے گزرنے والے ایک سے زیادہ مماس ہو سکتے ہیں؟

دائرے کے اندرون میں نقطہ C واقع ہے۔ کیا اس نقطہ سے اس دائرے پر مماس کھینچ سکتے ہیں؟

کیا دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ D سے، دائرے کا مماس گذر سکتا ہے؟ اگر ہے تو کتنے مماس گذر سکتے ہیں؟

بحث و مباحثہ سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ شکل 3.15 کے مطابق دائرے کے بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔

بازو کی شکل 3.15 میں خط DP اور خط DQ، دونوں مماس ہیں جو A مرکز والے دائرے کو نقطہ P اور Q پر مس کرتے ہیں۔  
قطعہ DP اور قطعہ DQ کو مماسی قطعہ کہتے ہیں۔



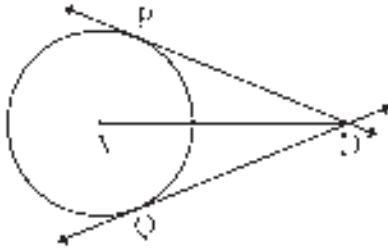
شکل 3.15

**مماسی قطعہ کا مسئلہ (Tangent segment Theorem)**

مسئلہ : دائرے کے بیرونی نقطہ سے، اس دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعہ متماثل ہوتے ہیں۔

مقابلہ کی شکل کی مدد سے 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' طے کیجیے۔

نصف قطر AP اور AQ کھینچ کر اس مسئلہ کا ثبوت درج ذیل خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کیجیے۔



شکل 3.16

ثبوت :  $\triangle PAD$  اور  $\triangle QAD$  میں،

ضلع PA  $\cong$  ..... (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

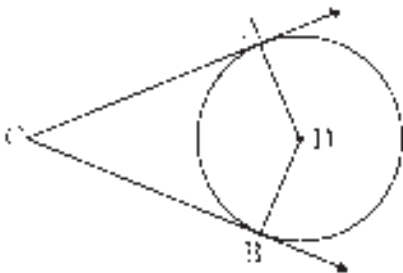
ضلع AD  $\cong$  ضلع AD ..... (.....)

$\angle APD \cong \angle AQD = 90^\circ$  ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

$\therefore \triangle PAD \cong \triangle QAD$  ... (.....)

$\therefore$  ضلع DP  $\cong$  ضلع DQ ... (.....)

**حل کردہ مثالیں**



شکل 3.17

مثال (1) : دی ہوئی شکل 3.17 میں D مرکز والا دائرہ،  $\angle ACB$  کی ساقین کو نقطہ A

اور نقطہ B پر مس کرتا ہے۔ اگر  $\angle ACB = 52^\circ$  ہو تو  $\angle ADB$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : ذواربعیۃ الاضلاع کے چاروں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ  $360^\circ$  ہوتا ہے۔

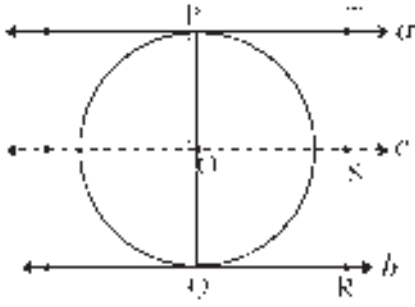
$$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$$

$$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ \quad \dots \text{(مماس-نصف قطر کا مسئلہ)}$$

$$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$$

$$\angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$$

مثال (2) : خط  $a$  اور خط  $b$  متوازی مماس،  $O$  مرکز والے دائرے کو بالترتیب نقطہ  $P$  اور نقطہ  $Q$  پر مس کرتے ہیں، تو ثابت کیجیے۔  
قطعہ  $PQ$  دائرے کا قطر ہے۔



شکل 3.18

ثبوت : نقطہ  $O$  سے گزرنے والا خط  $c$  اس طرح کھینچیے جو خط  $a$  کے متوازی ہو۔

خطوط  $a, c, b$  پر بالترتیب نقاط  $R, S, T$  شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق لیجیے۔

نصف قطر  $OP$  اور نصف قطر  $OQ$  کھینچیے۔

(مماس- نصف قطر کا مسئلہ) ...  $\angle OPT = 90^\circ$ , اب

(I) ... (داخلہ زاویہ کی خصوصیت) ...  $\angle SOP = 90^\circ$   $\therefore$

(عمل) ... خط  $c \parallel$  خط  $a$ , اب

(دیا ہوا ہے) ... خط  $a \parallel$  خط  $b$

(عبوری خاصیت) ... خط  $b \parallel$  خط  $c$

(مماس- نصف قطر کا مسئلہ) ...  $\angle OQR = 90^\circ$

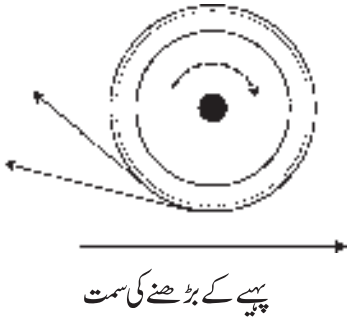
(II) ... (داخلہ زاویے کی خصوصیت) ...  $\angle SOQ = 90^\circ$   $\therefore$

[بیان (I) اور (II) سے] ...  $\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$   $\therefore$

$\therefore$  شعاع  $OP$  اور شعاع  $OQ$ ، مخالف شعاعیں ہیں۔

$\therefore$  نقاط  $P, O, Q$  ہم خطی نقاط ہیں۔

$\therefore$  خط  $PQ$ ، دائرے کا قطر ہے۔



پہیے کے بڑھنے کی سمت

آپ نے دیکھا ہوگا کہ بارش کے موسم میں راستے پر تھوڑا پانی جمع ہو اور وہاں سے تیز رفتار موٹر سائیکل گذرتی ہے تب اس کے پچھلے پہیے سے اڑنے والے پانی کی دھار آپ نے دیکھی ہے۔ یہ دھار دائرہ کے مماس کی طرح دکھائی دیتی ہے۔ یہ دھار ویسی ہی کیوں ہوتی ہیں؟ اس کی معلومات اپنے سائنس کے ٹیچر سے حاصل کیجیے۔

چھری تیز کرنے کے دوران سان سے نکلنے والی چنگاریوں کا مشاہدہ کیجیے کیا وہ بھی مماس کی طرح دکھائی دیتی ہیں؟

### اسے ذہن نشین کر لیں



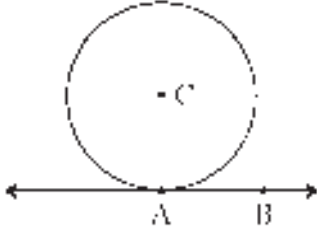
(1) مماس نصف قطر مسئلہ : دائرے کے کسی بھی نقطے سے گزرنے والا مماس اس نقطہ اور مرکزی نقطے کو ملانے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

(2) مماس نصف قطر مسئلہ کا عکس : دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے سے گزرنے والا اور اس نصف قطر پر عمودی خط، اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔

(3) دائرے کے بیرونی نقطے سے، اس دائرے پر کھینچیے گئے مماسی قطعے متماثل ہوتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 3.1

1. متعلقہ شکل 3.19 میں نقطہ C دائرے کا مرکز ہے۔ دائرے کا نصف قطر 6 سم ہے۔ خط AB دائرے کو نقطہ A پر مس کرتا ہے۔ اس معلومات کی بنا پر درج ذیل سوالات کے جوابات لکھیے۔



شکل 3.19

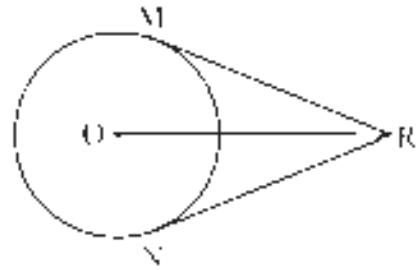
(1)  $\angle CAB$  کی پیمائش کتنے درجے ہے؟ کیوں؟

(2) نقطہ C، خط AB سے کتنے فاصلے پر واقع ہے؟ کیوں؟

(3) اگر  $6 \text{ سم} = d(A, B)$  ہو تو  $d(B, C)$  معلوم کیجیے۔

(4)  $\angle ABC$  کی پیمائش کتنے درجے ہے؟ کیوں؟

2. بازو کی شکل میں، O مرکز والے دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ R سے کھینچے گئے دائرے کے مماسی قطعات RM اور RN، بالترتیب M اور N نقاط پر مس کرتے ہیں۔ اگر  $10 \text{ سم} = OR$  اور دائرے کا نصف قطر 5 سم ہو تو۔

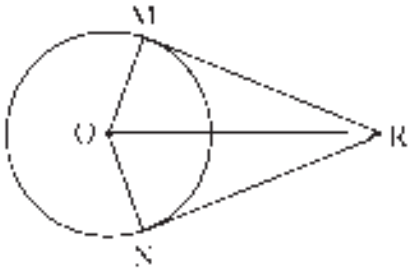


شکل 3.20

(1) ہر مماسی قطعات کی لمبائی کتنی ہے؟

(2)  $\angle MRO$  کی پیمائش کتنی ہے؟

(3)  $\angle MRN$  کی پیمائش کتنی ہے؟



شکل 3.21

3. O مرکز والے دائرے کے مماسی قطعات RM اور RN ہیں تو

ثابت کیجیے کہ  $\angle MRN$  اور  $\angle MON$  ان دونوں زاویوں کا

ناصف قطعہ OR ہے۔

4. 4.5 سم نصف قطر والے دائرے کے دو مماسی قطعات ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ تو بتائیے کہ ان دو مماسی قطعات کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟ وجہ بتائیے۔



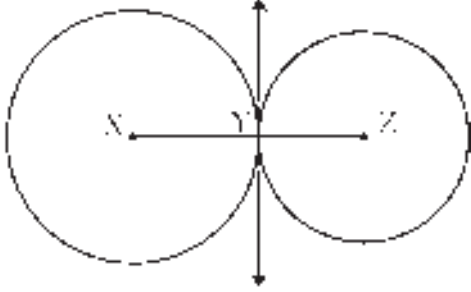
### ICT Tools or Links

کمپیوٹر میں جیو جیب راسافٹ ویئر کی مدد سے دائرہ اور دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ سے مماسی قطعات کھینچ کر تصدیق کیجیے کہ یہ مماسی قطعات متماثل ہیں۔



مس کرنے والے دائرے (Touching circles)

عملی کام (I) :



شکل 3.22

شکل 3.22 میں دکھائے ہوئے کے مطابق

X-Y-Z ہم خطی نقاط لیجیے۔

X کو مرکز مان کر XY نصف قطر والا دائرہ بنائیے۔

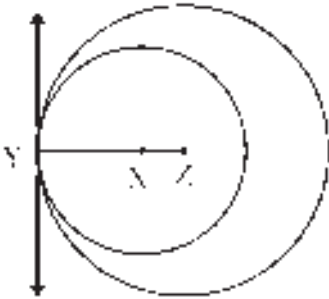
Z کو مرکز مان کر YZ نصف قطر کا دوسرا دائرہ بنائیے۔

آپ مشاہدہ کریں گے کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو صرف ایک

نقطہ Y قطع کرتے ہیں۔

نقطہ Y سے، خط YZ پر عمود کھینچیے۔ اسے ذہن میں رکھیں کہ یہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔

عملی کام (II) :



شکل 3.23

شکل 3.23 کے مطابق Y-X-Z ہم خطی نقاط لیجیے۔

Z کو مرکز مان کر ZY نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔

X کو مرکز مان کر XY نصف قطر کا دوسرا دائرہ بنائیے۔

دونوں دائرے صرف Y نقطے پر قطع کرتے ہیں۔ مشاہدہ کیجیے۔

نقطہ Y سے قطعہ YZ پر عمود کھینچیے۔ اسے ذہن نشین رکھیے کہ یہ خط

دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔

مذکورہ بالا عملی کام سے آپ یہ سمجھ چکے ہوں گے کہ دونوں شکلوں کے دائرے ایک ہی مستوی میں واقع ہیں۔ اور ایک دوسرے کو صرف

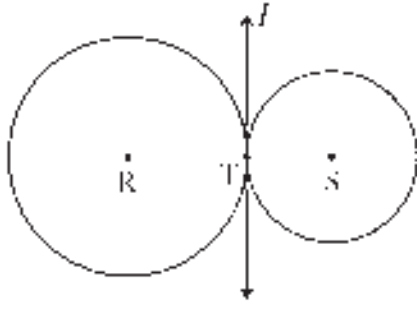
ایک ہی نقطے پر قطع کرتے ہیں۔ ایسے دائروں کو ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائرے یا مماسی دائرے کہتے ہیں۔

مس کرنے والے دائروں کی تعریف ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

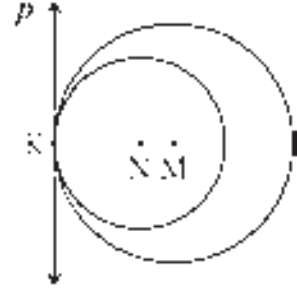
ایک ہی مستوی میں واقع دو دائرے اسی مستوی کے ایک ہی خط کو ایک ہی نقطے پر قطع کرتے ہوں تو انہیں مس کرنے والے دائرے کہتے ہیں۔

وہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہوتا ہے۔

دونوں دائرے اور خط میں واقع مشترک نقطہ کو مشترک مماسی نقطہ کہتے ہیں۔



شکل 3.24



شکل 3.25

شکل 3.24 میں، مرکز R اور S والے دو دائرے خط  $l$  کو صرف ایک نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔ اس لیے وہ دونوں مس کرنے والے دائرے ہیں اور خط  $l$  ان کا مشترک مماس ہے۔ اس شکل کے دائرے بیرونی طور پر مس کرنے والے دائرے ہیں۔ شکل 3.25 میں دائرے اندرونی طور پر مس کرنے والے ہیں۔ خط  $p$  ان کا مشترک مماس ہے۔

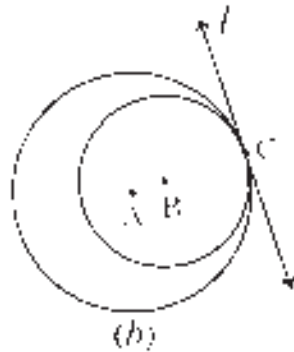
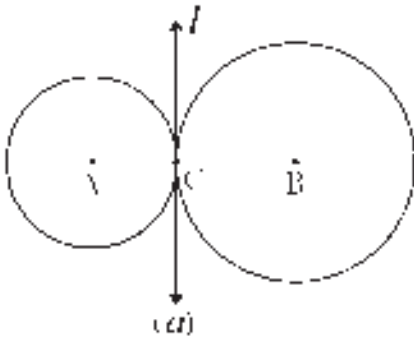
غور کیجیے



- (1) شکل 3.24 کے مطابق ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کو بیرونی طور پر مس کرنے والے دائرے کیوں کہتے ہیں؟
- (2) شکل 3.25 کے مطابق ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کو اندرونی طور پر مس کرنے والے دائرے کیوں کہتے ہیں؟
- (3) شکل 3.26 میں مرکز A اور B والے دائرے کے نصف قطر بالترتیب 3 سم اور 4 سم ہوں تو
  - (i) شکل 3.26 (a) میں  $d(A, B)$  کتنا ہوگا؟
  - (ii) شکل 3.26 (b) میں  $d(A, B)$  کتنا ہوگا؟

مس کرنے والے دائروں کا مسئلہ (Theorem Of Touching Circles)

مسئلہ : ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کا تماسی نقطہ ان دائروں کے مراکز کو جوڑنے والے خط پر واقع ہوتا ہے۔



شکل 3.26

دیا ہوا ہے: A اور B ایک دوسرے کو مس کرنے والے دو دائروں کے مراکز ہیں۔ ان کا تماسی نقطہ C ہے۔  
ثابت کرنا ہے: نقطہ C خط AB پر واقع ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے، خط l مس کرنے والے دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔ AC قطعہ  $l \perp$  خط، BC قطعہ  $l \perp$  خط  
∴ خط AC اور خط BC، خط l پر عمود ہیں۔  
∴ نقطہ C سے خط l پر ایک ہی عمود کھینچ سکتے ہیں۔ C, A, B ہم خطی ہیں۔

### اسے ذہن نشین کر لیں



- (1) ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کا مشترک نقطہ (تماسی نقطہ)، ان دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط پر ہوتا ہے۔
- (2) بیرونی طور پر مس کرنے والے دائروں کے مراکز کے درمیان فاصلہ، ان دائروں کے نصف قطروں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔
- (3) اندرونی طور پر مس کرنے والے دائروں کے مراکز کے درمیان فاصلہ، ان دائروں کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔

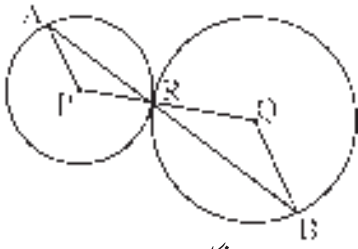
### مشقی سیٹ 3.2

1. ایک دوسرے کو اندرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 3.5 سم اور 4.8 سم ہیں۔ تب ان کے مراکزوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

2. بیرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 5.5 سم اور 4.2 سم ہیں۔ تب ان کے مراکزوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

3. نصف قطر بالترتیب 4 سم اور 2.8 سم کے (i) بیرونی طور پر مس کرنے والے (ii) اندرونی طور پر مس کرنے والے دائرے بنائیے۔

4. شکل 3.27 میں P اور Q مرکز والے دائرے ایک دوسرے کو نقطہ R پر مس کرتے ہیں۔ نقطہ R سے گزرنے والا خط اس دائرے



شکل 3.27

کو بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ تو

(1)  $BQ \parallel AP$  قطعہ ثابت کیجیے۔

(2) ثابت کیجیے  $\Delta APR \cong \Delta RQB$

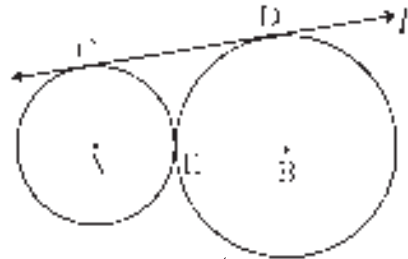
(3) اگر  $\angle PAR$  کی پیمائش  $35^\circ$  ہو تو  $\angle RQB$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔

5. شکل 3.28 میں، مرکز A اور B والے دو دائرے ہیں جو ایک

دوسرے کو نقطہ E پر مس کرتے ہیں۔ خط l ان کا مشترک مماس،

انہیں نقاط C اور D پر مس کرتا ہے۔ اگر دائروں کے نصف قطر

بالترتیب 4 سم اور 6 سم ہوں تو قطعہ CD کی لمبائی کتنی ہوگی؟

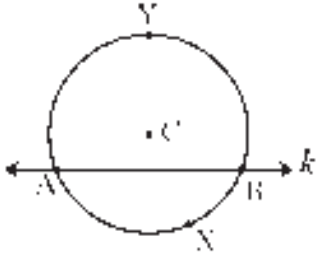


شکل 3.28

## آئیے ذرا یاد کریں



دائرہ کا قوس (Arc of a Circle) :

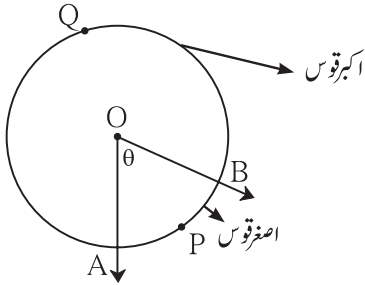


شکل 3.29

قاطع خط کی وجہ سے دائرہ دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ان میں سے کوئی ایک حصہ اور قاطع خط کے دائرے پر واقع دو نقاط سے مل کر حاصل ہونے والی شکل کو دائرہ کا قوس کہتے ہیں۔ دائرہ اور قاطع خط کے نقطہ تقاطع کو قوس کے اختتامی نقاط یا قوسین کے سرے کہتے ہیں۔ شکل 3.29 میں قاطع خط  $k$  کی وجہ سے،  $C$  مرکز والے دائرے کے  $AYB$  اور  $AXB$ ، دو قوس بنے ہوئے ہیں۔

قاطع خط کے جس سمت میں دائرے کا مرکز ہوتا ہے۔ اس جانب کے قوس کو اکبر قوس کہتے ہیں۔ اور مخالف سمت کے قوس کو اصغر قوس کہتے ہیں۔ شکل 3.29 میں قوس  $AYB$  اکبر قوس اور قوس  $AXB$  اصغر قوس ہے۔ کسی بھی قوس کا نام تین حروف استعمال کر کے لکھنے پر ہمیں واضح طور پر سمجھ میں آتا ہے لیکن کچھ شک نہ ہو تو اصغر قوس کا نام اختتامی نقاط کے حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثلاً شکل 3.29 میں قوس  $AXB$  کو قوس  $AB$  بھی لکھتے ہیں۔ ہم اصغر قوس کا نام لکھنے کے لیے یہی طریقہ استعمال کریں گے۔

## مرکزی زاویہ (Central Angle)



شکل 3.30

جس زاویے کا راسی نقطہ دائرے کے مرکز پر واقع ہو۔ اس زاویہ کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔ شکل 3.30 میں 'O' مرکز والے دائرے کا مرکزی زاویہ  $\angle AOB$  ہے۔ قاطع خط کی طرح مرکزی زاویہ کی وجہ سے بھی دائرہ دو قوسوں میں تقسیم ہوتا ہے۔

## قوس کی پیمائش (Measure of an arc)

کبھی کبھار دو قوسوں کا موازنہ کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ اس لیے قوس کی پیمائش کی تعریف اگلے صفحہ کے مطابق طے کی گئی ہے۔

(1) اصغر قوس کی پیمائش، اس کے نظیری مرکزی زاویہ کی پیمائش کے مساوی ہوتی ہے۔ شکل 3.30 میں مرکزی  $\angle AOB$  کی پیمائش  $\theta$  ہے اس لیے اصغر قوس  $APB$  کی پیمائش بھی  $\theta$  ہی ہے۔

(2) نظیری اصغر قوس کی پیمائش =  $360^\circ -$  اکبر قوس کی پیمائش  $\rightarrow$   
 (شکل 3.30 میں) ...  $360^\circ - \theta =$  قوس APB کی پیمائش  $- 360 =$  اکبر قوس AQB کی پیمائش

(3) نصف دائرہ کے قوس کی پیمائش، یعنی نصف دائرے کی پیمائش  $180^\circ$  ہوتی ہے۔

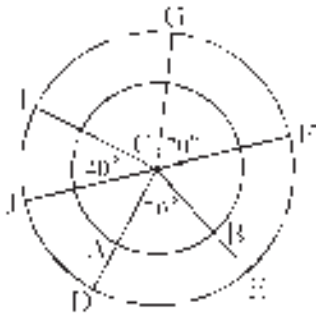
(4) مکمل دائرے کی پیمائش  $360^\circ$  ہوتی ہے۔

آئیے سمجھ لیں



### قوسین کی متماثلت (Congruence of arcs)

جب دو ہم مستوی شکلیں ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں، تب ایسا کہا جاتا ہے کہ وہ شکلیں ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں۔ یہ ہمیں معلوم ہے کہ متماثلت کے اس تصور کی مدد سے مساوی پیمائش کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اسی طرح دو قوسین کی پیمائش مساوی ہو تو کیا وہ دونوں قوس متماثل ہو سکتے ہیں؟ اس سوال کا جواب درج ذیل عملی کام کے ذریعے معلوم کیجیے۔



شکل 3.31

**عملی کام :** شکل 3.31 کے مطابق C مرکز والے دو دائرے بنائیے۔  $\triangle DCE$  اور

$\triangle FCG$  مساوی پیمائشوں کے دو زاویے بنائیے۔ ان زاویوں کی پیمائشوں کے علاوہ مختلف پیمائش کا زاویہ ICJ بنائیے۔

$\triangle DCE$  کی ساقین، اندرونی دائرے کو قطع کرنے کی وجہ سے حاصل ہونے والے قوس کا نام AB دیجیے۔

قوس کی پیمائش کی تعریف کی بنا پر قوس AB اور قوس DE کی پیمائش مساوی ہے، کیا یہ آپ کو سمجھ میں آگیا؟

کیا یہ قوس ایک دوسرے کو مکمل طور پر منطبق ہوتے ہیں؟ یقینی طور پر منطبق نہیں ہوتے۔

اب  $DE - C$ ،  $FG - C$  اور  $IJ - C$  ان قوسی تراشوں کو کاٹ کر جدا کیجیے۔ انہیں ایک دوسرے سے جوڑ کر DE، FG اور IJ ان میں سے کون سے قوس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں؟ دیکھیے۔

اس عملی کام سے دو قوسوں کو متماثل ہونے کے لیے ان کی پیمائش مساوی ہونا کافی نہیں، یہ بات ذہن نشین کیجیے۔

دو قوسوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی شرط کا مکمل ہونا ضروری ہے کیا ایسا آپ کو محسوس ہوتا ہے؟

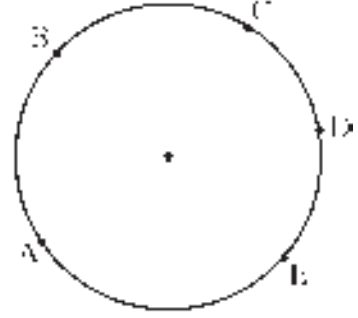
اوپر کے عملی کام سے یہ بات ذہن میں آتی ہے کہ،

دو قوس کے نصف قطر اور ان کی پیمائش متماثل ہوں تو وہ دو قوسین ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

قوس DE اور قوس GF متماثل ہیں۔ اسے 'قوس  $DE \cong$  قوس GF' سے ظاہر کرتے ہیں۔

قوسین کے پیمائشوں کے مجموعے کی خصوصیت (Property of sum of measures of arcs)

شکل 3.32 میں A، B، C اور D ایک ہی دائرے پر واقع نقاط ہیں۔ ان نقاط کی وجہ سے کئی قوس بن گئے ہیں۔ ان میں سے قوس ABC اور قوس CDE دونوں میں صرف ایک نقطہ C مشترک ہے۔ اس لیے قوس ABC اور قوس CDE کی پیمائش کا مجموعہ قوس ACE کی پیمائش کے مساوی ہے۔



شکل 3.32

$$m(\text{قوس } ABC) + m(\text{قوس } CDE) = m(\text{قوس } ACE)$$

لیکن قوس ABC اور قوس BCE میں ایک سے زائد نقاط [قوس BC کے تمام نقاط] مشترک ہیں۔ اس لیے قوس ABC اور قوس BCE کی پیمائشوں کا مجموعہ قوس ABE کی پیمائش کے مساوی نہیں ہے۔

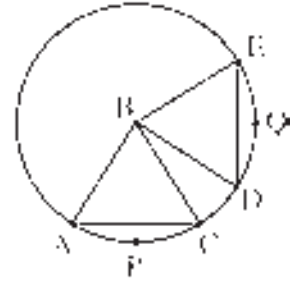
مسئلہ : ایک ہی دائرے کے (یا متماثل دائروں کے) متماثل قوسین کے نظیری وتر متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : B مرکز والے دائرے میں قوس DQE  $\cong$  قوس APC

ثابت کرنا ہے : DE وتر  $\cong$  AC وتر

ثبوت : (خالی جگہ پر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کیجیے)

ΔDBE اور ΔABC میں،



شکل 3.33

ضلع AB  $\cong$  ضلع DB ... (.....)

ضلع .....  $\cong$  ضلع ..... (.....)

$\angle ABC \cong \angle DBE$  ... (متماثل قوسین کی تعریف)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBE$  ... (.....)

$\therefore$  وتر AC  $\cong$  وتر DE ... (.....)

مسئلہ : ایک دائرے کے (یا متماثل دائروں کے) متماثل وتروں کے نظیری قوسین متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : قطعہ PQ اور قطعہ RS یہ O مرکز والے دائرے کے متماثل وتر ہیں۔

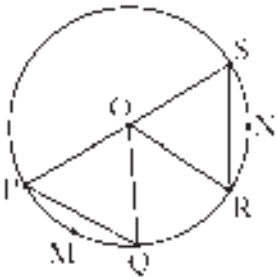
ثابت کرنا ہے : قوس PMQ  $\cong$  قوس RNS

ذیل کی باتوں پر غور کرتے ہوئے ثبوت لکھیے۔

دو قوسین متماثل ہونے کے لیے ان کے نصف قطر اور پیمائش مساوی ہونا ضروری ہے۔

قوس PMQ اور قوس RNS صرف ایک ہی دائرے کے قوسین ہیں۔

اس لیے ان کے نصف قطر مساوی ہیں۔



شکل 3.34

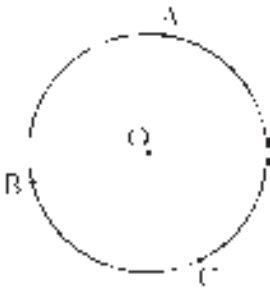
ان قوسین کی پیمائش یعنی ان کے نظیری مرکزی زاویوں کی پیمائش ہوتی ہے۔ یہ مرکزی زاویہ حاصل کرنے کے لیے نصف قطر، OR, OQ, OP اور OS کا کھینچنا ضروری ہے۔ ان کو کھینچنے پر حاصل ہونے والے  $\triangle OPQ$  اور  $\triangle ORS$  کیا متماثل ہوں گے؟ اوپر کے دونوں مسئلے آپ متماثل دائروں کے لیے ثابت کیجیے۔

### غور کیجیے



- اوپر کے دو مسئلوں میں سے پہلے مسئلہ میں قوس APC اور قوس DQE، یہ دونوں اصغر قوس متماثل فرض کیے گئے ہیں۔ ان کے نظیری اکبر قوس متماثل فرض کر کے کیا اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں؟
- دوسرے مسئلہ میں کیا متماثل وتروں کے نظیری اکبر قوس بھی متماثل ہو سکتے ہیں؟ وتر PQ اور وتر RS، جب قطر ہوں، تب کیا یہ مسئلہ درست ہوگا؟

حل کردہ مثالیں



شکل 3.35

مثال (1): 'O' مرکز والے دائرے پر A، B، C یہ تین نقاط واقع ہیں۔

(i) ان تین نقاط کی وجہ سے بننے والے تمام قوسوں کے نام لکھیے۔

(ii) جب قوس BC اور قوس AB کی پیمائش بالترتیب  $110^\circ$

اور  $125^\circ$  ہو تب بقیہ تمام قوسوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل: (i) قوسوں کے نام۔

قوس AB، قوس BC، قوس AC، قوس ABC، قوس ACB، قوس BAC

(ii) قوس BC کی پیمائش + قوس AB کی پیمائش = قوس ABC کی پیمائش

$$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$$

قوس ABC کی پیمائش =  $360^\circ -$  قوس AC کی پیمائش

$$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$$

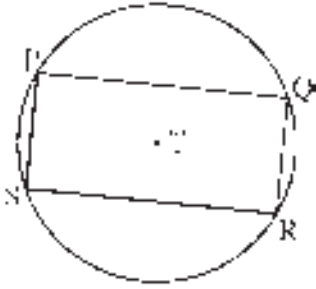
اسی طرح،

$$\text{قوس ACB کی پیمائش} = 360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$$

اور

$$\text{قوس BAC کی پیمائش} = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$$

مثال (2) : شکل 3.36 میں T مرکز والے دائرے میں مستطیل PQRS حاطہ ہے تو دکھائیے کہ



شکل 3.36

$$(i) \text{ قوس } SR \cong \text{ قوس } PQ \quad (ii) \text{ قوس } PQR \cong \text{ قوس } SPQ$$

حل : (i)  $\square PQRS$  ایک مستطیل ہے۔

$$\therefore \text{ وتر } PQ \cong \text{ وتر } SR \quad \dots (\text{مستطیل کے مقابل کے اضلاع})$$

$$\therefore \text{ قوس } PQ \cong \text{ قوس } SR \quad \dots (\text{متمثال وتر کے نظیری قوس})$$

$$(ii) \text{ قوس } QR \cong \text{ قوس } PS \quad \dots (\text{مستطیل کے مقابل کے اضلاع})$$

$$\therefore \text{ قوس } SP \cong \text{ قوس } QR \quad \dots (\text{متمثال وتر کے نظیری قوس})$$

قوس SP اور قوس QR کی پیمائش مساوی ہے۔

$$\text{قوس } PQ \text{ اور قوس } QR \text{ کی پیمائشوں کا مجموعہ} = \text{قوس } SP \text{ اور قوس } QR \text{ کی پیمائشوں کا مجموعہ}$$

$$\therefore \text{ قوس } PQR \text{ کی پیمائش} = \text{قوس } SPQ \text{ کی پیمائش}$$

$$\therefore \text{ قوس } SPQ \cong \text{ قوس } PQR$$

اسے ذہن نشین کر لیں



(1) جس زاویے کا راس، دائرے کے مرکز پر ہو اس زاویے کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

(2) قوس کے پیمائش کی تعریف (i) اصغر قوس کی پیمائش، اس کے نظیری مرکزی زاویے کی پیمائش کے مساوی ہوتی ہے۔

(ii) نظیری اصغر قوس کی پیمائش  $- 360^\circ =$  اکبر قوس کی پیمائش  $\rightarrow$  (iii) نصف دائرے کے قوس کی پیمائش  $180^\circ$  ہوتی ہے۔

(3) دو قوسوں کے نصف قطر اور پیمائش مساوی ہوں تب وہ متمثال ہوتے ہیں۔

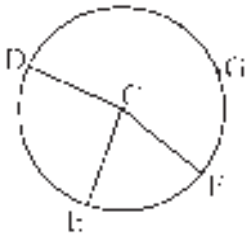
(4) ایک ہی دائرے کے قوس ABC اور قوس CDE میں جب C صرف ایک ہی نقطہ مشترک ہو تب،

$$m(\text{قوس } ABC) + m(\text{قوس } CDE) = m(\text{قوس } ACE)$$

(5) ایک ہی دائرے (یا متمثال دائروں) کے متمثال قوسوں کے نظیری وتر، متمثال ہوتے ہیں۔

(6) ایک ہی دائرے (یا متمثال دائروں) کے متمثال وتروں کے نظیری قوس، متمثال ہوتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 3.3



شکل 3.37

1. شکل 3.37 میں،

C مرکز والے دائرے پر E, D, G اور F نقاط واقع ہیں۔

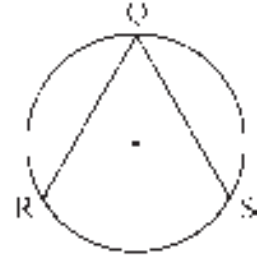
$\angle ECF$  کی پیمائش  $70^\circ$  اور قوس DGF کی پیمائش  $200^\circ$  ہو تو قوس DE اور

قوس DEF کی پیمائش معلوم کیجیے۔

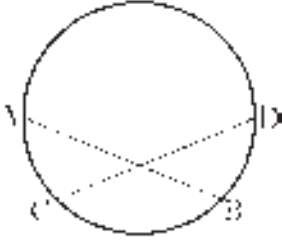
\*2. شکل 3.38 میں  $\triangle QRS$  متساوی الاضلاع مثلث ہے۔ تو دکھائیے کہ

$$(1) \text{ قوس } QR \cong \text{ قوس } QS \cong \text{ قوس } RS$$

$$(2) \text{ قوس } QRS \text{ کی پیمائش } 240^\circ \text{ ہے۔}$$



شکل 3.38



شکل 3.39

3. شکل 3.39 میں وتر  $AB \cong$  وتر  $CD$

تو ثابت کیجیے کہ

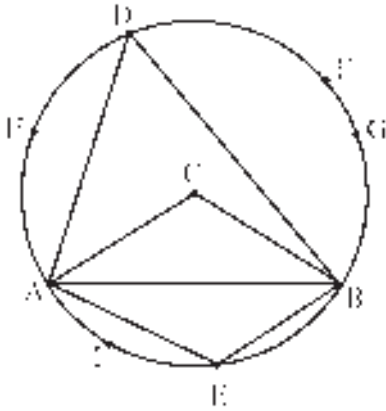
$$\text{قوس } AC \cong \text{قوس } BD$$

آئیے سمجھ لیں



دائرے اور نقطہ، دائرہ اور خط (مماس) ان کے ایک دوسرے سے تعلق کی کچھ خصوصیات کا ہم نے مطالعہ کر چکے ہیں۔ اب دائرے اور زاویہ کے درمیان تعلق کی کچھ خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔ ان میں سے کچھ خصوصیات پہلے ہم عملی کام کے ذریعے معلوم کریں گے۔

عملی کام (D) :



شکل 3.40

‘C’ مرکز والا ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ شکل 3.40 کے مطابق وتر AB کھینچیے۔

مرکزی زاویہ ACB کھینچیے۔ وتر AB سے بنے ہوئے اکبر قوس پر نقطہ D اور

اصغر قوس پر نقطہ E لیجیے۔

(1)  $\angle ACB$  اور  $\angle ADB$  کی پیمائش کیجیے۔ ان کی پیمائشوں کا موازنہ کیجیے۔

(2)  $\angle AEB$  اور  $\angle ADB$  کی پیمائش کیجیے۔ ان کی پیمائشوں کی جمع کر کے دیکھیے۔

(3) قوس ADB پر H,G,F اس طرح کچھ نقاط لیجیے۔  $\angle AHB$  ،  $\angle AGB$  ،  $\angle AFB$  ..... ان کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

ان پیمائشوں کا  $\angle ADB$  کی پیمائش سے اور ایک دوسرے سے بھی موازنہ کیجیے۔

(4) قوس AEB پر ایک اوپر نقطہ I لیجیے۔  $\angle AIB$  کی پیمائش کیجیے اور اس پیمائش کا  $\angle AEB$  کی پیمائش سے موازنہ کیجیے۔

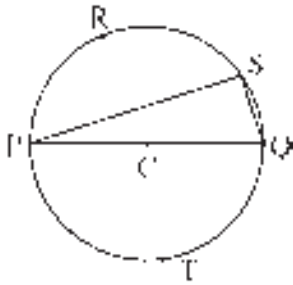
اس عملی کام سے آپ کو درج ذیل مشاہدات حاصل ہوں گے۔

(1)  $\angle ACB$  کی پیمائش  $\angle ADB$  کی پیمائش کے دگنا ہے۔

(2)  $\angle ADB$  اور  $\angle AEB$  کی پیمائشوں کا مجموعہ  $180^\circ$  ہے۔

(3)  $\angle AHB$  ،  $\angle AFB$  ،  $\angle ADB$  ،  $\angle AGB$  ان تمام کی پیمائشیں مساوی ہیں۔

(4)  $\angle AEB$  اور  $\angle AIB$  کی پیمائشیں مساوی ہیں۔



شکل 3.41

عملی کام (II) :

شکل 3.41 کے مطابق 'C' کو مرکز مان کر ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ قطعہ PQ اس کا

کوئی ایک قطر کھینچیے۔ اس قطر سے بنے ہوئے دونوں نصف دائروں پر نقاط

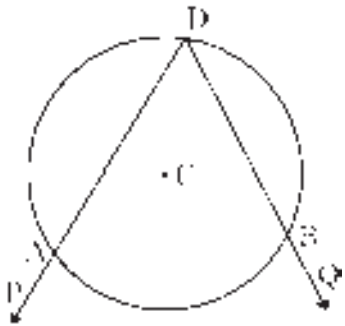
T, S, R لیجیے۔  $\angle PTQ$  ،  $\angle PSQ$  ،  $\angle PRQ$  کی پیمائش کیجیے۔ ان میں سے ہر ایک

زاویہ، قائمہ زاویہ ہے۔ مشاہدہ کیجیے۔

اوپر کے عملی کام سے آپ کو دکھائی دینے والی خصوصیت یعنی دائرے اور زاویے سے متعلق مسئلہ ہے۔ اس مسئلہ کا ثبوت کا اب ہم مطالعہ

کریں گے۔ اس سے پہلے ہمیں بعض اصطلاحات کا تعارف حاصل کریں گے۔

قوسی زاویہ (Inscribed Angle)



شکل 3.42

شکل 3.42 میں دائرے کا مرکز 'C' ہے۔  $\angle PDQ$  کا راس D، دائرے پر

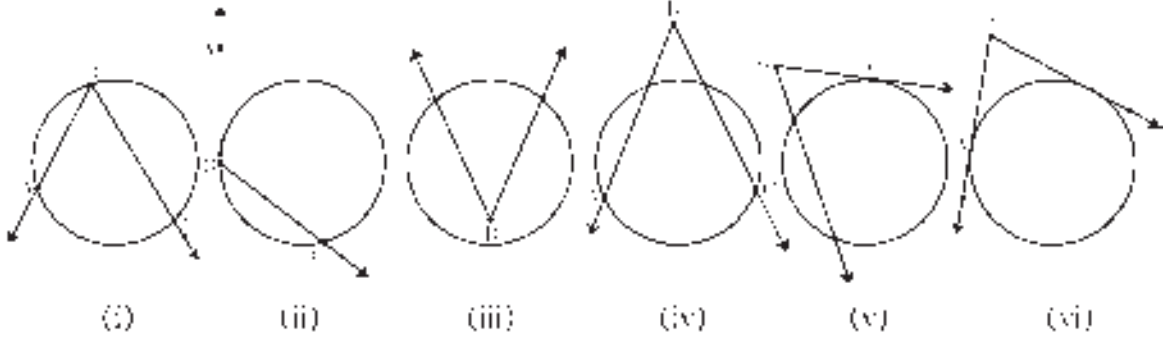
واقع ہے۔ زاویے کی ساقیں DP اور DQ دائرے کو بالترتیب نقاط A اور

B پر قطع کرتی ہیں۔ ایسے زاویے کو دائرے کا قوسی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل 3.42 میں  $\angle ADB$ ، قوس ADB کا قوسی زاویہ ہے اور قوس ADB میں حائط ہے۔

**مقطوع قوس (Intercepted Arc)**

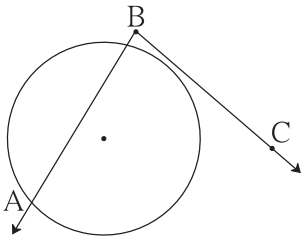
ذیل کی شکل 3.43 میں (i) سے (vi) ان تمام اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 3.43

ہر شکل میں  $\angle ABC$  کے اندرونی حصہ میں شامل قوس کو  $\angle ABC$  کا مقطوع قوس کہتے ہیں۔ مقطوع قوس کے اختتامی نقاط، دائرہ اور زاویہ کے نقطہ تقاطع ہوتے ہیں۔ زاویے کے ہر ساق پر قوس کا ایک اختتامی نقطہ ہونا ضروری ہے۔

شکل 3.43 میں (i)، (ii) اور (iii) ان اشکال میں زاویوں کا صرف ایک ہی مقطوع قوس ہے۔ لیکن (iv)، (v) اور (vi) میں ہر زاویہ کے دو مقطوع قوسین ہیں۔



شکل 3.44

جبکہ شکل (ii) اور (v) میں زاویہ کی ایک ساق اور (vi) میں زاویہ کی دونوں ساقیں دائرے کو مس کرتے ہیں، اسے بھی ذہن نشین رکھیے۔

شکل 3.44 میں قوس، مقطوع نہیں ہے۔ کیونکہ زاویے کی ساق BC پر قوس کا ایک

بھی اختتامی نقطہ واقع نہیں ہے۔

**قوسی زاویے کا مسئلہ (Inscribed angle Theorem)**

مسئلہ : دائرے میں قوسی زاویے کی پیمائش، اس کے مقطوع قوس کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔

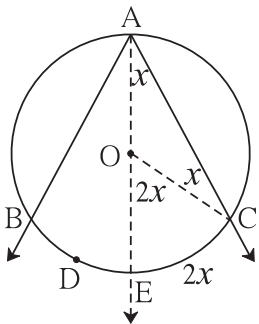
دیا ہوا ہے : دائرے کا مرکز 'O' ہے۔

$\angle BAC$ ، قوس BAC کا قوسی زاویہ ہے۔

اس زاویے کی وجہ سے قوس BDC مقطوع قوس بن گیا ہے۔

ثابت کرنا ہے :  $\angle BAC = \frac{1}{2} m(\text{قوس BDC})$

عمل : شعاع AO کھینچیے جو دائرہ کو نقطہ E پر قطع کرتی ہے۔ نصف قطر OC کھینچیے۔



شکل 3.45

ثبوت :  $\triangle AOC$  میں،

$$\text{ضلع } OA \cong \text{ضلع } OC$$

$$\therefore \angle OAC \cong \angle OCA$$

$$\angle OAC \cong \angle OCA = x$$

$$\begin{aligned} \text{اب، } \angle EOC &= \angle OAC + \angle OCA \\ &= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ \end{aligned}$$

(ایک ہی دائرے کے نصف قطر) ...

(متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ...

(فرض کیجیے) ... (I)

(مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ...

لیکن،  $\angle EOC$  مرکزی زاویہ ہے۔

(قوس کی پیمائش کی تعریف) ... (II)

$\therefore$  بیان (I) اور (II) کی رو سے،

$$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2} m(\text{قوس } EC) \quad \dots (III)$$

اسی طرح، نصف قطر OB کھینچیے۔

$$m\angle EAB = \frac{1}{2} m(\text{قوس } BE) \quad \dots (IV)$$

(یہ ثابت کر سکتے ہیں) ...

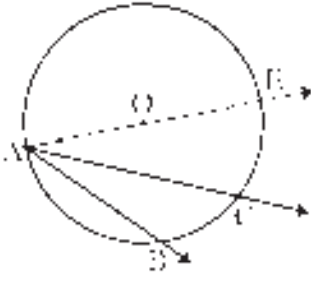
$$\therefore m\angle EAC + m\angle EAB = \frac{1}{2} m(\text{قوس } EC) + \frac{1}{2} m(\text{قوس } BE) \quad \dots [(III) \text{ اور } (IV) \text{ کی بنا پر}]$$

$$\begin{aligned} \therefore m\angle BAC &= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } EC) + m(\text{قوس } BE)] \\ &= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BEC)] = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BDC)] \quad \dots (V) \end{aligned}$$

ذہن نشین رکھیں کہ دائرے کا قوسی زاویہ اور مرکزی زاویے کے تعلق سے تین امکانات ہوتے ہیں۔ کسی دائرے کا مرکز زاویے کی ساق پر

واقع ہو، زاویے کے اندرون میں واقع ہو، یا بیرون میں۔ ان میں سے پہلے دو امکانات (III) اور (V) میں ثابت ہو چکے ہیں۔ اب تیسرے امکان کے متعلق غور کیجیے۔

شکل 3.46 میں



شکل 3.46

$$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$$

$$= \frac{1}{2} m(\text{قوس } BCE) - \frac{1}{2} m(\text{قوس } CE) \quad \dots [(III) \text{ کی بنا پر}]$$

$$= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BCE) - m(\text{قوس } CE)]$$

$$= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BC)] \quad \dots (VI)$$

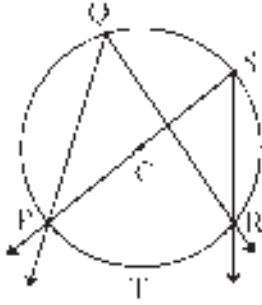
اس مسئلہ کا بیان ذیل کے مطابق بھی لکھ سکتے ہیں۔

دائرے کے قوس سے، دائرے کے کسی بھی نقطے پر بننے والے محاذی زاویے (subtended angle) کی پیمائش، اسی قوس کے مرکز پر

بننے والے محاذی زاویے کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔

اس مسئلہ کو آگے کی مطابق ضمنی مسئلوں کے بیانات کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

**قوسی زاویہ کے مسئلہ کے ضمنی مسئلے (Corollaries of inscribed angle theorem)**



شکل 3.47

(1) ایک ہی قوس میں بننے والے تمام قوسی زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

شکل 3.47 کی مدد سے 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' لکھیے۔

مندرجہ ذیل سوالات پر غور کیجیے اور ثبوت لکھیے۔

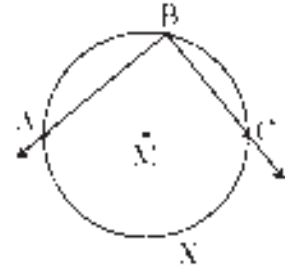
(1)  $\angle PQR$  کا کون سا قوس، مقطوعہ قوس ہے؟

(2)  $\angle PSR$  کا کون سا قوس، مقطوعہ قوس ہے؟

(3) قوسی زاویے کی پیمائش اور اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش میں کیا تعلق ہوتا ہے؟

(2) نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

شکل 3.48 کی مدد سے اس مسئلہ کا 'دیا ہوا ہے'، 'ثابت کرنا ہے' اور 'ثبوت' لکھیے۔



شکل 3.48

**مستقیم المحیط ذواربعتہ الاضلاع (Cyclic quadrilateral)**

ذواربعتہ الاضلاع کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوں تب اس ذواربعتہ الاضلاع کو مستقیم المحیط ذواربعتہ الاضلاع کہتے ہیں۔

**(Theorem of cyclic quadrilateral) مستقیم المحیط ذواربعتہ الاضلاع کا مسئلہ**

مسئلہ : مستقیم المحیط ذواربعتہ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کا ثبوت مندرجہ ذیل خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کر کے لکھیے۔

دیا ہوا ہے :  $\square$  ذواربعتہ الاضلاع ہے

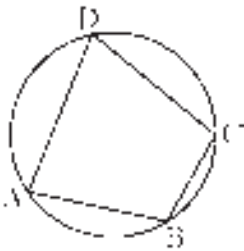
ثابت کرنا ہے :  $\angle B + \angle D =$

+  $\angle C = 180$

ثبوت :  $\angle ADC$ ، قوسی زاویہ ہے، اور اس کا مقطوعہ قوس ABC ہے۔

$$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2} \text{  } \dots (I)$$

اسی طرح  قوسی زاویہ ہے۔ اور اس کا مقطوعہ قوس ADC ہے۔



شکل 3.49

$$\therefore \boxed{\phantom{000}} = \frac{1}{2} m(\text{قوس ADC}) \quad \dots \text{(II)}$$

$$\therefore \angle \text{ADC} + \boxed{\phantom{000}} = \frac{1}{2} \boxed{\phantom{000}} + \frac{1}{2} m(\text{قوس ADC}) \quad \dots \text{ [بیان (I) اور (II) کی بنا پر]}$$

$$= \frac{1}{2} [\boxed{\phantom{000}} + m(\text{قوس ADC})]$$

$$= \frac{1}{2} \times 360^\circ \quad \dots \text{ (قوس ABC اور قوس ADC مل کر مکمل دائرہ بنتا ہے)}$$

$$= \boxed{\phantom{000}}$$

اسی طرح،  $\angle A + \angle C = \boxed{\phantom{000}}$  بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

**مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع کے مسئلہ کا ضمنی مسئلہ (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)**

مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع کا خارجہ زاویہ، اس کے متصلہ زاویے کے مقابل کے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔  
اس مسئلہ کا ثبوت آپ لکھیے۔

غور کیجیے



مذکورہ بالا مسئلہ میں  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ، اسے ثابت کرنے پر بقیہ مقابل کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ بھی  $180^\circ$  ہے۔  
کیا یہ دوسرے طریقے سے ثابت کیا جاسکتا ہے؟

**مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع کے مسئلہ کا عکس (Converse of cyclic quadrilateral theorem)**

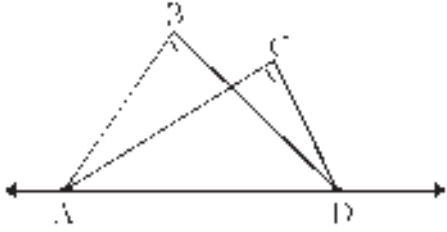
مسئلہ : ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوں، تب وہ ذواربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔  
یہ مسئلہ بالواسطہ طریقے سے ثابت کر سکتے ہیں۔ آپ کوشش کیجیے۔

مذکورہ بالا مسئلہ کے عکس سے ہمیں اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے جب متمم ہوں تب ہم جانتے ہیں کہ وہ ذواربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔ ہر مثلث کا ایک حائلہ دائرہ ہوتا ہے۔ لیکن ہر ذواربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط نہیں ہوتا۔ آپ مشاہدہ کیجیے۔

کون سی شرط پوری ہو جائے تب ذواربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔ یعنی ذواربعۃ الاضلاع کے تمام راسی نقاط دائرے پر واقع ہوں، یہ بات ہمیں اوپر کے مسئلہ سے سمجھ میں آتی ہے۔

ایک اور مختلف حالت میں چار غیر ہم خطی نقاط مستقیم المحیط ہوتے ہیں۔ یہ آگے کے مسئلے میں بتایا گیا ہے۔

مسئلہ : کسی خط پر واقع کوئی دو متفرق نقاط، اسی خط کے ایک ہی جانب واقع دو متفرق نقاط پر متماثل زاویے بناتے ہوں تب وہ چار نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔



شکل 3.50

دیا ہوا ہے : نقطہ B اور C خط AD کے ایک ہی جانب واقع ہو۔

$$\angle ABD \cong \angle ACD$$

ثابت کرنا ہے : نقاط A، B، C اور D ایک ہی دائرے پر واقع ہیں۔

(یعنی □ABCD مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہے) اس مسئلہ کا بھی ہم

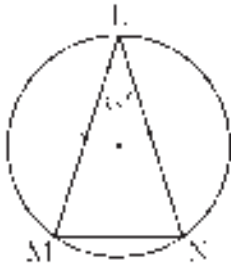
بالواسطہ ثبوت لکھ سکتے ہیں۔

غور کیجیے



مذکورہ بالا مسئلہ کس مسئلہ کا عکس ہے؟

حل کردہ مثالیں



شکل 3.51

مثال (1) : شکل 3.51 میں وتر  $LM \cong$  وتر  $LN$  اور  $\angle L = 35^\circ$  ہو تو

(i)  $m(\text{قوس } MN) = ?$

(ii)  $m(\text{قوس } LN) = ?$

(i)  $\angle L = \frac{1}{2} m(\text{قوس } MN)$  حل : (قوسی زاویے کا مسئلہ) ...

$$\therefore 35 = \frac{1}{2} m(\text{قوس } MN)$$

$$\therefore 2 \times 35 = m(\text{قوس } MN) = 70^\circ$$

(ii)  $m(\text{قوس } MLN) = 360^\circ - m(\text{قوس } MN)$  ... (قوس کی پیمائش کی تعریف)

$$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$$

وتر  $LM \cong$  وتر  $LN$  ، اب

$$\therefore \text{قوس } LM \cong \text{قوس } LN$$

(قوسین کے جمع کی خصوصیت) ...  $m(\text{قوس } LM) + m(\text{قوس } LN) = m(\text{قوس } MLN) = 290^\circ$  ، لیکن

$$m(\text{قوس } LM) = m(\text{قوس } LN) = \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$$

یا (ii) وتر  $LM \cong$  وتر  $LN$

$$\therefore \angle M = \angle N$$

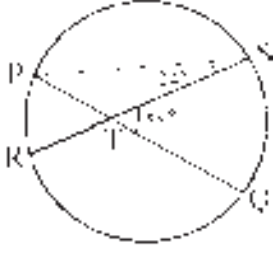
(متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ...

$$\therefore 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$\therefore \angle M = \frac{145^\circ}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{قوسی زاویے کا مسئلہ) ...} \\ m(\text{قوس LN}) = 2 \times \angle M \\ = 2 \times \frac{145^\circ}{2} = 145^\circ \end{aligned}$$

مثال (2) : شکل 3.52 میں وتر PQ اور وتر RS، ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔



شکل 3.52

(i) اگر  $\angle STQ = 58^\circ$  اور  $\angle PSR = 24^\circ$  ہو تو  $m(\text{قوس SQ})$  معلوم کیجیے۔

(ii)  $\angle STQ = \frac{1}{2} [m(\text{قوس PR}) + m(\text{قوس SQ})]$  اس کی تصدیق کیجیے۔

(iii) وتر PQ اور وتر RS میں زاویے کی پیمائش کوئی بھی ہو تب بھی ثابت کیجیے کہ

$$\angle STQ = \frac{1}{2} [m(\text{قوس PR}) + m(\text{قوس SQ})]$$

(iv) اس مثال میں ثابت ہونے والی خصوصیت کو الفاظ میں لکھیے۔

حل : (مثلت کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ...  $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$

$$m(\text{قوس QS}) = 2 \angle SPQ = 2 \times 34 = 68^\circ$$

(ii)  $m(\text{قوس PR}) = 2 \angle PSR = 2 \times 24 = 48^\circ$

$$\begin{aligned} \text{اب , } \frac{1}{2} [m(\text{قوس PR}) + m(\text{قوس SQ})] &= \frac{1}{2} [48 + 68] \\ &= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ \\ &= \angle STQ \end{aligned}$$

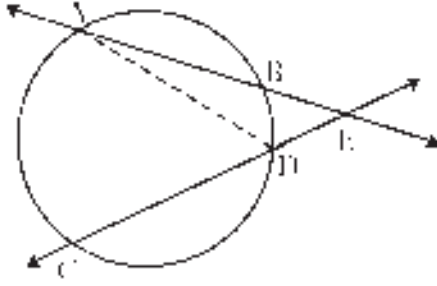
(iii) اس خصوصیت کے ثبوت کے لیے خالی چوکون پر کر کے مکمل کیجیے۔

$$\begin{aligned} \angle STQ &= \angle SPQ + \boxed{\phantom{000}} \quad \text{... (مثلت کے خارجہ زاویے کا مسئلہ)} \\ &= \frac{1}{2} m(\text{قوس SQ}) + \boxed{\phantom{000}} \quad \text{... (قوسی زاویے کا مسئلہ)} \\ &= \frac{1}{2} [\boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}}] \end{aligned}$$

(iv) دائرے کے وتر ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں قطع کرتے ہوں تب ان وتروں میں بننے والے زاویے کی پیمائش اس زاویے کے

مقطع قوس اور اس کے مخالف زاویہ کا مقطع قوس کی پیمائشوں کے مجموعہ کے نصف ہوتی ہے۔

مثال (3) : ثابت کیجیے کہ دائرے کے وتروں کو شامل کرنے والے خطوط دائرے کے بیرون میں قطع کرتے ہوں تو ان خطوط کے درمیان کا زاویہ، اس زاویہ کے مقطوعہ قوسین کی پیمائش کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔



شکل 3.53

دیا ہوا ہے : دائرے کے وتر AB اور وتر CD، دائرے کے بیرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔

$$\angle AEC = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } AC) - m(\text{قوس } BD)]$$

عمل : قطعہ AD کھینچیے۔ اس خصوصیت کا ثبوت اوپر کی دی ہوئی مثال (2) میں

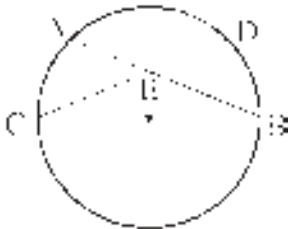
دیے ہوئے ثبوت کے مطابق دے سکتے ہیں۔

اس کے لیے  $\triangle AED$  کے داخلہ زاویے اور اس کے خارجہ زاویے وغیرہ پر غور کیجیے اور ثبوت لکھیے۔



اسے ذہن نشین کر لیں

- (1) دائرے کے قوسی زاویے کی پیمائش، اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش کے نصف ہوتی ہے۔
- (2) دائرے کے ایک ہی قوس پر بننے والے قوسی زاویوں کی پیمائشیں متماثل ہوتی ہے۔
- (3) نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
- (4) ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوں تو اس ذواربعۃ الاضلاع کو مستقیم محیط ذواربعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔
- (5) مستقیم محیط ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوتے ہیں۔
- (6) مستقیم محیط ذواربعۃ الاضلاع کا خارجہ زاویہ اس کے متصل زاویے کے مقابل کے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔
- (7) ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوں تو وہ ذواربعۃ الاضلاع مستقیم محیط ذواربعۃ الاضلاع ہوتا ہے۔
- (8) کسی خط پر واقع کوئی دو متفرق نقاط، اس خط کے ایک ہی جانب واقع دو متفرق نقاط پر متماثل زاویے بناتے ہوں تب وہ چار نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔



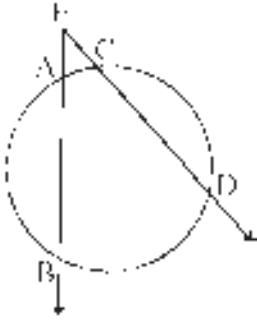
شکل 3.54

$$(i) \angle AEC = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } AC) + m(\text{قوس } DB)]$$

$$(ii) \angle CEB = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } AD) + m(\text{قوس } CB)]$$

(9) مقابل کی شکل 3.54 میں،

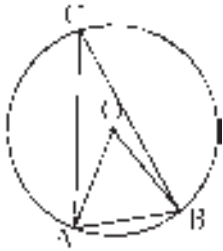
(10) مقابل کی شکل 3.55 میں



شکل 3.55

$$\angle BED = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BD) - m(\text{قوس } AC)]$$

### مشقی سیٹ 3.4



شکل 3.56

1. شکل 3.56 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔ دائرے کے وتر AB کی لمبائی

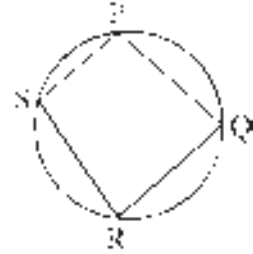
نصف قطر کے مساوی ہے تو۔

$$\angle ACB \quad (2) \quad \angle AOB \quad (1)$$

(3) قوس AB اور (4) قوس ACB کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

2. شکل 3.57 میں مستقیم الجھٹ ذواربعتہ الاضلاع ہے۔

ضلع PQ  $\cong$  ضلع RQ،  $\angle PSR = 110^\circ$  ہو تو



شکل 3.57

(i)  $\angle PQR = ?$

(ii)  $m(\text{قوس } PQR) = ?$

(iii)  $m(\text{قوس } QR) = ?$

(iv)  $\angle PRQ = ?$

3. مستقیم الجھٹ MRPN میں،

$\angle N = (4x + 4)^\circ$  اور  $\angle R = (5x - 13)^\circ$  ہو تو  $\angle N$  اور  $\angle R$  کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

T

4. شکل 3.58 میں قطعہ RS، 'O' مرکز والے دائرے کا قطر ہے۔ نقطہ T

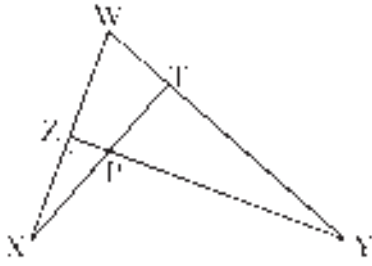


شکل 3.58

دائرے کے بیرون میں واقع کوئی نقطہ ہے۔

تو ثابت کیجیے کہ  $\angle RTS$  حادہ زاویہ ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ ہر مستطیل مستقیم الجھٹ ہوتا ہے۔



شکل 3.59

6. شکل 3.59 میں  $\triangle WXY$  کے ارتفاع، قطعہ  $YZ$

اور قطعہ  $XT$  نقطہ  $P$  پر قطع کرتے ہیں۔ تو ثابت کیجیے۔

(1)  $\square WZPT$  مستقیم المحیط ہے۔

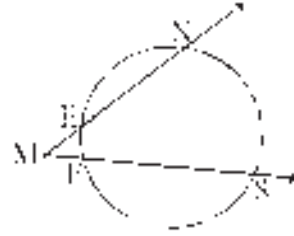
(2) نقاط  $Y, T, Z, X$  ایک ہی دائرے پر واقع ہیں۔

7. شکل 3.60 میں،

$$m(\text{قوس } NS) = 125^\circ$$

$$m(\text{قوس } EF) = 37^\circ$$

$\angle NMS$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔



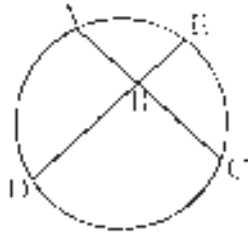
شکل 3.60

8. شکل 3.61 میں،

وتر  $AC$  اور وتر  $DE$  ایک دوسرے کو نقطہ  $B$  پر قطع کرتے ہیں۔

اگر  $\angle ABE = 108^\circ$  اور  $m(\text{قوس } AE) = 95^\circ$  ہو تو،

$m(\text{قوس } DC)$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔



شکل 3.61

آئیے سمجھ لیں



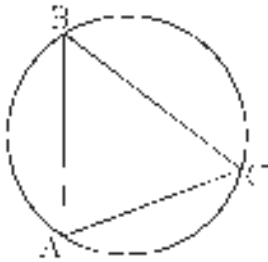
عملی کام :

ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ شکل 3.62 کے مطابق اس دائرے کا

ایک وتر قطعہ  $AC$  کھینچیے۔

اس دائرے پر کوئی نقطہ  $B$  لیجیے۔  $\angle ABC$  قوسی زاویہ ہے۔

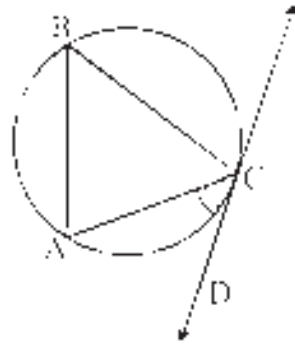
$\angle ABC$  کی پیمائش کیجیے۔ اور اندراج کیجیے۔



شکل 3.62

اب شکل 3.63 کے مطابق اسی دائرے پر خط  $CD$  مماس کھینچیے۔

$\angle ACD$  کی پیمائش کیجیے۔



شکل 3.63

$\angle ACD$  کی پیمائش،  $\angle ABC$  کی پیمائش کے مساوی ہے۔ اس بات کا آپ کو مشاہدہ ہوتا ہے۔

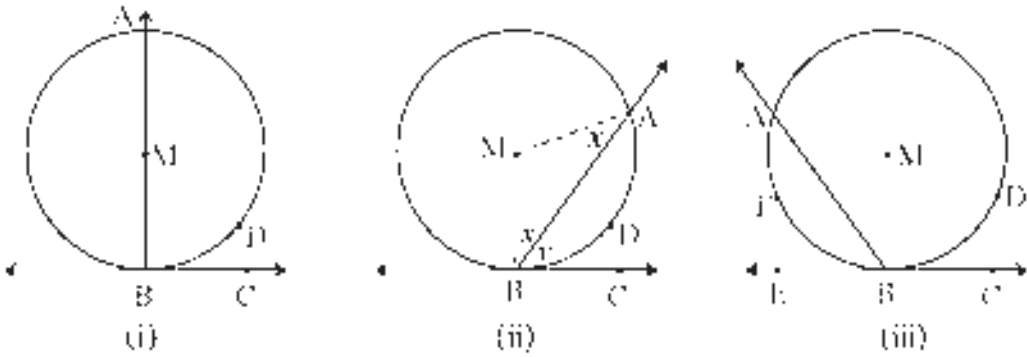
$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{قوس } AC) \text{ یہ آپ جانتے ہیں۔}$$

اس بنا پر  $\angle ACD$  کی پیمائش بھی (قوس  $AC$ ) کی پیمائش کے نصف ہوتی ہے۔ ایسا ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

دائرہ کے مماس کی یہ ایک اہم خصوصیت ہے۔ اسے ہم اب ثابت کریں گے۔

**مماس قاطع کے زاویہ کا مسئلہ (Theorem of angle between tangent and secant)**

مسئلہ : اگر کسی زاویہ کا راس دائرے پر ہو، اس کی ایک ساق دائرے کو مس کرتی ہو اور دوسری دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرتی ہو، تب اس زاویے کی مقطوعہ قوس کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔



شکل 3.64

دیا ہوا ہے :  $\angle ABC$  کا راس نقطہ  $M$  مرکز والے دائرے پر واقع ہے۔ اس کی ساق  $BC$  دائرے کو مس کرتی ہے اور ساق  $BA$  دائرے کو نقطہ  $A$  پر قطع کرتی ہے۔  $\angle ABC$  کا مقطوعہ قوس، قوس  $ADB$  ہے۔

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{قوس } ADB) \text{ ثابت کرنا ہے :}$$

ثبوت : اس مسئلہ کا ثبوت، تین امکانات کا خیال کرتے ہوئے دینا ہوگا۔

(1) شکل (i) 3.64 کے مطابق، دائرے کا مرکز  $M$  یہ  $\angle ABC$  کی ایک ساق پر واقع ہو تو۔

$$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ \quad \dots \text{ (مماس کا مسئلہ)} \quad \dots \text{ (I)}$$

قوس  $ADB$ ، نصف دائرہ ہے۔

$$\therefore m(\text{قوس } ADB) = 180^\circ \quad \dots \text{ (قوس کی پیمائش کی تعریف)} \quad \dots \text{ (II)}$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{قوس } ADB) \quad \dots \text{ (I) اور (II) کی بنا پر} \quad \dots$$

(2) شکل (ii) 3.64 کے مطابق، دائرے کا مرکز  $M$  یہ  $\angle ABC$  کے بیرون میں واقع ہے۔ نصف قطر  $MA$  اور نصف قطر  $MB$  بنائیے۔

$$\angle MBA = \angle MAB \quad \dots \text{ (مساوی الساقین مثلث کا مسئلہ)} \quad \dots$$

$$\angle MBC = 90^\circ \text{، اسی طرح} \quad \dots \text{ (مماس کا مسئلہ)} \quad \dots \text{ (I)}$$

فرض کیجیے :  $\angle MBA = \angle MAB = x$ ,  $\angle ABC = y$

$$\angle AMB = 180 - (x + x) = 180 - 2x$$

$$\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC = x + y$$

$$\therefore x + y = 90^\circ \quad , \quad \therefore 2x + 2y = 180^\circ$$

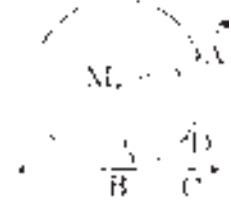
میں  $\triangle AMB$

$$2x + \angle AMB = 180^\circ$$

$$\therefore 2x + 2y = 2x + \angle AMB$$

$$\therefore 2y = \angle AMB$$

$$\therefore y = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{1}{2} m(\text{قوس ADB})$$



شکل 3.64 (ii)

(3) تیسری امکانی حالت کے لیے مندرجہ ذیل ثبوت شکل 3.64 (iii) کی مدد سے خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کیجیے۔

شعاع  یہ شعاع BC کی مخالف شعاع کھینچیے۔

(II) میں ثابت کیا گیا ...  $\angle ABE = \frac{1}{2} m(\text{قوس ADB})$  , اب

...  $180 - \text{قوس ADB} = \angle ABE$  (خطی جوڑی کے زاویے)

$$\therefore 180 - \text{قوس ADB} = \frac{1}{2} m(\text{قوس ADB})$$

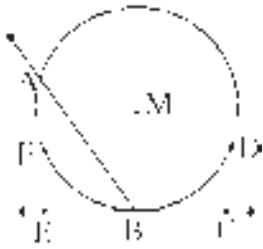
$$= \frac{1}{2} [360 - m(\text{قوس ADB})]$$

$$\therefore 180 - \angle ABC = 180 - \frac{1}{2} m(\text{قوس ADB})$$

$$\therefore -\angle ABC = -\frac{1}{2} m(\text{قوس ADB})$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{قوس ADB})$$

مماس قاطع کے زاویے کے مسئلے کے لیے متبادل بیان :



شکل 3.64 (iii)

شکل 3.65 میں AB قاطع خط ہے اور BC مماس ہے۔ قوس ADB،

$\angle ABC$  کا مقطوعہ قوس ہے۔ وتر AB دائرے کو دو قوسین میں تقسیم کرتا

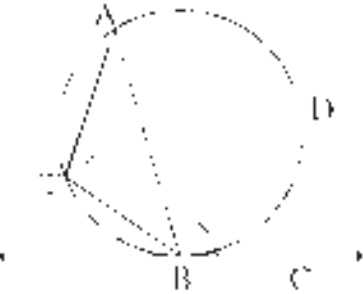
ہے۔ دونوں قوسین ایک دوسرے کے مخالف قوس ہیں۔ اب قوس ADB کے

مخالف قوس پر نقطہ T لیجیے۔ اوپر دیے ہوئے مسئلے کی بنا پر،

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{قوس ADB}) = \angle ATB$$

$\therefore$  دائرے کا مماس اور نقطہ تماس سے کھینچا ہوا وتر ان سے بننے والا زاویہ اس

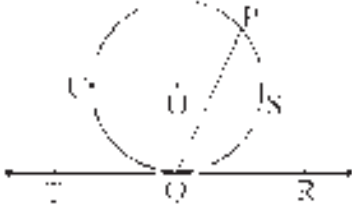
زاویے کے مقطوعہ قوس کے مخالف قوس میں بننے والے قوسی زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔



شکل 3.65

## مماس قاطع زاویے کے مسئلہ کا عکس

دائرے کے وتر کے ایک اختتامی نقطے سے گزرنے والا خط کھینچنے پر اس خط کا اس وتر سے بنائے ہوئے زاویے کی پیمائش، اس زاویے کے مقطوعہ قوس کے پیمائش کا نصف ہو تو، وہ خط اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔



شکل 3.66

شکل 3.66 میں،

$$\text{اگر } \angle PQR = \frac{1}{2} m(\text{قوس PSQ}) \text{ ہو تو}$$

$$[\text{یا } \angle PQT = \frac{1}{2} m(\text{قوس PUQ})]$$

خط TR یہ دائرے کا مماس ہے۔ اس مسئلے کے عکس کا استعمال دائرے کا مماس کھینچنے کے لیے ہندسی عمل میں کیا جاتا ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دیا جاسکتا ہے۔

## وتروں کے داخلی تقاطع کا مسئلہ (Theorem of internal division of chords)

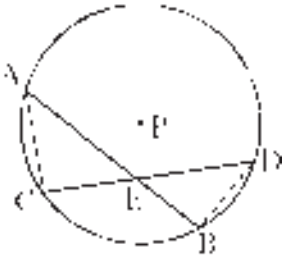
ایک ہی دائرے کے دو وتر جب دائرے کے اندرون میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب ایک وتر کے بنے ہوئے دو حصوں کا حاصل ضرب، دوسرے وتر کے بنے ہوئے دو حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : P مرکز والے دائرے کے وتر AB اور CD ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔

$$\text{ثابت کرنا ہے : } AE \times EB = CE \times ED$$

عمل : قطعہ AC اور قطعہ DB کھینچیے۔

ثبوت :  $\triangle CAE$  اور  $\triangle BDE$  میں،



شکل 3.67

$$\angle AEC \cong \angle DEB \quad \dots \text{ (متقابلہ زاویے)}$$

$$\angle CAE \cong \angle BDE \quad \dots \text{ (ایک ہی قوس کے قوسی زاویے)}$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle BDE \quad \dots \text{ (زاوا آزمائش متشابہت)}$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE} \quad \dots \text{ (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)}$$

$$\therefore AE \times EB = CE \times ED$$

غور کیجیے



شکل 3.67 میں قطعہ AC اور قطعہ DB کھینچ کر ہم نے مسئلہ ثابت کیا اس کی بجائے قطعہ AD اور قطعہ CB کھینچ کر

کیا یہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں؟

مزید معلومات کے لیے :

شکل 3.67 میں وتر AB کے نقطہ E کی وجہ سے دو حصے AE اور EB بنے ہیں۔ قطعہ AE اور قطعہ EB کو مستطیل کے متصل اضلاع مان کر ایک مستطیل بنایا جائے۔ تب  $AE \times EB$  مستطیل کا رقبہ ہوگا۔ اسی طرح  $CE \times ED$ ، وتر CD کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ ہوگا۔

ہم  $AE \times EB = CE \times ED$  ثابت کر چکے ہیں۔

اس لیے یہ مسئلہ مختلف الفاظ میں ذیل کے مطابق بیان کیا جاسکتا ہے۔

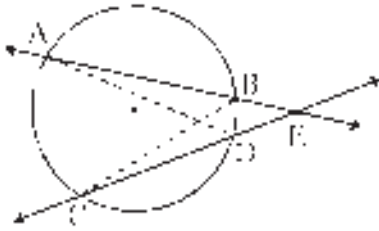
ایک ہی دائرے کے دو وتر، دائرے کے اندرون میں قطع کرتے ہوں تو، ایک وتر کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ، دوسرے وتر کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کے رقبے کے مساوی ہوتا ہے۔

وتروں کے بیرونی تقاطع کا مسئلہ (Theorem of external division of chords)

ایک ہی دائرے کے وتر AB اور وتر CD کو شامل کرنے والے قاطع خط ایک دوسرے کو دائرے کے بیرون میں نقطہ E پر قطع کرتے

ہوں تو  $AE \times EB = CE \times ED$

اور دیے ہوئے مسئلے کا بیان اور شکل کی مدد سے ”دیا ہوا ہے“ اور ”ثابت کرنا ہے“ لکھیے۔



شکل 3.68

عمل : قطعہ AD اور قطعہ BC کھینچیے۔

خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔

ثبوت :  $\triangle ADE$  اور  $\triangle CBE$  میں،

$\angle AED \cong$   ... (مشترک زاویہ)

$\angle DAE \cong \angle BCE$  ... ()

$\therefore \triangle ADE \cong$   ... ()

$\therefore \frac{AE}{\text{---}} = \frac{\text{---}}{\text{---}}$  ... (متشابه مثلثوں کے نظیری اضلاع)

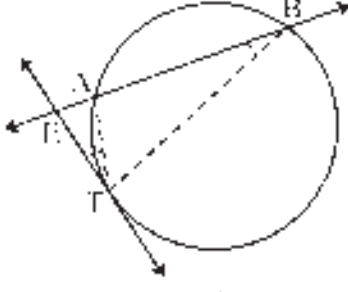
$\therefore \text{---} = CE \times ED$

(Tangent Secant Segment Theorem) مماس قاطع قطعہ خط کا مسئلہ

دائرے کے بیرونی نقطہ E سے دائرے کا قاطع خط دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے اور اسی نقطے سے گزرنے والا مماس، دائرے

$$EA \times EB = ET^2 \text{ کو T پر مس کرتا ہے تو}$$

اس مسئلہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے دیا ہوا ہے اور ثابت کرنا ہے لکھیے۔



شکل 3.69

عمل : قطعہ TA اور قطعہ TB کھینچیے۔

ثبوت :  $\triangle ETB$  اور  $\triangle EAT$  میں،

$$\angle AET \cong \angle TEB \quad \dots \text{ (مشترک زاویے)}$$

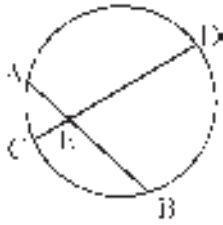
$$\angle ETA \cong \angle EBT \quad \dots \text{ (مماس قاطع مسئلہ)}$$

$$\therefore \triangle EAT \sim \triangle ETB \quad \dots \text{ (زاوا متشابہت)}$$

$$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET} \quad \dots \text{ (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)}$$

$$\therefore EA \times EB = ET^2$$

اسے ذہن نشین کر لیں



شکل 3.70

(1) شکل 3.70 کے مطابق،

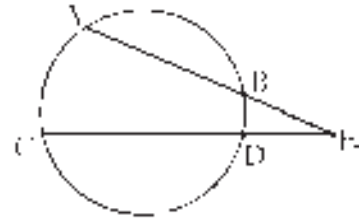
$$AE \times EB = CE \times ED$$

اس خصوصیت کو وتروں کے داخلی طور پر قطع کرنے کا مسئلہ کہتے ہیں۔

(2) شکل 3.71 کے مطابق،

$$AE \times EB = CE \times ED$$

اس خصوصیت کو وتروں کے بیرونی طور پر قطع کرنے کا مسئلہ کہتے ہیں۔

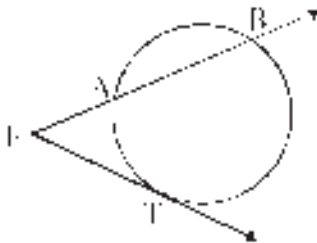


شکل 3.71

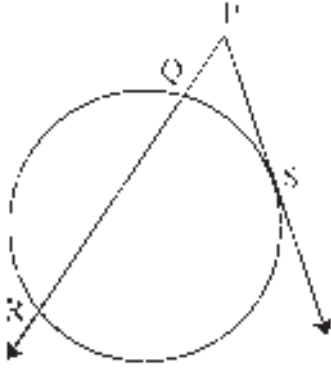
(3) شکل 3.72 کے مطابق،

$$EA \times EB = ET^2$$

اس خصوصیت کو مماس قاطع خط کا مسئلہ کہتے ہیں۔



شکل 3.72



شکل 3.73

مثال (1) : شکل 3.73 میں قطعہ PS مماس ہے۔ خط PR دائرے کا قاطع ہے  
اگر  $PQ = 3.6$ ،  $QR = 6.4$  تو PS معلوم کیجیے۔

حل : (مماس قاطع مسئلہ) ...

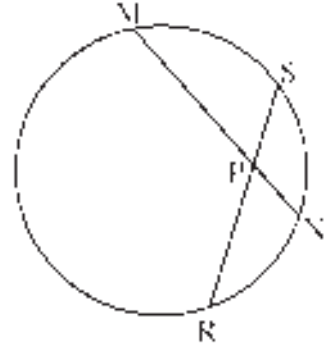
$$\begin{aligned} PS^2 &= PQ \times PR \\ &= PQ \times (PQ + QR) \\ &= 3.6 \times [3.6 + 6.4] \\ &= 3.6 \times 10 \\ &= 36 \end{aligned}$$

$$\therefore PS = 6$$

مثال (2) : شکل 3.74 میں وتر MN اور وتر RS ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

اگر  $PR = 6$ ،  $PS = 4$ ،  $MN = 11$  ہو تو PN معلوم کیجیے۔

حل : وتروں کے اندرونی طور پر قطع کرنے کے مسئلے کے ذریعے



شکل 3.74

$$PN \times PM = PR \times PS \quad \dots (I)$$

$$PM = 11 - x \quad \text{فرض کریں } PN = x \text{ اس لیے،}$$

بیان (I) میں یہ قیمت رکھنے پر،

$$x(11 - x) = 6 \times 4$$

$$\therefore 11x - x^2 - 24 = 0$$

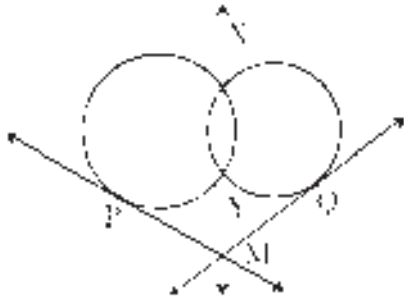
$$\therefore x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\therefore (x - 3)(x - 8) = 0$$

$$\therefore x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 8 = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad \text{یا} \quad x = 8$$

$$\therefore PN = 3 \quad \text{یا} \quad PN = 8$$



شکل 3.75

مثال (3) : شکل 3.75 میں دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط X اور Y پر قطع کرتے ہیں۔

خط XY پر واقع نقطہ M سے کھینچا گیا مماس دائروں کو نقاط P اور Q پر مس کرتا

ہے تو ثابت کیجیے کہ  $PM \cong QM$  قطعہ

ثبوت : خالی جگہیں پر کر کے ثبوت لکھیے۔

خط MX دونوں دائروں کا مشترک ..... ہے۔

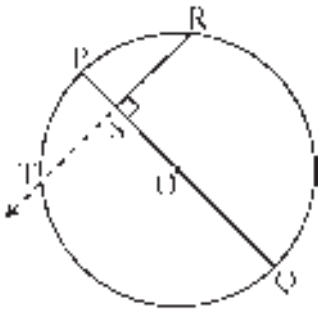
$$\therefore PM^2 = MY \times MX \quad \dots (I)$$

$$\dots (II) \quad \dots \text{ (مماس قاطع خط مسئلہ) } \dots = \dots \times \dots \text{ , اسی طرح}$$

$$\dots = QM^2 \quad \dots [ \text{بیان (I) اور (II) سے} ]$$

$$\therefore PM = QM$$

$$\therefore \text{قطعہ } PM \cong \text{قطعہ } QM$$



شکل 3.76

مثال (4) : شکل 3.76 میں قطعہ PQ , O مرکز والے دائرے کا قطر ہے۔

نقطہ R دائرے پر واقع کوئی نقطہ ہے۔

قطعہ RS  $\perp$  قطعہ PQ تو ثابت کیجیے کہ قطعہ PS اور

قطعہ SQ کا ہندسی وسط SR ہے۔

$$\{ SR^2 = PS \times SQ \text{ یعنی} \}$$

حل : مندرجہ ذیل مرحلوں کی مدد سے ثبوت لکھیے۔

(1) شعاع RS کھینچیے۔ وہ دائرے کو جس نقطے پر قطع کرتی ہے اسے T نام دیجیے۔

$$(2) RS = TS \text{ دکھائیے۔}$$

(3) وتروں کے اندرون میں قطع کرنے والے مسئلے کا استعمال کر کے مساوات لکھیے۔

$$(4) RS = TS \text{ کا استعمال کر کے ثابت کیجیے۔}$$

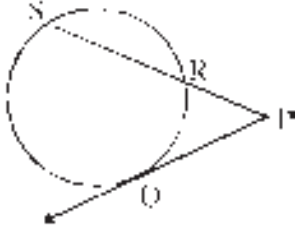
غور کیجیے



(1) مندرجہ بالا شکل 3.76 میں قطعہ PR اور قطعہ RQ بنانے پر  $\triangle PRQ$  کس قسم کا مثلث ہوگا؟

(2) مندرجہ بالا مثال (4) میں ثابت کی گئی خصوصیت کو کیا آپ کسی دوسرے طریقے سے ثابت کر سکتے ہیں؟

### مشقی سیٹ 3.5



شکل 3.77

1. شکل 3.77 میں نقطہ Q تماسی نقطہ ہے اگر

تو  $PR = 8$ ,  $PQ = 12$

PS = کتنا؟ RS = کتنا؟

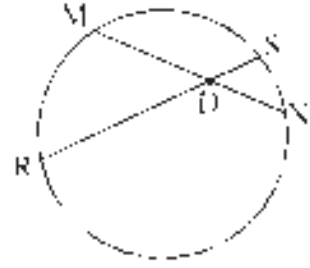
2. شکل 3.78 میں وتر MN اور وتر RS ایک دوسرے کو نقطہ D پر قطع کرتے ہیں۔

(1) اگر  $MD = 8$ ,  $DS = 4$ ,  $RD = 15$  تو

DN = کتنا؟

(2) اگر  $DN = 8$ ,  $MD = 9$ ,  $RS = 18$  تو

DS = کتنا؟



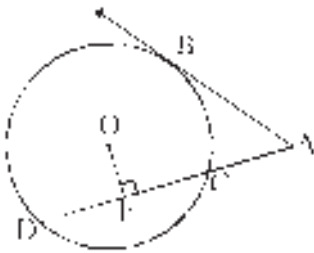
شکل 3.78

3. شکل 3.79 میں نقطہ B تماسی نقطہ ہے اور O دائرے کا مرکز ہے۔

خط  $OE \perp AD$  قطعہ

تو  $AC = 8$ ,  $AB = 12$  ہو تو

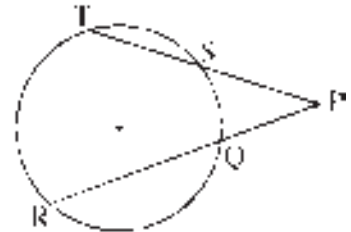
(1) AD (2) DC اور (3) DE معلوم کیجیے۔



شکل 3.79

4. شکل 3.80 میں اگر  $PS = 8$ ,  $QR = 10$ ,  $PQ = 6$  ہو تو

TS = کتنا؟

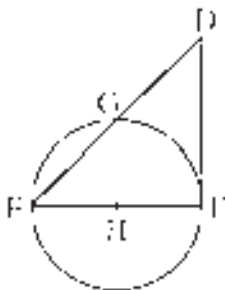


شکل 3.80

5. شکل 3.81 میں قطعہ EF قطر ہے اور قطعہ DF مماس ہے۔

دائرے کا نصف قطر r ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$DG \times GE = 4r^2$$



شکل 3.81

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے :
- (1) دو دائرے جن کے نصف قطر بالترتیب 5.5 سم اور 3.3 سم ہیں۔ وہ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ کتنے سم ہے؟  
 (A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 یا 2.2
- (2) دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان میں سے ہر دائرہ دوسرے دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔ اگر ان مرکزوں کے درمیان فاصلہ 12 سم ہو تو ہر دائرے کا نصف قطر کتنا سم ہے؟  
 (A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) بتایا نہیں جاسکتا
- (3) ایک دائرہ ایک متوازی الاضلاع کے تمام ضلعوں کو مس کرتا ہے تو وہ متوازی الاضلاع ..... ہونا چاہیے۔ اس بیان کی خالی جگہ مناسب لفظ لکھیے۔  
 (A) مستطیل (B) معین (C) مربع (D) ذوزنقہ
- (4) ایک دائرے کے مرکز سے 12.5 سم فاصلے پر واقع ایک نقطے سے دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعہ کی لمبائی 12 سم ہے تو اس دائرے کا قطر کتنے سم کا ہے۔  
 (A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14
- (5) ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں پر زیادہ سے زیادہ کتنے مشترک مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔  
 (A) ایک (B) دو (C) تین (D) چار
- (6) 'O' مرکز والے دائرے کے قوس ACB میں  $\angle ACB$  قوسی زاویہ بنایا گیا ہے۔ اگر  $\angle ACB = 65^\circ$  ہو تو  
 ؟ کتنا =  $m(\text{قوس ACB})$   
 (A)  $65^\circ$  (B)  $130^\circ$  (C)  $295^\circ$  (D)  $230^\circ$
- (7) ایک دائرے کے وتر AB اور وتر CD ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔  
 اگر  $AE = 5.6$ ,  $EB = 10$ ,  $CE = 8$  تو  $ED = ?$   
 (A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9
- (8) مستطیم المخیط ABCD میں،  $\angle A$  کی پیمائش کا دگنا  $\angle C$  کی پیمائش کے تین گنا کے مساوی ہے تو  $\angle C$  کی پیمائش کتنی ہے؟  
 (A)  $36^\circ$  (B)  $72^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $108^\circ$
- (9) ایک دائرے پر نقاط A, B, C اس طرح واقع ہیں کہ  $m(\text{قوس BC}) = m(\text{قوس AB}) = 120^\circ$  دونوں قوسین میں ایک بھی نقطہ مشترک نہیں ہے۔ تو  $\triangle ABC$  کس قسم کا مثلث ہے؟  
 (A) متساوی الاضلاع مثلث (B) منفرجتہ الزاویہ مثلث (C) قائمہ الزاویہ مثلث (D) متساوی الساقین مثلث

(10) قطعہ XZ قطر والے دائرے کے اندرون میں ایک نقطہ Y ہے۔ تو ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے۔

(i)  $\angle XYZ$  کا حادہ زاویہ ہونا، ناممکن ہے۔

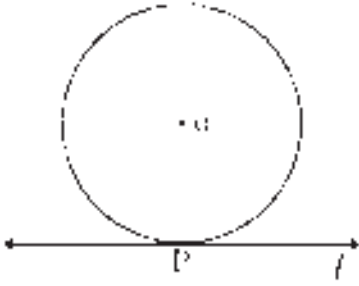
(ii)  $\angle XYZ$  کا قائمہ زاویہ ہونا، ناممکن ہے۔

(iii)  $\angle XYZ$  منفرجہ زاویہ ہے۔

(iv)  $\angle XYZ$  کی پیمائش سے متعلق متعین بیان نہیں دیا جاسکتا۔

(A) صرف ایک (B) صرف دو (C) صرف تین (D) سب

2. 'O' مرکز والے دائرے کو خط l نقطہ P پر مس کرتا ہے۔ اگر دائرے کا نصف قطر 9 سم ہو تب ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



شکل 3.82

(1) کتنا؟  $d(O, P)$  اور کیوں؟

(2) اگر سم  $d(O, Q) = 8$  ہو تو نقطہ Q کا مقام کہاں ہے؟

(3) سم  $d(O, R) = 15$  ہو تو نقطہ R خط l کے کتنے مقام پر ہو سکتا ہے؟

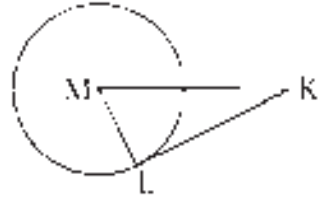
وہ نقطہ P سے کتنے فاصلے پر ہوگا؟

3. متصلہ شکل میں، نقطہ M دائرے کا مرکز ہے۔ اور قطعہ KL مماس ہے۔

اگر  $MK = 12$ ،  $KL = 6\sqrt{3}$  ہو تو

(1) دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

(2)  $\angle M$  اور  $\angle K$  کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

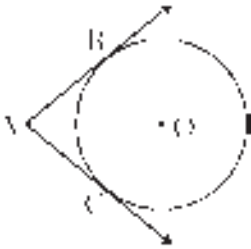


شکل 3.83

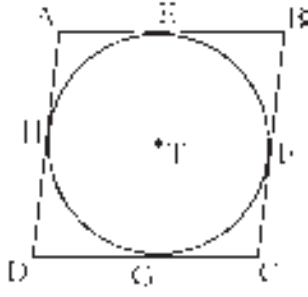
4. شکل 3.84 میں نقطہ O دائرے کا مرکز ہے اور قطعہ AB اور

قطعہ AC مماسی قطعات ہیں اگر دائرے کا نصف قطر r اور  $AB = r$

ہو تو دکھائیے کہ  $\square ABOC$  مربع ہے۔



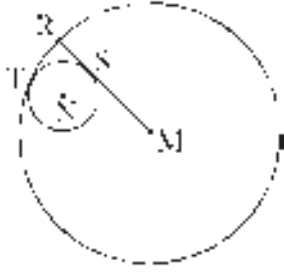
شکل 3.84



شکل 3.85

5. شکل 3.85 میں  $\square ABCD$  متوازی الاضلاع ہے۔ یہ T مرکز والے دائرے کے گردحاطہ ہے۔ (یعنی اس ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعے دائرے کو مس کرتے ہیں۔) نقاط E, F, G, H اور T تماسی نقاط ہیں۔

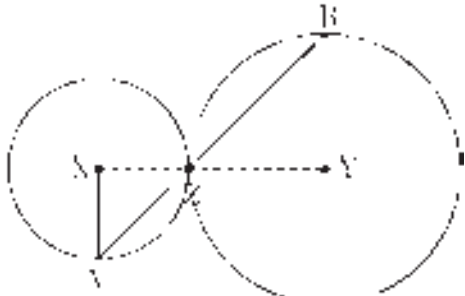
اگر  $AE = 4.5$  اور  $EB = 5.5$  ہو تو AD معلوم کیجیے۔



شکل 3.86

6. شکل 3.86 میں N مرکز والا دائرہ M مرکز والے دائرے کو نقطہ T پر اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ بڑے دائرے کا نصف قطر چھوٹے دائرے کے نقطہ S پر مس کرتا ہے۔ اگر بڑے اور چھوٹے دائروں کے نصف قطر بالترتیب 9 سم اور 2.5 سم ہو تو ذیل کے سوالوں کے جواب معلوم کیجیے اور ان پر سے  $MS : SR$  نسبت معلوم کیجیے۔

(1)  $MT = ?$  (2)  $MN = ?$  (3)  $\angle NSM = ?$



شکل 3.87

7. متصلہ شکل میں X اور Y مرکز والے دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ Z پر مس کرتے ہیں۔

نقطہ Z سے گزرنے والا قاطع خط ان دائروں کو بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ ثوابت کیجیے کہ  $YB \parallel XA$  نصف قطر نیچے دیے ہوئے ثبوت میں خالی جگہوں کو پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔

عمل : قطعہ XZ اور ..... کھینچیے۔

ثبوت : مس کرنے والے دائروں کے مسئلہ کی بناء پر نقاط X, Y, Z, ..... ہیں۔

$\angle XZA \cong \dots\dots\dots$  ... (متقابلہ زاویہ  $\therefore$ )

$\angle XZA = \angle BZY = a$  ... (فرض کیجیے) ... (I)

اب  $XA \cong XZ$  قطعہ , قطعہ ..... ( $\therefore$  .....)

$\therefore \angle XAZ = \dots\dots\dots = a$  ... (تساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ... (II)

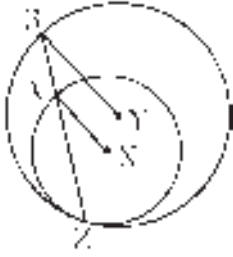
YB  $\cong$  ..... (.....) ... (.....)

$\therefore \angle BZY = \dots\dots\dots = a$  ... (.....) ... (III)

$\therefore$  (I), (II), اور (III) سے،

$\angle XAZ = \dots\dots\dots$

$\therefore$  YB نصف قطر  $\parallel$  XA نصف قطر (.....)



شکل 3.88

8. شکل 3.88 میں X اور Y مرکز والے دو دائرے اندرونی طور پر نقطہ Z

پرس کرتے ہیں۔ قطعہ BZ بڑے دائرے کا وتر ہے اور چھوٹے دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔ تو

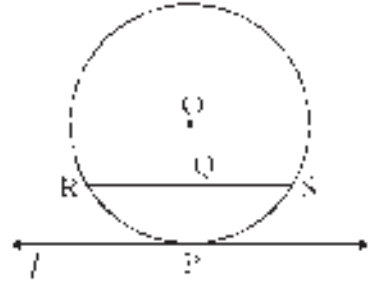
ثابت کیجیے کہ قطعہ BY  $\parallel$  قطعہ AX

9. بازو میں دی ہوئی شکل میں 'O' مرکز والے دائرے کو خط l نقطہ P پر مس

کرتا ہے۔ نقطہ Q نصف قطر OP کا وسطی نقطہ ہے۔ نقطہ Q کو شامل کرنے

والا وتر RS ہے اسی طرح کہ خط l  $\parallel$  RS وتر

اگر سم RS = 12 ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔



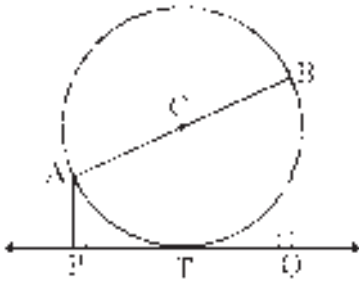
شکل 3.89

10. شکل 3.90 میں C مرکز والے دائرے کا قطر قطعہ AB ہے۔

دائرہ کا مماس PQ دائرے کو نقطہ T پر مس کرتا ہے۔

قطعہ AP  $\perp$  خط PQ اور قطعہ BQ  $\perp$  خط PQ

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ CP  $\cong$  قطعہ CQ

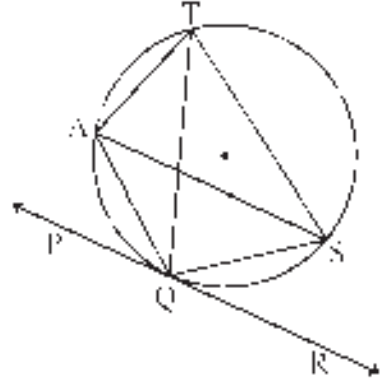


شکل 3.90

11. 3 سم نصف قطر والے تین دائرے کھینچے جن کے مرکز A, B, اور C ہیں۔ اس طرح کہ ہر دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

\*12. ثابت کیجیے کہ دائرے کے کوئی بھی تین نقاط ہم خطی نہیں ہوتے۔

13. شکل 3.91 میں خط PR دائرے کے نقطے Q پر مس کرتا ہے۔ اس شکل کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



شکل 3.91

(1)  $\angle TAQ$  اور  $\angle TSQ$  کی پیمائشوں کی جمع کیجیے۔

(2)  $\angle AQP$  کے متماثل زاویہ کون سا ہے؟

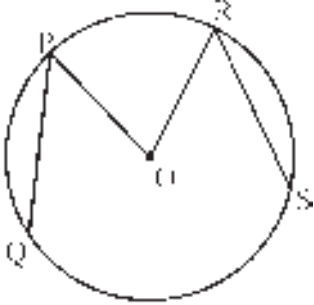
(3)  $\angle QTS$  کے متماثل زاویہ کون سا ہے؟

(4) اگر  $\angle TAS = 65^\circ$  ہو تو  $\angle TQS$  اور  $m(\text{قوس } TS)$  معلوم کیجیے۔

(5) اگر  $\angle AQP = 42^\circ$  اور  $\angle SQR = 58^\circ$  تو  $\angle ATS$  کی پیمائش

معلوم کیجیے۔

14. متصلہ شکل میں O مرکز والے دائرے کے قطعہ PQ اور قطعہ RS متماثل وتر ہیں۔



شکل 3.92

اگر  $\angle POR = 70^\circ$  اور  $m(\text{قوس } RS) = 80^\circ$  ہوتو

(1)  $m(\text{قوس } PR) = ?$

(2)  $m(\text{قوس } QS) = ?$

(3)  $m(\text{قوس } QSR) = ?$

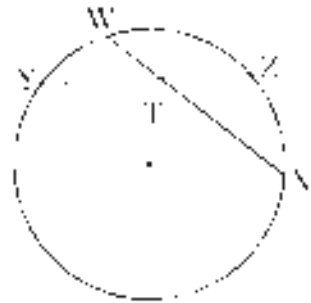
15. شکل 3.93 میں  $m(\text{قوس } WY) = 44^\circ$

ہوتو  $m(\text{قوس } ZX) = 68^\circ$

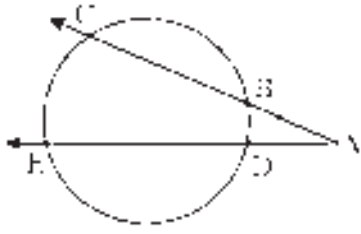
(1)  $\angle ZTX$  کی پیمائش طے کیجیے۔

(2)  $YT = 6.4$ ,  $TX = 8.0$ ,  $WT = 4.8$  ہو تو  $TZ = ?$

(3)  $YZ = 26$ ,  $YT = 8$ ,  $WX = 25$  ہو تو  $WT = ?$



شکل 3.93



شکل 3.94

16. شکل 3.94 میں،

$$m(\text{قوس } BD) = 23^\circ, m(\text{قوس } CE) = 54^\circ \quad (1)$$

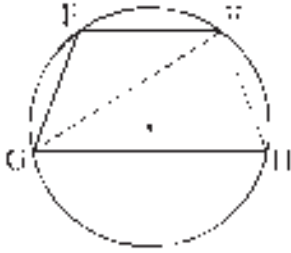
ہو تو  $\angle CAE = ?$

$$AE = 12.0, BC = 5.4, AB = 4.2 \quad (2)$$

ہو تو  $AD = ?$

$$AD = 5.4, AC = 9.0, AB = 3.6 \quad (3)$$

ہو تو  $AE = ?$



شکل 3.95

17. بازو میں دی ہوئی شکل 3.95 میں  $GH \parallel EF$  وتر،

تو ثابت کیجیے کہ وتر  $EG \cong$  وتر  $FH$

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہوں کو پر کر کے ثبوت مکمل کر کے لکھیے۔

ثبوت : قطعہ GF کھینچیے۔

$$\angle EFG = \angle FGH \quad \dots (\text{ }) \quad \dots (I)$$

$$\angle EFG = \text{ } \quad \dots (\text{قوسی زاویے کا مسئلہ}) \quad \dots (II)$$

$$\angle FGH = \text{ } \quad \dots (\text{قوسی زاویے کا مسئلہ}) \quad \dots (III)$$

$$\therefore m(\text{قوس } EG) = \text{ } \quad \dots \{ (III) \text{ اور } (II), (I) \}$$

$$\therefore \text{ وتر } EG \cong \text{ وتر } FH \quad \dots (\text{ })$$

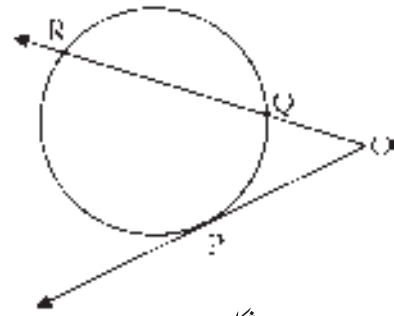
18. بازو کی شکل 3.96 میں نقطہ P تماسی نقطہ ہے۔

$$\angle POR = 36^\circ, m(\text{قوس } PR) = 140^\circ \quad (1)$$

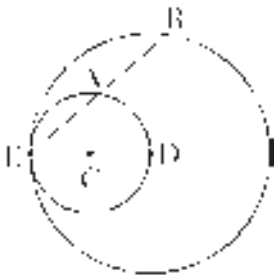
$$m(\text{قوس } PQ) = ? \text{ تو}$$

$$QR = ? \text{ اور } OR = ? \text{ ہو تو } OQ = 3.2, OP = 7.2 \quad (2)$$

$$QR = ? \text{ ہو تو } OR = 16.2, OP = 7.2 \quad (3)$$



شکل 3.96



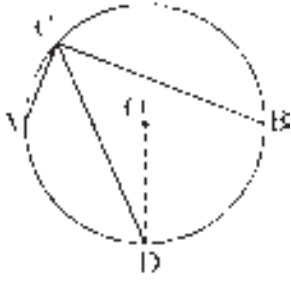
شکل 3.97

19. متصلہ شکل 3.97 میں C مرکز والا دائرہ، D مرکز والے دائرے کو اندرونی طور پر

نقطہ E پر مس کرتا ہے۔

نقطہ D اندرونی دائرے پر واقع ہے۔ بیرونی دائرہ کا وتر EB، اندرونی دائرے کو

نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ  $EA \cong$  قطعہ  $AB$



شکل 3.98

20. شکل 3.98 میں O مرکز والے دائرے کا قطر قطعہ AB ہے۔

توسی زاویہ ACB کا ناصف دائرے کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔

تو ثابت کیجیے کہ BD قطعہ  $\cong$  AD قطعہ

نیچے دیے ہوئے ثبوت میں خالی جگہوں کو پر کر کے اسے مکمل کیجیے اور لکھیے۔

ثبوت : قطعہ OD کھینچیے۔

$\angle ACB =$   ... ( نصف دائرہ میں توسی زاویہ ہے )

$\angle DCB =$   ... (  $\angle C$  کا ناصف قطعہ AD ہے )

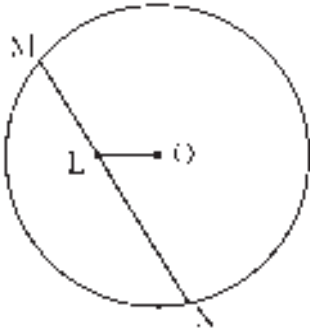
$m(\text{توسی DB}) =$   ... ( توسی زاویہ کا مسئلہ )

$\angle DOB =$   ... ( توسی کی پیمائش کی تعریف ) ... (I)

قطعہ OA  $\cong$  قطعہ OB ... (  ) ... (II)

$\therefore$  خط OD ، قطعہ AB پر  ہے۔ { (I), (II), (III) سے }

قطعہ AD  $\cong$  قطعہ BD



شکل 3.99

21. متصلہ شکل میں، O مرکز والے دائرے کا وتر قطعہ MN ہے۔

$MN = 25$  ، وتر MN پر نقطہ L اس طرح ہے کہ

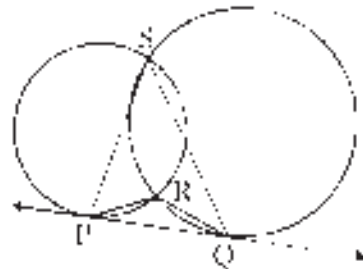
$ML = 9$  اور  $d(O, L) = 5$  ہو تو اس دائرے کا نصف قطر کتنا ہوگا؟

\* 22. شکل 3.100 میں دو دائرے ایک دوسرے کو نقطہ S اور R پر قطع کرتے

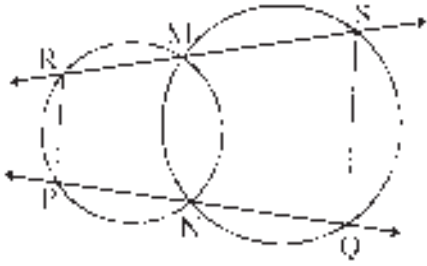
ہیں۔ خط PQ ان کا مشترک مماس ہے۔ جو انہیں نقطہ P اور نقطہ Q

پر مس کرتا ہے۔

تو ثابت کیجیے کہ  $\angle PRQ + \angle PSQ = 180^\circ$



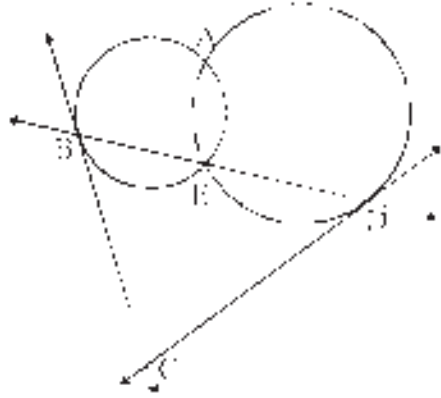
شکل 3.100



شکل 3.101

23. شکل 3.101 دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط M اور N پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ M اور N سے کھینچے گئے قاطع نقاط R اور S اور نقاط P اور Q پر دونوں دائروں کو قطع کرتے ہیں۔

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ  $PR \parallel QS$



شکل 3.102

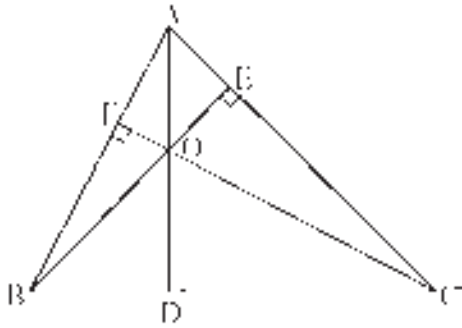
\*24. دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور E پر قطع کرتے ہیں۔

نقطہ E سے گزرنے والا مشترک قاطع خط دائروں کو نقاط B

اور D پر قطع کرتا ہے۔ نقاط B اور D پر بنائے گئے مماس

ایک دوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتے ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ

$\square ABCD$  مستقیم المحیط ہے۔



شکل 3.103

\*25.  $\triangle ABC$  میں، ضلع  $BC \perp AD$  قطعہ، ضلع  $AC \perp BE$  قطعہ،

ضلع  $AB \perp CF$  قطعہ اور نقطہ O ارتفاعی مرکز ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ

$\triangle DEF$  کا داخلی مرکز نقطہ O ہے۔

#### ICT Tools or Links

Geogebra کی مدد سے مختلف دائرے بنائیے۔

ان میں وتر اور مماس کھینچ کر خصوصیت کی جانچ کیجیے۔



آئیے سیکھیں



### ● متشابہ مثلثوں کی تشکیل

- \* دو متشابہ مثلثوں میں سے ایک مثلث کے ضلعوں اور دوسرے مثلث کے نظیری ضلعوں کی نسبت دی جائے تو دوسرا مثلث بنانا۔
- (i) ایک بھی نقطہ راس مشترک نہ ہو۔
- (ii) ایک نقطہ راس مشترک ہو۔
- دائرے کا مماس بنانا۔

\* دائرے پر واقع نقطے سے گذرتا ہو اور دائرے پر مماس بنانا۔

(i) دائرے کے مرکز کا استعمال کر کے۔

(ii) دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر

\* دائرے کے بیرونی نقطے سے دائرے پر مماس بنانا۔

آئیے ذرا یاد کریں



درج ذیل ہندسی عمل ہم گذشتہ جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں۔ ان اعمال کا اعادہ کریں۔

● دیے ہوئے خط کے باہر دیے ہوئے نقطے سے خط کے متوازی گزرتا ہو اور خط کھینچنا۔

● دیے ہوئے قطعہ خط کا عمودی ناصف کھینچنا۔

● مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں اور زاویوں میں سے کافی اجزا دیے ہوں تو مثلث بنانا۔

● دیے ہوئے قطعہ کو دی ہوئی تعداد کے مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔

● دی ہوئی نسبت میں دیے ہوئے قطعہ خط کو تقسیم کرنا۔

● دیے ہوئے زاویے کے متماثل زاویہ بنانا۔

نویں جماعت میں ہم نے اسکول کے اطراف کا نقشہ تیار کرنے کی سرگرمی کی ہے۔ کوئی عمارت تعمیر کرنے سے پہلے اس عمارت کا خاکہ تیار

کرتے ہیں۔ اسکول کے اطراف کا ماحول اور اس کا نقشہ، عمارت اور اس کا خاکہ ایک دوسرے کے متشابہ ہوتے ہیں۔ جغرافیہ، فن تعمیر، میکا نیات

وغیرہ شعبوں میں متشابہ اشکال بنانے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ مثلث سب سے آسان بند مشکل ہے۔ لہذا آئیے اس کا مشاہدہ کریں کہ دیے

ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث کس طرح بناتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں

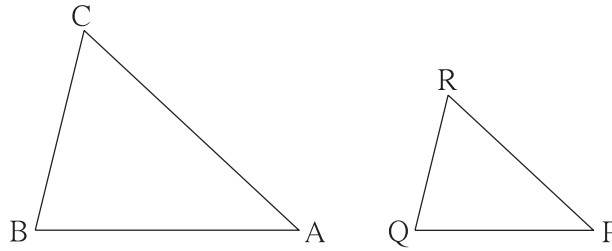


### متشابه مثلث بنانا (Construction of similar triangles)

جب ایک مثلث کے اضلاع دیے ہوئے ہوں تو اس کے متشابه مثلث کے نظیری ضلعوں کی نسبت کی شرط پوری کرنے والا مثلث بنانا۔  
دو متشابه مثلثوں کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں اور ان کے نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اس کا استعمال کر کے دیے ہوئے مثلث کے متشابه مثلث بنایا جاسکتا ہے۔

مثال (1)  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$  میں  $AB = 5.4$  سم،  $BC = 4.2$  سم،  $AC = 6.0$  سم،

$AB : PQ = 3 : 2$  ہو تو  $\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  بنائیے۔



شکل 4.1

(پکی شکل)

پہلے دی ہوئی پیمائشوں کے مطابق  $\triangle ABC$  بنائیے۔

$\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  متشابه ہیں۔

$\therefore$  ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہیں۔

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \dots (1)$$

$AB$ ،  $BC$  اور  $AC$  کی لمبائیاں معلوم ہیں اس لیے درج بالا مساوات کی رو سے  $PQ$ ،  $QR$ ،  $PR$  اضلاع کی لمبائیاں حاصل

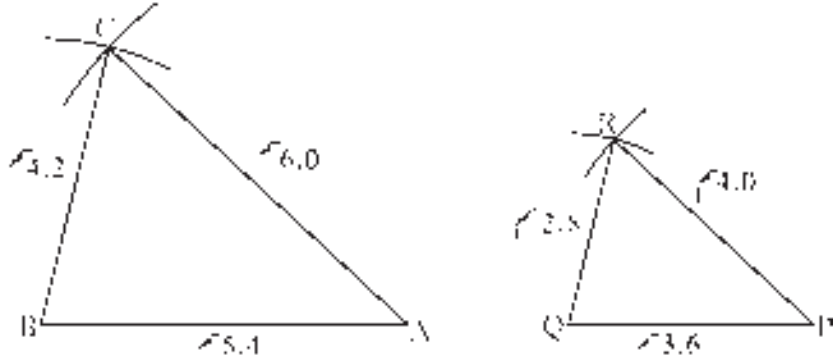
ہوتی ہیں۔

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

مساوات (1) سے

$$\therefore PQ = 3.6 \text{ سم}, QR = 2.8 \text{ سم}, PR = 4.0 \text{ سم}$$

$\triangle PQR$  کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہونے پر ہم وہ مثلث بنا سکتے ہیں۔



شکل 4.2

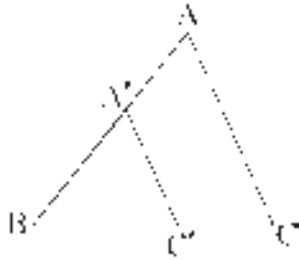
مزید معلومات کے لیے

بعض مرتبہ دیے ہوئے مثلث کے متشابه مثلث بنانا ہوتا ہے اس کے ضلع کی لمبائی اسکیل پٹی کی مدد سے معلوم نہیں کر سکتے۔ اس وقت دیے ہوئے قطعہ خط کو دی ہوئی تعداد کے مساوی حصوں میں تقسیم کرنا، اس عمل کا استعمال کر کے مثلث کے ضلعوں کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ مثلاً ضلع AB کی لمبائی  $\frac{11.6}{3}$  سم ہو تو 11.6 سم لمبائی کا قطعہ خط بنا کر اس کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کریں تو قطعہ AB کھینچا جاسکتا ہے۔

درج بالا مثال (1) میں ہندسی عمل میں دیے ہوئے اور بنائے جانے والے مثلث میں کوئی مشترک راس نہیں ہے۔

اگر ایک راس مشترک ہو تو مثلث بنانے کے لیے ذیل میں دی ہوئی مثال کے مطابق عمل کرنا آسان ہوتا ہے۔

مثال (2) : کوئی بھی ایک  $\triangle ABC$  بنائیے۔



شکل 4.3

$\triangle ABC$  کے متشابه، اس طرح بنائیے کہ  $AB : A'B = 5 : 3$

تجزیہ :  $B, A', A$  اسی طرح  $C, B', C$  ایک ہم خطی نقاط ہیں۔

$\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$  ،  $\therefore \angle ABC = \angle A'BC'$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

اس لیے  $\triangle ABC$  کے اضلاع،  $\triangle A'BC'$  کے نظیری اضلاع سے بڑے ہوں گے۔

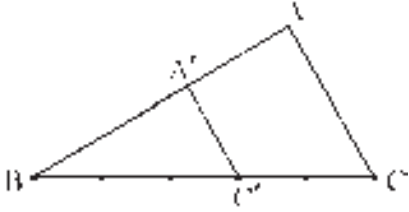
اس لیے اگر قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کریں تو اس میں سے تین حصوں کے مساوی لمبائی کا قطعہ BC ہوگا۔

$\triangle ABC$  بنا کر قطعہ BC پر نقطہ B سے تین حصوں کے مساوی فاصلے پر نقطہ C' ہونا چاہیے۔ نقطہ C' سے قطعہ AC کے متوازی بنایا

گیا خط قطعہ BA کو جس نقطے پر قطع کرے وہ نقطہ A' ہوگا۔

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ یعنی } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3} \dots \text{ (عمل عکس سے)}$$

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.4

(1) کوئی بھی ایک  $\triangle ABC$  بنائیے۔

(2) قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کیجیے۔

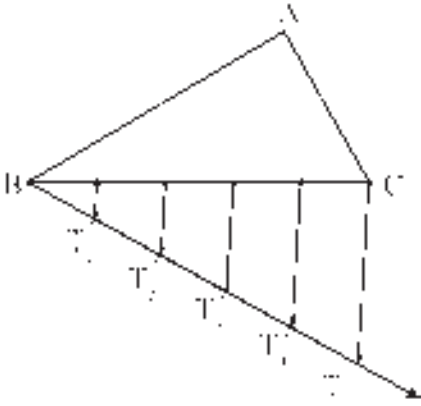
(3) نقطہ B سے تیسرے نقطے کو  $C'$  نام دیجیے۔

$$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$$

(4) اب  $C'$  سے CA کے متوازی خط کھینچیے، جو BA کو جس نقطے پر قطع کرے اس نقطہ کو  $A'$  نام دیجیے۔

(5)  $\triangle ABC$  کے متشابه  $\triangle A'BC'$  مطلوبہ مثلث ہے۔

نوٹ : BC کے پانچ مساوی حصے کرنے کے دوران خط BC کے جس سمت میں A ہے۔ اس کے مخالف سمت میں B سے گذرتے ہوئے ایک شعاع بنائیے اس طرح حصے کرنے میں آسانی ہوتی ہے۔



شکل 4.5

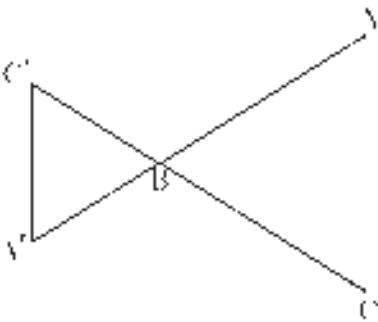
اس شعاع پر  $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$

ایسے مساوی حصے لیں۔

$T_5C$  کو ملائیے اور  $T_4, T_3, T_2, T_1$  سے  $T_5C$  کے

متوازی خطوط کھینچیے۔

غور کیجیے



شکل 4.6

متشابه مثلث بنانے کے لیے شکل میں دکھائے ہوئے پیمانے کے مطابق

بھی  $\triangle A'BC'$  بنایا جاسکتا ہے۔

اس شکل کے مطابق اگر  $\triangle A'BC'$  بنانا ہو تو ہندسی عمل کے مرحلوں

میں کیا تبدیلی کرنا ہوگی؟

مثال (3) :  $\triangle ABC$  کے متشابه  $\triangle A'BC'$  اس طرح بنائیے کہ  $AB : A'B = 5 : 7$

تجزیہ : نقاط  $A, A', B, C, C'$  ہم خطی ہیں اسی طرح  $B, C, C'$  بھی ہم خطی ہیں۔

$$AB : A'B = 5 : 7 \text{ اور } \triangle ABC \sim \triangle A'BC'$$

$\triangle ABC$  کے اضلاع،  $\triangle A'BC'$  کے نظیری اضلاع سے چھوٹے ہیں۔

$$\angle ABC \cong \angle A'BC'$$

اس بارے میں غور کرتے ہوئے کچی شکل بنائیں گے۔

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7} \text{ ، ا ب}$$

اس لیے قطعہ خط  $BC$  کے 5 مساوی حصے کریں اور اس میں سے ایک حصے کا 7 گنا  $BC'$  کی لمبائی ہوگی۔

$\triangle ABC$  بنا کر قطعہ  $BC$  کے پانچ مساوی حصے کریں گے۔ شعاع  $BC$  پر نقطہ  $B$  سے سات حصوں کے مساوی لمبائی کے فاصلے پر نقطہ  $C'$  ہوگا۔

متناسبیت کے بنیادی مسئلے کے رو سے نقطہ  $C'$  سے ضلع  $AC$  کے متوازی خط بناتے ہیں تو وہ بڑھائی ہوئی شعاع  $BA$  کو جس نقطے پر قطع کرتا ہے وہ نقطہ  $A'$  ہے۔ قطعہ  $A'C'$  کھینچ کر  $\triangle A'BC'$  مطلوبہ مثلث ہوگا۔

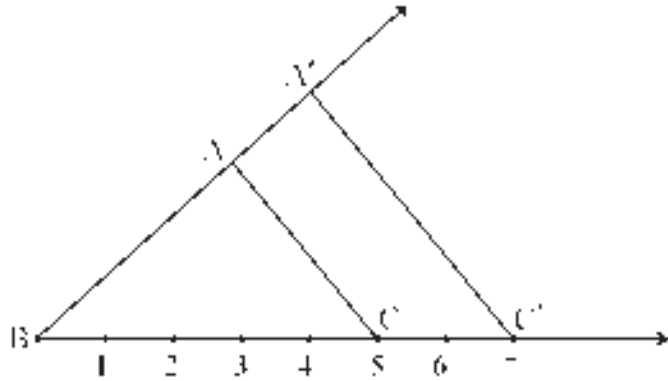
ہندسی عمل کے مرحلے :

(1) کوئی بھی  $\triangle ABC$  بنائیے۔

(2) قطعہ  $BC$  کے 5 مساوی حصے کیجیے۔ شعاع  $BC$  پر نقطہ  $C'$  اس طرح لیجیے کہ قطعہ  $BC'$  کی لمبائی، قطعہ  $BC$  کے ایک حصے کا سات گنا ہے۔

(3) نقطہ  $C'$  سے قطعہ  $AC$  کے متوازی خط کھینچیے جو شعاع  $BA$  کو جس نقطے پر قطع کرے اسے  $A'$  نام دیجیے۔

$\triangle ABC$  کے متشابه مطلوبہ مثلث  $\triangle A'BC'$  ہے۔



شکل 4.8

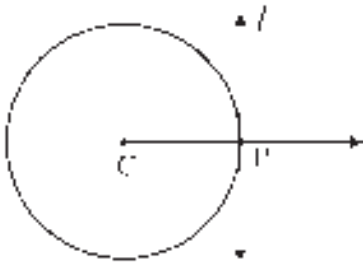
## مشقی سیٹ 4.1

1.  $\triangle ABC \sim \triangle LMN$ ، اس طرح بنائیے کہ سم  $AB = 5.5$  سم،  $BC = 6$  سم،  $CA = 4.5$  سم اور  $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$  ہو تو  $\triangle ABC$  اور  $\triangle LMN$  بنائیے۔
2.  $\triangle PQR \sim \triangle LTR$  میں سم  $PQ = 4.2$  سم،  $QR = 5.4$  سم،  $PR = 4.8$  سم اور  $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$  ہو تو  $\triangle PQR$  اور  $\triangle LTR$  بنائیے۔
3.  $\triangle RST \sim \triangle XYZ$  میں سم  $RS = 4.5$  سم،  $\angle RST = 40^\circ$ ،  $ST = 5.7$  سم اور  $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$  ہو تو  $\triangle RST$  اور  $\triangle XYZ$  بنائیے۔
4.  $\triangle AMT \sim \triangle AHE$  میں سم  $AM = 6.3$  سم،  $\angle TAM = 50^\circ$ ،  $AT = 5.6$  سم اور  $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$  ہو تو  $\triangle AMT$  اور  $\triangle AHE$  بنائیے۔

آئیے سمجھ لیں



دیے ہوئے دائرے پر دیے ہوئے نقطے سے گزرتا ہوا مماس کھینچنا



شکل 4.9

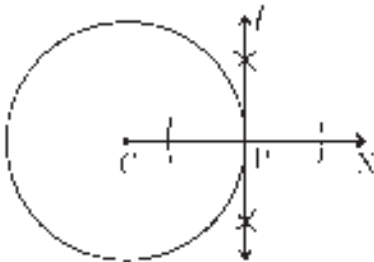
(i) دائرے کے مرکز کا استعمال کر کے :

تجزیہ : فرض کریں C مرکز والے دائرے پر واقع نقطہ P سے گزرنے والے دائرے پر خط مماس l کھینچنا ہے۔

دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے پر کھینچا ہوا عمودی خط دائرے کا مماس ہوتا ہے اس خصوصیت کا استعمال کریں گے۔

فرض کریں نصف قطر CP بناتے ہیں تو خط  $l \perp CP$  قطعاً، یعنی نصف قطر CP کے نقطہ P سے گزرنے والا عمودی خط کھینچیں تو وہ مطلوبہ مماس ہوگا۔

دیے ہوئے خط پر واقع نقطے سے گزرنے والا اس خط پر عمودی خط کھینچنے کے عمل کا استعمال کرتے ہیں۔ یعنی سہولت کے لیے شعاع CP بنا کر خط l کا ہندی عمل کرتے ہیں۔



شکل 4.10

ہندی عمل کے مرحلے :

(i) ایک دائرہ بنائیے جس کا مرکز C ہے دائرے پر ایک نقطہ لیجیے۔

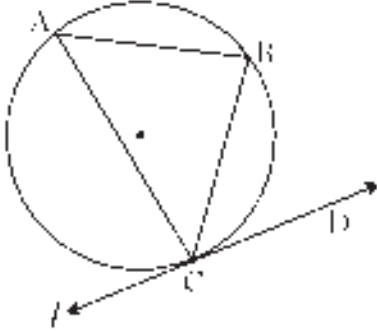
(ii) شعاع CP کھینچیے۔

(iii) نقطہ P سے گزرتا ہوا شعاع CX پر عمودی خط l کھینچیے۔

خط l، نقطہ P سے گزرنے والا مطلوبہ دائرے کا مماس ہے۔

(ii) دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر :

مثال : کسی بھی نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی بھی ایک نقطہ C لپیچیں۔ دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر نقطہ C سے اس دائرے کا مماس بنائیے۔



شکل 4.11

تجزیہ : فرض کریں شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق خط  $l$ ، نقطہ C سے گزرنے والا مماس ہے۔ قطعہ CB وتر ہے۔

اور قوسی زاویہ  $\angle CAB$  بنائیں گے۔ مماس قاطع خط زاویہ مسئلے کی رؤ سے

$$\angle CAB \cong \angle BCD$$

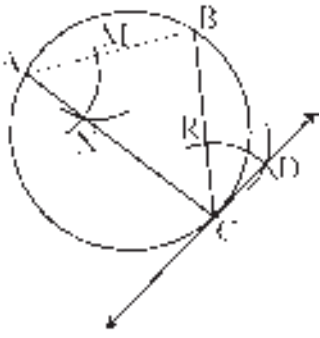
مماس قاطع زاویے کے مسئلے کے عکس کے مطابق اگر  $\angle CAB \cong \angle BCD$  ہو تو

خط  $l$  دائرے کا مماس ہوتا ہے۔ یعنی قطعہ CB دائرے کا وتر اور قوسی زاویہ  $\angle CAB$  بنائیں گے۔  $\angle BCD$  کا ہندسی عمل اس

طرح کرتے ہیں کہ  $\angle BCD \cong \angle BAC$

خط CD، دیے ہوئے دائرے کے نقطہ C سے گزرنے والا اس دائرے کا مماس ہے۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.12

(1) ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی بھی ایک نقطہ C لپیچیں۔

(2) وتر CB اور قوسی زاویہ  $\angle CAB$  کھینچیں۔

(3) پرکار میں مناسب نصف قطر لے کر اور نقطہ A کو مرکز مان کر  $\angle BAC$  کی ساقین کو

نقاط M اور N پر قطع کرنے والا قوس کھینچیں۔

(4) وہی نصف قطر لے کر نقطہ C کو مرکز مان کر وتر CB کو قطع کرنے والا قوس بنائیے۔

اسے R نام دیجیے۔

(5) پرکار میں MN نصف قطر لے کر R کو مرکز مان کر پہلے کھینچے ہوئے قوس کو قطع کرتا ہوا ایک دوسرا قوس کھینچیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کو D

نام دیجیے۔

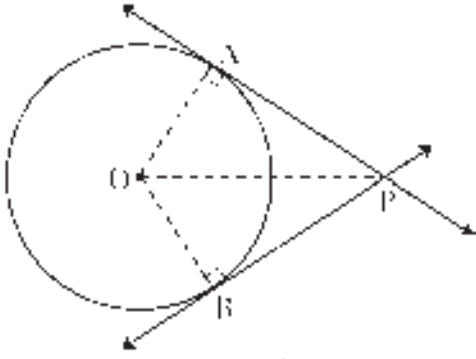
خط CD کھینچیں۔ خط CD دائرے کا مماس ہے۔

(درج بالا شکل میں  $\triangle MAN \cong \triangle RCD$  اس کی وجہ پر دھیان دیجیے۔

قطعہ MN اور قطعہ RD بنائیے تو 'ضـل ضـل' متماثلت کی آزمائش کے مطابق،

$$\angle MAN = \angle BCD \text{ اس لیے } \triangle MAN \cong \triangle RCD$$

دیئے ہوئے دائرے کے بیرون میں واقع نقطے سے مماس کھینچنا

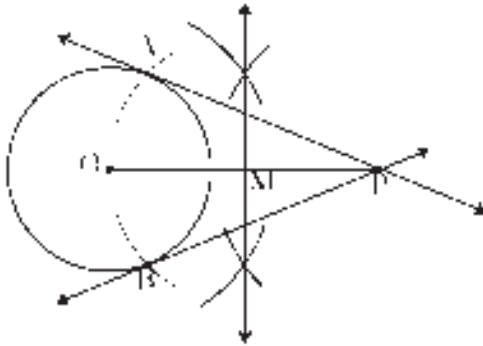


شکل 4.13

تجزیہ : فرض کریں شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق O مرکز والے دائرے کے بیرون میں نقطہ P ہے۔ نقطہ P سے دائرے پر بنائے گئے مماس دائرے پر نقاط A اور B پر مس کرتے ہیں۔ اگر دائرے پر نقاط A اور B کا تعین ہو جائے تو مماس PA اور PB بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر نصف قطر OA اور OB بنائیں تو  $OA \perp PA$  نصف قطر اور  $OB \perp PB$  نصف قطر،  $\triangle OAP$  اور  $\triangle OBP$  قائمہ الزاویہ مثلث ہیں اور OP دونوں

مثلثوں کا وتر ہے۔ قطعہ OP کو قطر مان کر دائرہ بنائیں تو یہ دائرہ اصل دائرے جس کا مرکز O ہے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔ کیونکہ نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.14

- (1) نقطہ O کو مرکز لے کر کسی بھی نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔
  - (2) دائرے کے بیرون میں ایک نقطہ P لیجیے۔
  - (3) قطعہ OP بنائیے۔ قطعہ OP کا عمودی ناصف بنا کر وسطی نقطہ کو M نام دیجیے۔
  - (4) نقطہ M کو مرکز مان کر OM نصف قطر کا قوس بنائیے۔
  - (5) یہ قوس، دیئے ہوئے دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔
  - (6) قطعہ PA اور قطعہ PB بنائیے۔
- قطعہ PA اور قطعہ PB دائرے کے مطلوبہ مماس ہیں۔

## مشقی سیٹ 4.2

1. نقطہ P کو مرکز مان کر 3.2 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ اس پر واقع نقطہ M سے گزرنے والا مماس بنائیے۔
2. 2.7 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ اس دائرے پر واقع نقطے سے دائرے کا مماس بنائیے۔
3. 3.6 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی ایک نقطہ لے کر مرکز کا استعمال کیے بغیر اس نقطے سے گزرتا ہوا دائرہ کا مماس بنائیے۔
4. 3.3 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ اس میں 6.6 سم لمبائی کا وتر PQ بنائیے۔ نقاط P اور Q سے گزرنے والے دائرے کے مماس بنائیے۔ مماسوں کے متعلق اپنا مشاہدہ لکھیے۔

5. 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ اس میں 5.7 سم لمبائی کا وتر MN کھینچیے۔ نقطہ M اور نقطہ N سے گزرنے والا مماس بنائیے۔
6. P مرکز مان کر 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 5.5 سم کے فاصلے پر ایک نقطہ Q لیجیے۔ نقطہ Q سے دائرے پر مماس بنائیے۔

7. 4.1 سم نصف لے کر ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 7.3 سم فاصلے پر واقع نقطے سے دائرے پر مماس بنائیے۔

مجموعہ سوالات 4

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے :
- (1) دائرے پر دیے ہوئے نقطے سے دائرے پر بنائے ہوئے مماس کی تعداد ..... ہوگی۔
- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
- (2) دائرے کے بیرون میں واقع نقطے سے دائرے پر زیادہ سے زیادہ ..... مماس بنائے جاسکتے ہیں۔
- (A) 2 (B) 1 (C) ایک اور صرف ایک (D) 0
- (3) اگر  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ ،  $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$  تو ..... -
- (A) قطعی طور پر نہیں کہہ سکتے (D) دونوں مثلث مساوی ہیں (C)  $\triangle PQR$  بڑا ہے (B)  $\triangle ABC$  بڑا ہے
2. نقطہ O کو مرکز مان کر 3.5 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 5.7 سم فاصلے پر ایک نقطہ P لیجیے۔ نقطہ P سے دائرے پر مماس بنائیے۔
3. کوئی بھی ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ P لیجیے۔ نقطہ A سے دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر مماس بنائیے۔
4. 6.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے قطر کے مساوی فاصلے پر نقطہ R لیجیے۔ اس نقطے سے دائرے پر مماس بنائیے۔
5. P مرکز والا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے میں  $100^\circ$  پیمائش کا ایک قوس AB بنائیے۔ نقاط A اور B سے گزرنے والے دائرے کا مماس بنائیے۔
6. نقطہ E کو مرکز مان کر 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے پر ایک نقطہ F لیجیے۔ نقطہ A اس طرح لیں کہ E-F-A اور  $FA = 4.1$  سم، نقطہ A سے دائرے کا مماس بنائیے۔
7. اگر  $\triangle ABC \sim \triangle LBN$ ،  $\triangle ABC$  میں  $AB = 5.1$  سم،  $\angle B = 40^\circ$ ،  $BC = 4.8$  سم،  $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$  تو  $\triangle ABC$  اور  $\triangle LBN$  بنائیے۔
8.  $\triangle PYQ$  اس طرح بنائیے کہ  $PY = 6.3$  سم،  $YQ = 7.2$  سم،  $PQ = 5.8$  سم،  $\triangle PYQ$  کے متشابه  $\triangle XYZ$  اس طرح بنائیے کہ  $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$



آئیے سیکھیں



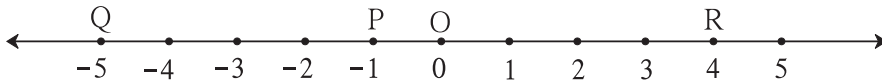
● فاصلہ کا ضابطہ (Distance formula) ● حصے کا ضابطہ (Section formula)

● خط کی ڈھلان (Slope of a line)

آئیے ذرا یاد کریں



ہم جانتے ہیں کہ عددی خط پر واقع دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ P، Q اور R نقاط کے محدود بالترتیب -1، -5، اور 4 ہیں۔ تب قطعہ PQ اور قطعہ QR کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 5.1

اگر نقاط A اور B کے محدود  $x_1$  اور  $x_2$  ہوں اور  $x_1 > x_2$  ہو تب

$$d(A, B) = x_1 - x_2 = \text{قطعہ خط AB کی لمبائی}$$

شکل کے مطابق نقاط P، Q اور R بالترتیب -1، -5، اور 4 ہیں۔

$$\therefore d(P, Q) = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4$$

$$\text{اور، } d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$$

اس تصور کا استعمال کر کے ہم XY مستوی میں، ایک ہی محور پر واقع دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں گے۔

آئیے سمجھ لیں

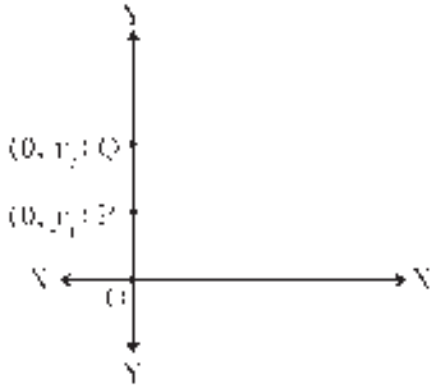


1. ایک ہی محور پر واقع دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

ایک ہی محور پر واقع دو نقاط یعنی ایک ہی عددی خط پر واقع دو نقاط ہوتے ہیں۔ اسے ذہن نشین رکھیں کہ X-محور پر نقاط کے محدود ہیں (0, 3)، (0,  $\frac{17}{2}$ )، (0, 1) اس طرح ہوتے ہیں اور Y-محور پر نقاط کے محدود ہیں (8, 0)، ( $-\frac{5}{2}$ , 0)، (2, 0) اس طرح ہوتے ہیں۔

X-محور کا منفی محدود دکھانے والا حصہ، شعاع OX ہے اور Y-محور کا منفی محدود دکھانے والا حصہ، شعاع OY ہے۔

(ii) Y - محور پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔



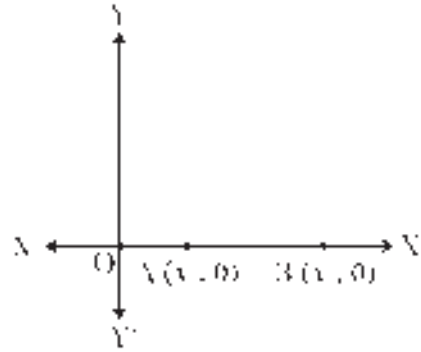
شکل 5.3

اوپر کی شکل میں،

یہ دو نقاط Y-محور پر اس طرح واقع ہیں کہ  $y_2 > y_1$

$$\therefore d(A, B) = y_2 - y_1$$

(i) X - محور پر دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.2

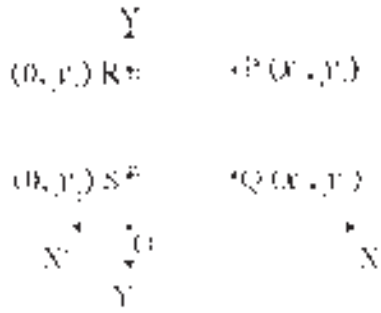
اوپر کی شکل میں،

یہ دو نقاط  $A(x_1, 0)$  اور  $B(x_2, 0)$

X-محور پر اس طرح واقع ہیں کہ  $x_2 > x_1$

$$\therefore d(A, B) = x_2 - x_1$$

(2) دو نقاط کو ملانے والا XY مستوی کا قطعہ کسی محور کے متوازی ہو تو ان دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.5

(ii) شکل 5.5 میں، قطعہ PQ، Y-محور کے متوازی ہے۔

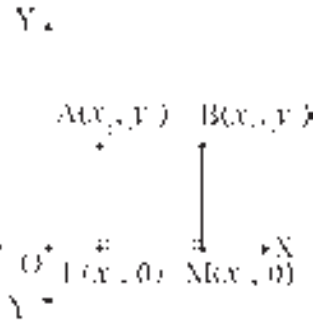
اس لیے نقطہ P اور نقطہ Q کے x-محدد مساوی ہیں۔  
Y-محور پر قطعہ PR اور قطعہ QS عمود کھینچیں۔

$\square PQSR$  مستطیل ہے۔

$$\therefore PQ = RS$$

لیکن،  $RS = y_2 - y_1$

$$\therefore d(P, Q) = y_2 - y_1$$



شکل 5.4

(i) شکل 5.4 میں، قطعہ AB، X-محور کے متوازی ہے۔

اس لیے نقطہ A اور نقطہ B کے y-محدد مساوی ہیں۔  
X-محور پر قطعہ AL اور قطعہ BM عمود کھینچیں۔

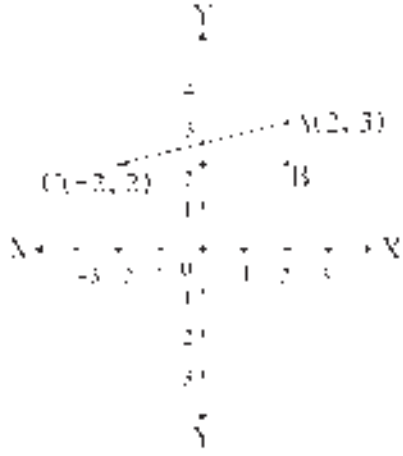
$\square ABML$  مستطیل ہے۔

$$\therefore AB = LM$$

لیکن،  $LM = x_2 - x_1$

$$\therefore d(A, B) = x_2 - x_1$$

عملی کام :



شکل 5.6

شکل 5.6 میں  $-Y$  محور  $AB$  قطعہ اور  $-X$  محور  $CB$  قطعہ ہے۔

نقاط  $A$  اور  $C$  کے محددین دیے ہوئے ہیں۔

$AC$  کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ذیل کی خانہ پری کیجیے۔

$\triangle ABC$  قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

فیثاغورث کے مسئلہ کی رؤ سے،

$$(AB)^2 + (BC)^2 = \square$$

$AB$  اور  $BC$  معلوم کرنے کے لیے نقطہ  $B$  کے محددین معلوم کریں گے۔

$$CB \parallel \text{محور } -X, \therefore B \text{ کا } -Y \text{ محدد} = \square$$

$$BA \parallel \text{محور } -Y, \therefore B \text{ کا } -X \text{ محدد} = \square$$

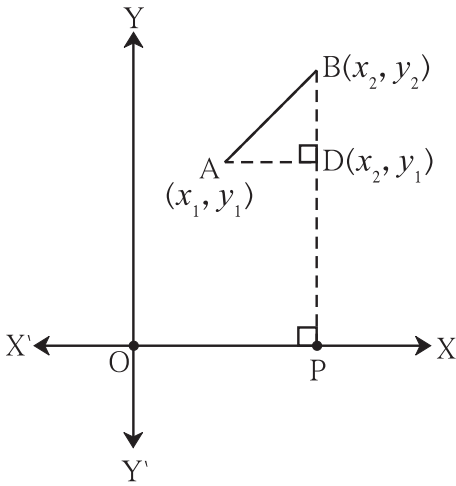
$$AB = \square - \square = \square, \quad BC = \square - \square = \square$$

$$\therefore AC^2 = \square + \square = \square, \quad \therefore AC = \sqrt{\square}$$

آئیے سمجھ لیں



فاصلے کا ضابطہ (Distance Formula)



شکل 5.7

شکل 5.7 میں،  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  یہ  $XY$ -مستوی

میں واقع کوئی دو نقاط ہیں۔

نقطہ  $B$  سے  $-X$  محور پر  $BP$  ایک عمود کھینچیے۔ اسی طرح نقطہ  $A$  سے

قطعہ  $BP$  پر عمود  $AD$  کھینچیے۔  $-Y$  محور کے متوازی قطعہ  $BP$  ہے۔

$\therefore$  نقطہ  $D$  کا  $x$  محدد  $x_2$  ہے۔

$-X$  محور کے متوازی قطعہ  $AD$  ہے۔

$\therefore$  نقطہ  $D$  کا  $y$  محدد  $y_1$  ہے۔

$$\therefore AD = d(A, D) = x_2 - x_1, \quad BD = d(B, D) = y_2 - y_1$$

$\triangle ABD$  قائمہ الزاویہ مثلث میں،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

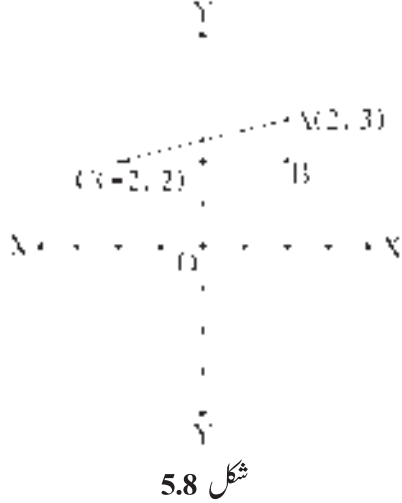
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اس نتیجے کو فاصلہ کا ضابطہ کہتے ہیں۔

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \dots \text{(اسے ذہن نشین رکھیے)}$$

پچھلے صفحہ پر ہم نے AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے AB اور BC کی لمبائی معلوم کر کے فیثاغورث کا مسئلہ استعمال کیا۔ اب فاصلہ کا ضابطہ استعمال کر کے اسی قطعہ خط کی لمبائی معلوم کریں گے۔



شکل 5.8

دیا ہوا ہے : A(2, 3) اور C(-2, 2)

فرض کیجیے :  $A(x_1, y_1)$  ،  $C(x_2, y_2)$

یہاں  $x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

Y-محور  $\parallel$  AB قطعہ اور X-محور  $\parallel$  BC قطعہ

$\therefore$  نقطہ B کے محدد (2, 2) ہیں۔

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0} = 4$$

شکل 5.1 میں نقاط P اور Q کا درمیانی فاصلہ  $4^2 = (-5) - (-1) = 4$  ہم نے معلوم کیا ہے۔ انہی نقاط کے محددی مستوی میں (-1, 0) اور (-5, 0) ہوں تو فاصلہ کا ضابطہ استعمال کر کے P اور Q کا درمیانی فاصلہ بھی اتنا آئے گا۔ تصدیق کیجیے۔

اسے ذہن نشین کر لیں



● مبدا O کے محددین (0, 0) ہوتے ہیں۔ اس لیے نقطہ P کے محددین (x, y) ہوں تو  $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$  اسے ذہن نشین کر لیں۔

● یہ دونوں نقاط XY-مستوی پر واقع ہوں تو

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{یعنی } PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

مثال (1) :  $P(-1, 1)$  ،  $Q(5, -7)$  ان دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے  $P(x_1, y_1)$  اور  $Q(x_2, y_2)$

$$\text{یہاں } x_1 = -1, y_1 = 1, x_2 = 5, y_2 = -7$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \dots \text{ (فاصلے کے ضابطے سے)}$$

$$= \sqrt{[5 - (-1)]^2 + [(-7) - 1]^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$$

∴ P اور Q نقاط کا درمیانی فاصلہ 10 ہے۔

مثال (2) :  $A(-3, 2)$  ،  $B(1, -2)$  اور  $C(9, -10)$  دکھائیے کہ یہ تینوں نقاط ہم خطی ہیں۔

حل : اگر  $d(A, B)$  ،  $d(B, C)$  اور  $d(A, C)$  ان میں سے کوئی دو فاصلوں کا مجموعہ تیسرے فاصلے کے برابر ہو تو A ، B ، C ہم خطی نقاط ہوں گے۔

∴  $d(A, B)$  ،  $d(B, C)$  اور  $d(A, C)$  کی لمبائی معلوم کریں۔

نقطہ A کے محدد  
(-3, 2)  
( $x_1, y_1$ )

نقطہ B کے محدد  
(1, -2)  
( $x_2, y_2$ )

فاصلے کا ضابطہ

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1 - (-3)]^2 + [(-2) - 2]^2} \quad \dots \text{ (فاصلے کے ضابطے سے)}$$

$$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \dots \text{(I)}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$$

$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \quad \dots \text{(II)}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$$

$$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2} \quad \dots \text{(III)}$$

$$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

[بیان (I) ، (II) اور (III) کی رؤ سے] ...

$$\therefore d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

∴ A ، B اور C ہم خطی نقاط ہیں۔

مثال (3) :  $P(6, -6)$ ،  $Q(3, -7)$  اور  $R(3, 3)$  کیا یہ تینوں نقاط ہم خطی ہیں؟ طے کیجیے۔

حل : (فاصلے کے ضابطے سے)

$$PQ = \sqrt{(6-3)^2 + (-6-(-7))^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10} \quad \dots (I)$$

$$QR = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-3)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (-10)^2} = \sqrt{100} \quad \dots (II)$$

$$PR = \sqrt{(3-6)^2 + (3-(-6))^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (9)^2} = \sqrt{90} \quad \dots (III)$$

بیان (I)، (II) کی بنا پر  $\sqrt{10}$ ،  $\sqrt{100}$  اور  $\sqrt{90}$  ان میں سے  $\sqrt{100}$  سب سے بڑا عدد ہے۔

اب  $[\sqrt{100}]$  اور  $[\sqrt{90} + \sqrt{10}]$  یہ اعداد مساوی ہیں یا نہیں یہ دیکھیں گے۔

اس لیے  $[\sqrt{100}]$  اور  $[\sqrt{90} + \sqrt{10}]$  کا موازنہ کیجیے۔

اس بنا پر ہمیں اس بات کا پتا چلتا ہے کہ

$$[\sqrt{10} + \sqrt{90}] > [\sqrt{100}] \therefore PQ + PR \neq QR$$

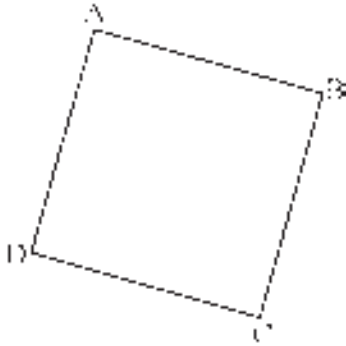
$\therefore P(6, -6)$ ،  $Q(3, -7)$  اور  $R(3, 3)$  یہ نقاط غیر ہم خطی ہیں۔

مثال (4) : دکھائیے کہ  $(1, 7)$ ،  $(4, 2)$ ،  $(-1, -1)$ ،  $(-4, 4)$  یہ مربع کے راس ہیں۔

حل : جب ذواربعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے ہوں اور وتر بھی مساوی ہوں تب ذواربعۃ الاضلاع مربع ہوتا ہے۔

$\therefore$  تمام اضلاع کی لمبائیاں اور وتروں کی لمبائیاں فاصلے کے ضابطے سے معلوم کریں۔

فرض کیجیے :  $A(1, 7)$ ،  $B(4, 2)$ ،  $C(-1, -1)$  اور  $D(-4, 4)$  دیے ہوئے نقاط ہیں۔



شکل 5.9

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1-(-4))^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

$$\therefore AB = BC = CD = DA$$

$$\text{اور } AC = BD$$

اس سے ہمیں پتا چلتا ہے ذواربعتہ الاضلاع کے چاروں اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہے اور دونوں وتر AC اور BC کی لمبائیاں بھی مساوی ہے۔

∴ (1, 7)، (4, 2)، (-1, -1) اور (-4, 4) راسوں سے بننے والا ذواربعتہ الاضلاع مربع ہے۔

مثال (5) : Y-محور پر واقع ایسے نقطہ کے محددین معلوم کیجیے کہ وہ M(-5, -2) اور N(3, 2) سے ہم فاصلہ ہو۔

حل : فرض کیجیے، Y-محور پر نقطہ P(0, y) نقطہ M اور N سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore PM = PN \quad \therefore PM^2 = PN^2$$

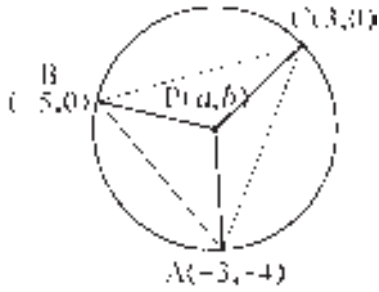
$$\therefore [0 - (-5)]^2 + [y - (-2)]^2 = (0 - 3)^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore 25 + (y + 2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

∴ M(-5, -2) اور N(3, 2) ان نقاط سے ہم فاصلہ، Y-محور پر نقطہ کے محددین (0, -2) ہیں۔



شکل 5.10

مثال (6) : A(-3, -4)، B(-5, 0)، C(3, 0) یہ  $\triangle ABC$  کے راس ہیں۔

$\triangle ABC$  کے حائل مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے : نقطہ P(a, b)  $\triangle ABC$  کا حائل مرکز ہے۔

∴ نقطہ P، نقاط A، B، C سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2 \quad \dots (I) \quad \therefore PA^2 = PB^2$$

$$(a + 3)^2 + (b + 4)^2 = (a + 5)^2 + (b - 0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \quad \dots (II)$$

اسی طرح،  $PA^2 = PC^2$  ... [سے (I)]

$$\therefore (a + 3)^2 + (b + 4)^2 = (a - 3)^2 + (b - 0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \quad \dots (III)$$

مساوات (II) اور (III) حل کرنے پر  $a = -1$  اور  $b = \frac{1}{2}$

∴ حائل مرکز کے محددین  $(-1, \frac{1}{2})$  ہیں۔

مثال (7) : نقطہ  $(x, y)$  نقاط  $(7, 1)$  اور  $(3, 5)$  سے ہم فاصلہ ہو تو دکھائیے کہ  $y = x - 2$

حل : فرض کیجیے : نقطہ  $P(x, y)$  یہ نقاط  $A(7, 1)$  اور  $B(3, 5)$  سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

مثال (8) : نقطہ  $A(2, -2)$  اور نقطہ  $B(-1, y)$  کے درمیان فاصلہ 5 ہے۔ تو  $y$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : (فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے)،

$$\therefore AB = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$$

$$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y + 2)^2$$

$$\therefore 25 = 9 + (y + 2)^2$$

$$\therefore 16 = (y + 2)^2$$

$$\therefore y + 2 = \pm \sqrt{16}$$

$$\therefore y + 2 = \pm 4$$

$$\therefore y = 4 - 2 \quad \text{یا} \quad y = -4 - 2$$

$$\therefore y = 2 \quad \text{یا} \quad y = -6$$

### مشقی سیٹ 5.1

1. مندرجہ ذیل نقاط کے ہر جوڑی کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(1)  $A(2, 3), B(4, 1)$       (2)  $P(-5, 7), Q(-1, 3)$       (3)  $R(0, -3), S(0, \frac{5}{2})$

(4)  $L(5, -8), M(-7, -3)$       (5)  $T(-3, 6), R(9, -10)$       (6)  $W(\frac{7}{2}, 4), N(11, 4)$

2. مندرجہ ذیل نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

(1)  $A(1, -3), B(2, -5), C(4, 7)$       (2)  $L(2, 3), M(1, -3), N(5, 4)$

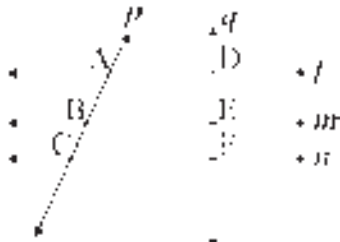
(3)  $R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)$       (4)  $P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)$

3. X-محور پر ایسا نقطہ معلوم کیجیے کہ نقطہ  $A(-3, 4)$  اور  $B(1, -4)$  سے ہم فاصلہ ہو۔
4. دکھائیے کہ نقاط  $P(-2, 2)$ ،  $Q(2, 2)$  اور  $R(2, 7)$  قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔
5. دکھائیے کہ نقاط  $P(-2, 2)$ ،  $Q(7, 3)$ ،  $R(11, -1)$  اور  $S(6, -6)$  متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔
6. دکھائیے کہ نقاط  $A(-4, -7)$ ،  $B(-1, 2)$ ،  $C(8, 5)$  اور  $D(5, -4)$  معین ABCD کے راس ہیں۔
7. اگر نقاط  $L(x, 7)$  اور  $M(1, 15)$  کا درمیانی فاصلہ 10 ہے تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔
8. دکھائیے کہ نقاط  $A(1, 2)$ ،  $B(1, 6)$  متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

آئیے ذرا یاد کریں



تین متوازی خطوط پر بنے حائل قطعات کی خصوصیت



شکل 5.11

شکل میں  $n$  خط  $\parallel$  خط  $m$   $\parallel$  خط  $l$

اور خطوط  $p$  اور  $q$  تقاطع ہیں۔

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

آئیے سمجھ لیں



قطعه خط کی تقسیم (Division of a line Segment)



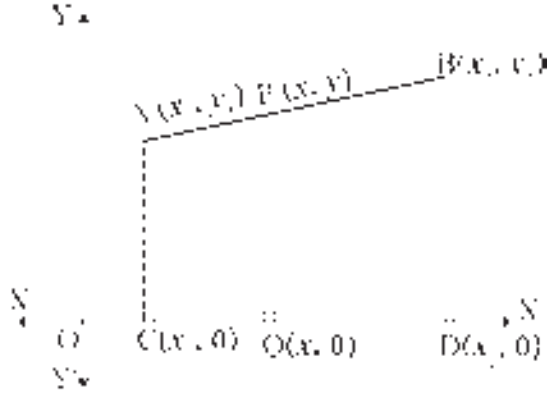
شکل 5.12

شکل میں  $AP = 6$  اور  $PB = 10$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

اسے دوسرے الفاظ میں یوں کہتے ہیں کہ نقطہ  $P$ ، قطعہ  $AB$  کو  $3 : 5$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ جب کسی قطعہ خط پر کوئی نقطہ، اسی قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تب اس تقسیم کرنے والے نقطے کے محدودین کس طرح معلوم کریں گے۔



شکل 5.13

شکل 5.13 میں XY-مستوی میں قطعہ AB پر واقع نقطہ P، قطعہ AB کو  $m : n$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

فرض کیجیے:  $P(x, y)$ ،  $B(x_2, y_2)$ ،  $A(x_1, y_1)$  ہے۔

قطعہ AC، قطعہ PQ اور قطعہ BD عمودی قطعات X-محور پر کھینچے گئے ہیں۔

اس لیے،  $D(x_2, 0)$  اور  $Q(x, 0)$ ،  $C(x_1, 0)$

$$\therefore \left. \begin{aligned} CQ &= x - x_1 \\ QD &= x_2 - x \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

BD قطعہ || PQ قطعہ، اسی طرح

$\therefore$  تین متوازی خطوط سے بننے والے حائل قطعات کی خصوصیات کی بنا پر،

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$$

اب،  $CQ = x - x_1$ ،  $QD = x_2 - x$  [ (1) سے ]

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

اس طرح نقاط A، P اور B سے Y-محور پر عمود کھینچ کر اوپر کے مطابق عمل کر کے ہم  $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$  حاصل کر سکتے ہیں۔

$\therefore$  نقطہ  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  کو ملانے والا قطعہ AB کو  $m : n$  کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین

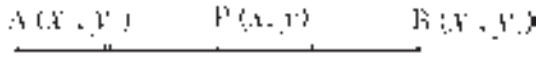
$$\left( \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \right)$$

ہوتے ہیں۔

قطعہ خط کے وسطی نقطے کا ضابطہ

نقاط  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  میں نقطہ  $P(x, y)$  قطعہ  $AB$  کا وسطی نقطہ ہو تو،  $m = n$

اب حصے کے ضابطے کی رو سے  $x$  اور  $y$  کی قیمتیں لکھیں گے۔



شکل 5.14

$$\begin{aligned} x &= \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \\ &= \frac{mx_2 + nx_1}{2m} \quad \dots (\because m = n) \\ &= \frac{m(x_2 + x_1)}{2m} \\ &= \frac{x_2 + x_1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \\ &= \frac{my_2 + ny_1}{2m} \quad \dots (\because m = n) \\ &= \frac{m(y_2 + y_1)}{2m} \\ &= \frac{y_2 + y_1}{2} \end{aligned}$$

∴ نقطہ  $P$  کے محددین  $\left| \frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right|$  ہیں۔ اسی کو وسطی نقطے کے محددین کا ضابطہ کہتے ہیں۔

ہم نے گذشتہ جماعت میں دکھایا ہے کہ دو ناطق اعداد  $a$  اور  $b$  کو عددی خط پر ظاہر کر کے اور انہیں ملانے والے قطعات کا  $\frac{a+b}{2}$  وسطی نقطہ ہوتا ہے۔ وہ نتیجہ یعنی ابھی ہمیں حاصل ہوئے ضابطے کی مخصوص قسم ہے۔ اسے ذہن نشین کر لیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : اگر  $A(3, 5)$ ،  $B(7, 9)$  اور نقطہ  $Q$  قطعہ  $AB$  کو  $2 : 3$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو نقطہ 'Q' کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی مثال میں فرض کیجیے،

اور  $(x_1, y_1) = (3, 5)$

$(x_2, y_2) = (7, 9)$

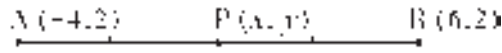
اسی طرح،  $m : n = 2 : 3$

قطعہ خط کے وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 3}{2+3} = \frac{23}{5} \quad \text{اور} \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2 \times 9 + 3 \times 5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

∴ نقطہ  $Q$  کے محددین  $\left| \frac{23}{5}, \frac{33}{5} \right|$

مثال (2) : اگر  $A(-4, 2)$ ،  $B(6, 2)$  اس قطعہ کا وسطی نقطہ  $P$  ہو تو نقطہ  $P$  کے محددین معلوم کیجیے۔  
حل : شکل 5.15 کی مثال میں،



شکل 5.15

فرض کیجیے نقطہ  $P$  کے محددین  $(x, y)$  ہیں اور  $(-4, 2) = (x_1, y_1)$ ،  $(6, 2) = (x_2, y_2)$  وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

وسطی نقطہ  $P$  کے محددین  $(1, 2)$  ہوں گے۔

آئیے ذرا یاد کریں



ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے وسطانیہ متراکز ہوتے ہیں۔

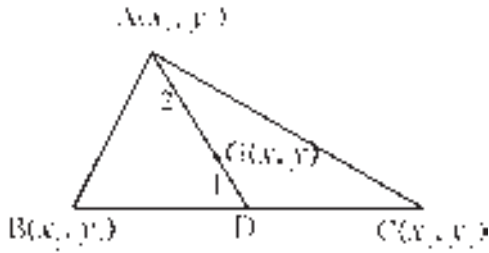
نقطہ تراکز (Centroid) یعنی ہندسی مرکز وسطانیہ کو  $2 : 1$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آئیے سمجھ لیں



ہندسی مرکز کا ضابطہ (Centroid Formula)

مثلث کے تینوں راس کے محددین دیے ہوئے ہوں تو، حصے کے ضابطے کا استعمال کر کے ہندسی مرکز کے محددین کس طرح معلوم کریں گے، آئیے دیکھتے ہیں۔



شکل 5.16

فرض کیجیے  $A(x_1, y_1)$ ،  $B(x_2, y_2)$ ،  $C(x_3, y_3)$

$\triangle ABC$  کے راس ہیں۔ اور  $\triangle ABC$  کا وسطانیہ قطعہ  $AD$

ہے۔ نقطہ  $G(x, y)$  اس مثلث کا ہندسی مرکز ہے۔

نقطہ  $D$  قطعہ  $BC$  کا وسطی نقطہ ہے۔

اس لیے نقطہ D کے محددین،

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \dots \text{ (قطعہ کے وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے) } \dots$$

یہاں،  $\triangle ABC$  کا ہندسی مرکز نقطہ  $G(x, y)$  ہے۔

$$\therefore AG : GD = 2 : 1$$

$\therefore$  قطعہ خط کے حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \cdot x_1}{2 + 1} = \frac{2x_2 + 2x_3 + x_1}{3} = \frac{2x_2 + 2x_3 + x_1}{3}$$

$$y = \frac{2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} + 1 \cdot y_1}{2 + 1} = \frac{2y_2 + 2y_3 + y_1}{3} = \frac{2y_2 + 2y_3 + y_1}{3}$$

یعنی  $(x_1, y_1)$ ،  $(x_2, y_2)$ ،  $(x_3, y_3)$  راس والے مثلث کے ہندسی مرکز کے محددین  $\frac{2x_2 + 2x_3 + x_1}{3}$ ،  $\frac{2y_2 + 2y_3 + y_1}{3}$  ہیں۔

اسے ہی ہندسی مرکز کا ضابطہ کہتے ہیں۔

اسے ذہن نشین کر لیں



● حصے کا ضابطہ :

$(x_1, y_1)$ ،  $(x_2, y_2)$  ان دو متفرق نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو  $m : n$  کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطے کے محددین

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \text{ ہیں۔}$$

● وسطی نقطے کا ضابطہ :

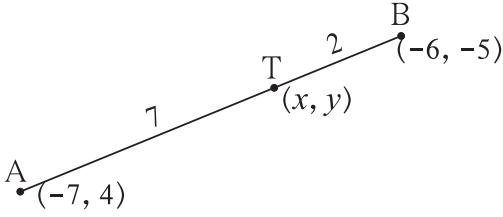
$(x_1, y_1)$ ،  $(x_2, y_2)$  ان دو متفرق نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کے وسطی نقطے کے محددین  $\left| \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right|$  ہیں۔

● ہندسی مرکز کا ضابطہ :

$$\frac{2x_2 + 2x_3 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + 2y_3 + y_1}{3} \text{ یہ مثلث کے راس کے محددین ہیں۔ تو ہندسی مرکز کے محددین}$$

ہیں۔

مثال (1) : A(-7, 4) اور B(-6, -5) ہے۔ نقطہ T قطعہ AB کو 7 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ تو نقطہ T کے محددین معلوم کیجیے۔



شکل 5.17

حل : فرض کیجیے T کے محددین (x, y) ہیں۔

∴ قطعہ خط کی حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7 \times (-6) + 2 \times (-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42 - 14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7 \times (-5) + 2 \times (4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35 + 8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

نقطہ T کے محددین  $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$  ہیں۔

مثال (2) : A(-6, 10) اور B(r, s) ان کو جوڑنے والے قطعہ خط کو P(-4, 6) کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے، تو نقطہ B کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : قطعہ خط کی حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$6 = \frac{2 \times s + 1 \times 10}{2 + 1}$$

$$\therefore 6 = \frac{2s + 10}{3}$$

$$\therefore 18 = 2s + 10$$

$$\therefore 2s = 8$$

$$\therefore s = 4$$

$$-4 = \frac{2 \times r + 1 \times (-6)}{2 + 1}$$

$$\therefore -4 = \frac{2r - 6}{3}$$

$$\therefore -12 = 2r - 6$$

$$\therefore 2r = -6$$

$$\therefore r = -3$$

∴ نقطہ B کے محددین (-3, 4) ہیں۔

مثال (3) : معلوم کیجیے کہ A(15, 5)، B(9, 20) اور P(11, 15) اس طرح ہیں کہ A-P-B، تو قطعہ AB کو نقطہ P کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل : فرض کیجیے نقطہ P(11, 15) قطعہ AB کو m : n کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

∴ حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$$

$$\therefore 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore 2m = 4n$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

∴ تقسیم کی نسبت 2 : 1 ہے۔

اسی طرح Y-محددین کی قیمت رکھ کر حاصل ہونے والی نسبت کیا آئے گی؟ اسے معلوم کیجیے۔ اپنا نتیجہ لکھیے۔

مثال (4) : نقطہ A(2, -2) اور B(-7, 4) ان کو جوڑنے والے قطعہ خط کو ثلاثی تقسیم کار نقاط کے محدودین معلوم کیجیے۔

(قطعہ خط کو جو دو نقاط، اس قطعہ خط کے تین مساوی حصے کرتے ہیں۔ ان نقاط کو اس قطعہ خط کے ثلاثی تقسیم کار نقاط کہتے ہیں)

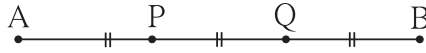
حل : فرض کیجیے۔ نقاط P اور Q نقاط A اور B کو جوڑنے والے قطعہ خط AB کے ثلاثی تقسیم کار نقاط ہیں۔ یعنی نقطہ P اور نقطہ Q

کی وجہ سے قطعہ AB کے تین مساوی حصے ہوتے ہیں۔

$$AP = PQ = QB \quad \dots (I)$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$$

نقطہ P قطعہ AB کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل 5.18

$$\frac{1 \times (-7) + 2 \times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

اس طرح نقطہ Q قطعہ AB کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ یعنی  $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

$$\frac{2 \times (-7) + 1 \times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

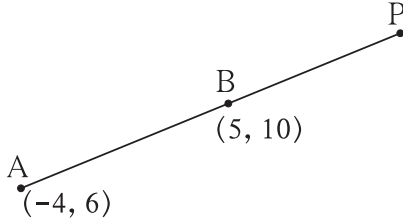
$$\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

∴ قطعہ خط کے ثلاثی تقسیم کار نقاط کے محدودین (-1, 0) اور (-4, 2) ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

آئیے دیکھتے ہیں کہ دو نقاط A اور B کو جوڑنے والے قطعہ خط کی خارجی تقسیم کیسے کی جاتی ہے۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ A(-4, 6) ، B(5, 10) اس طرح دو نقاط ہوں تو قطعہ خط AB کی 3 : 1 کی نسبت میں خارجی تقسیم کرنے والے نقطہ P کی محددین کس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔



شکل 5.19

یعنی  $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$  کی بہ نسبت بڑا ہے اور A-B-P ہے۔

یعنی  $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$  یعنی  $AP = 3k$  ،  $BP = k$  تب  $AB = 2k$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$

اب نقطہ B قطعہ خط AP کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

A اور B کے محددین دیے ہوں تو P کے محددین معلوم کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

## مشقی سیٹ 5.2

1. اگر نقطہ P، A(-1, 7) اور B(4, -3) کو ملانے والے قطعہ خط کو 3 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو نقطہ P کے محددین معلوم کیجیے۔

2. ذیل کی ہر مثال میں قطعہ PQ کو a : b کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ A کے محددین معلوم کیجیے۔

(1) P(-3, 7), Q(1, -4), a : b = 2 : 1

(2) P(-2, -5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4

(3) P(2, 6), Q(-4, 1), a : b = 1 : 2

3. P-T-Q ہو تو نقطہ P(-3, 10) اور نقطہ Q(6, -8) کو ملانے والے قطعہ خط کو نقطہ T(-1, 6) کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے ؟

4. دائرے کا قطر قطعہ AB ہے اور نقطہ P دائرے کا مرکز ہے۔ A(2, -3) اور P(-2, 0) ہو تو نقطہ B کے محددین معلوم کیجیے۔

5. نقطہ A(8, 9) اور B(1, 2) کو ملانے والے قطعہ AB کو نقطہ P(k, 7) کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے، معلوم کیجیے اور k کی قیمت بھی معلوم کیجیے۔

6. (22, 20) اور (0, 16) ان کو ملانے والے قطعہ خط کے وسطی نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

7. درج ذیل مثلث کے اس میں ہر مثلث کے ہندسی مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

(1) (-7, 6), (2, -2), (8, 5)

(2) (3, -5), (4, 3), (11, -4)

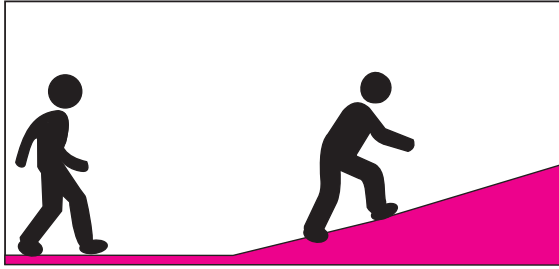
(3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8.  $\triangle ABC$  کا ہندسی مرکز  $G(-4, -7)$  ہے  $A(-14, -19)$ ،  $B(3, 5)$  ہے تو نقطہ  $C$  کے محددین معلوم کیجیے۔
9. ہندسی مرکز  $(1, 5)$  والے مثلث کے  $(h, -6)$ ،  $(2, 3)$  اور  $(-6, k)$  راس ہیں تو  $h$  اور  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔
10. نقطہ  $A(2, 7)$  اور  $B(-4, -8)$  کو ملانے والے قطعہ  $AB$  کے تقسیم ثلثائی کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔
11.  $A(-14, -10)$ ،  $B(6, -2)$  والے قطعہ  $AB$  کے چار متماثل قطعات میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔
12.  $A(20, 10)$ ،  $B(0, 20)$  والے قطعہ  $AB$  کے پانچ متماثل قطعات میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

آئیے سمجھ لیں

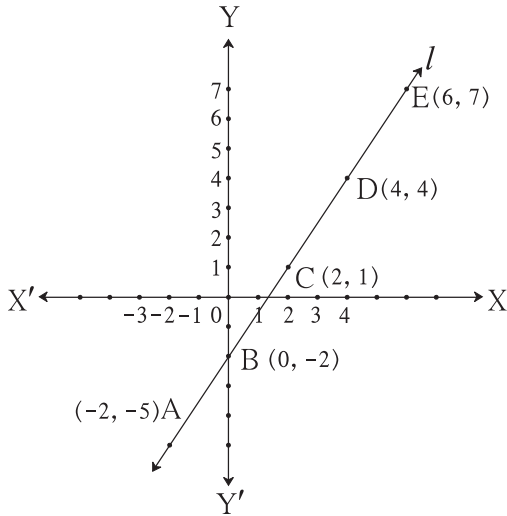


خط کا ڈھلان (Slope of Line)



ہم سائنس میں پڑھ چکے ہیں کہ جب ہم ہموار زمین پر چلتے ہیں تب محنت و مشقت اٹھانی پڑتی۔ چڑھائی (ڈھلان) پر چڑھتے وقت کچھ محنت و طاقت کی ضرورت پیش آتی ہے۔ انسان کا دم بھر جاتا ہے۔ چڑھائی پر چڑھتے وقت کشش ثقل کی قوت کے مخالف سمت میں کام کرنا پڑتا ہے۔

مستوی محددی علم ہندسہ میں خط کی ڈھلان کا بھی ایک اہم تصور ہے۔ ذیل میں دیے ہوئے عملی کام کے ذریعے اس تصور کو سمجھیں گے۔



شکل 5.20

عملی کام (I) : متصلہ شکل میں  $A(-2, -5)$ ،  $B(0, -2)$ ،

$C(2, 1)$ ،  $D(4, 4)$ ،  $E(6, 7)$  کے نقاط ہیں۔

ان محددین کا استعمال کر کے بننے والی درج ذیل جدول کا مشاہدہ

کیجیے۔

نمبر شمار	پہلا نقطہ	دوسرا نقطہ	پہلے نقطے کے محددین ( $x_1, y_1$ )	دوسرے نقطے کے محددین ( $x_2, y_2$ )	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

جدول کے باقی خانوں کو پر کر کے جدول مکمل کیجیے۔ اسی طرح خط  $l$  پر واقع مزید نقاط کی کچھ جوڑیاں لیجیے اور ہر جوڑی کے لیے  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نسبت معلوم کیجیے۔

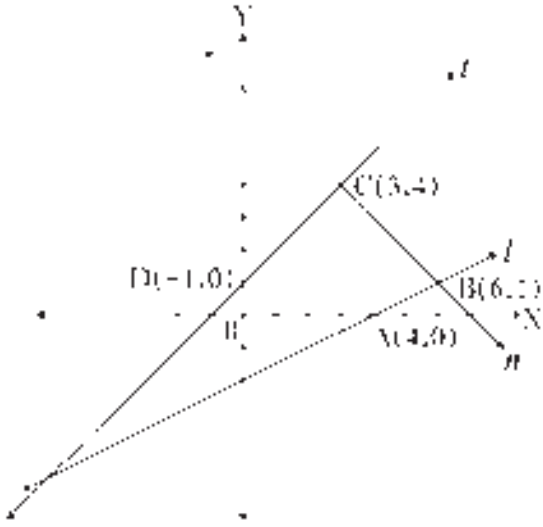
اس عملی کام سے پتا چلتا ہے کہ خط  $l$  کے  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  ایسے کوئی دو نقاط کے لیے  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  نسبت مستقل ہوتی ہے۔

خط  $l$  کے  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  ایسے کوئی بھی دو نقاط ہوں تو  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  نسبت کو خط  $l$  کی ڈھلان کہتے ہیں۔

خط کی ڈھلان کو عام طور پر حرف  $m$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## عملی کام (II) :



شکل 5.21

متصلہ شکل 5.21 میں خطوط  $l$ ،  $t$  اور  $n$  ہیں اور ان پر کچھ نقاط دیے ہوئے ہیں۔ اس کی مدد سے ان خطوط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

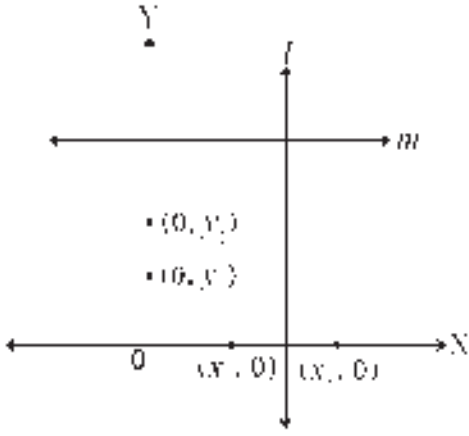
آپ کو پتا چلے گا کہ

- (1) خط  $l$  اور خط  $t$  ان دونوں کی ڈھلان مثبت ہیں۔
- (2) خط  $n$  کی ڈھلان منفی ہے۔
- (3) خط  $t$  کی ڈھلان، خط  $l$  کی ڈھلان کی بہ نسبت زیادہ ہے۔
- (4)  $X$ -محور کے مثبت سمت حادہ زاویہ بنانے والے  $l$  اور  $t$  خطوط کی ڈھلان مثبت ہیں۔

- (5)  $X$ -محور کے مثبت سمت منفرجہ زاویہ بنانے والے خط  $n$  کی ڈھلان منفی

ہے۔

$X$ -محور،  $Y$ -محور اور محوروں کے متوازی خطوط کی ڈھلان



شکل 5.22

شکل 5.22 میں  $(x_1, 0)$  اور  $(x_2, 0)$  یہ  $X$ -محور پر واقع دو نقاط ہیں۔

$$X\text{-محور کی ڈھلان} = \frac{0 - 0}{x_2 - x_1} = 0$$

اسی طرح  $(0, y_1)$  اور  $(0, y_2)$   $Y$ -محور پر واقع دو نقاط ہیں۔

$$Y\text{-محور کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{0 - 0} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$

لیکن 0 سے تقسیم نہیں کی جاسکتی، اس  $Y$ -محور کی ڈھلان طے نہیں کیا جاسکتا۔

اسی طرح خط  $m$  کے جیسے  $X$ -محور کے متوازی کوئی بھی خط کی ڈھلان معلوم

کر کے دیکھتے ہیں۔ وہ صفر آئے گی۔ اسی طرح ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ جیسے

$Y$ -محور کے متوازی خط کی ڈھلان طے نہیں کی جاسکتی۔

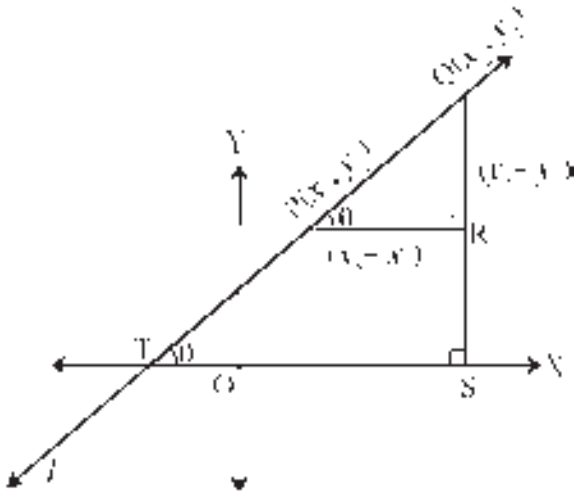
خط کی ڈھلان - علم مثلث کی مثلثاتی نسبت کا استعمال کر کے

شکل 5.23 میں  $P(x_1, y_1)$  اور  $Q(x_2, y_2)$  یہ خط  $l$  پر واقع دو نقاط ہیں۔ خط  $l$  یہ  $X$ -محور کو نقطہ  $T$  پر قطع کرتا ہے۔

$X$ -محور  $QS \perp$  قطعہ،  $QS \perp$  قطعہ  $PR \perp$  قطعہ،

(نظیری زاویوں کی آزمائش) ...  $TS \perp$  قطعہ  $PR \perp$  قطعہ  $\therefore$

$$QR = y_2 - y_1 \text{ اور } PR = x_2 - x_1$$



شکل 5.23

$$\therefore \frac{QR}{PR} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \quad \dots (I)$$

خط  $TQ$ ،  $X$ -محور سے  $\theta$  زاویہ بناتا ہے۔

$$\therefore \frac{QR}{PR} = \tan(\theta) \quad \dots (II)$$

$$\frac{1}{\frac{x_1 - x}{y_1 - y}} = \tan(\theta) \quad \dots [ \text{سے (II) اور (I)} ]$$

$$\therefore m = \tan(\theta)$$

اب،  $TS$  قطعہ  $\parallel$   $PR$  قطعہ اور خط  $l$  تقاطع ہے۔

$$\therefore \angle QPR = \angle QTS \quad \dots (\text{نظیری زاویے})$$

اس بنا پر خط کے ذریعے  $X$ -محور کے مثبت سمت بنائے گئے زاویے کی

$\tan$  نسبت یعنی اس خط کی ڈھلان ہے۔ اس طرح بھی ڈھلان کی

تعریف کی جاسکتی ہے۔

دو خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں تب وہ خطوط  $X$ -محور کے مثبت سمت میں ایک ہی زاویہ یا مساوی زاویہ بناتے ہیں۔

$\therefore$  وہ دونوں متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی خطوط کی ڈھلان (Slope of parallel lines) :

عملی کام :

شکل 5.24 میں، خط  $l$  اور خط  $t$  یہ دونوں خطوط  $X$ -محور کے مثبت سمت زاویہ  $\theta$  بناتے ہیں۔

$\therefore$  خط  $l \parallel$  خط  $t$  ... (نظیری زاویوں کی آزمائش)

خط  $l$  پر نقطہ  $A(-3, 0)$  اور نقطہ  $B(0, 3)$

پر غور کیجیے۔ خط  $AB$  کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

$$\text{خط } AB \text{ کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}}} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$$

$$= \frac{\boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}}} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$$

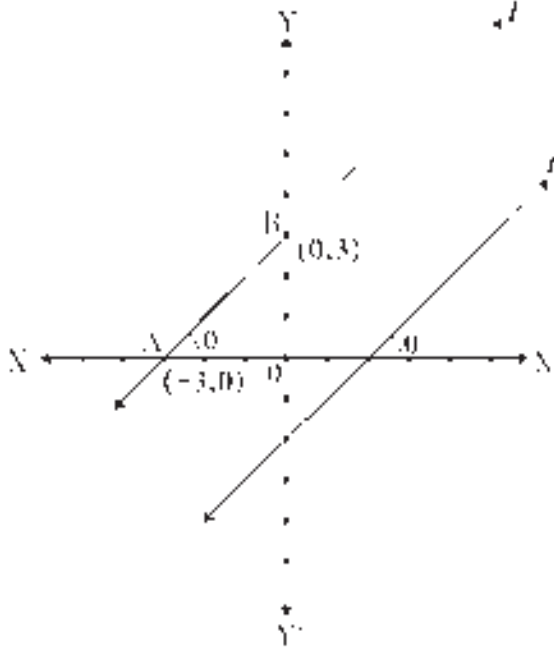
$$= \boxed{\phantom{00}}$$

اسی طرح  $t$  پر اپنی سہولت کے مطابق نقاط لے کر اس کی ڈھلان معلوم

کیجیے۔ اس بناء پر متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔ اس

کی تصدیق آپ کر سکتے ہیں۔

یہاں پر  $\theta = 45^\circ$  ہے۔



شکل 5.24

ڈھلان  $m = \tan \theta$  کا استعمال کر کے متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔  
اسی طرح  $\theta = 30^\circ$ ،  $\theta = 60^\circ$  لے کر متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

اسے ذہن نشین کر لیں



شکل میں X-محور کے یا X-محور کے متوازی خطوط کی ڈھلان صفر ہوتی ہیں۔  
Y-محور یا Y-محور کے متوازی خط کی ڈھلان طے نہیں کی جاسکتی۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1): A(-3, 5) اور B(4, -1) ان نقاط سے گزرنے والے خط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے۔  $x_1 = -3$ ،  $x_2 = 4$ ،  $y_1 = 5$ ،  $y_2 = -1$

$$\therefore \text{خط AB کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 5}{4 - (-3)} = \frac{-6}{7}$$

مثال (2): P(-2, 3)، Q(1, 2)، R(4, 1) ان نقاط کو ہم خطی بتائیے۔

حل : P(-2, 3)، Q(1, 2)، R(4, 1)

$$\text{خط PQ کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 3}{1 - (-2)} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{خط QR کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{4 - 1} = \frac{-1}{3}$$

خط PQ اور QR کی ڈھلان مساوی ہے۔

لیکن نقطہ Q دونوں خطوط پر واقع ہے۔

$\therefore$  نقاط P، Q، R ہم خطی ہیں۔

مثال (3): اگر P(k, 0) اور Q(-3, -2) ان دونوں کو ملانے والے خط کی ڈھلان  $\frac{2}{3}$  ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : P(k, 0)، Q(-3, -2)

$$\text{خط PQ کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{-3 - k} = \frac{2}{3 + k}$$

خط PQ کی ڈھلان  $\frac{2}{3}$  دی ہوئی ہے۔

$$\therefore \frac{2}{3 + k} = \frac{2}{3} \quad \therefore k = 4$$

مثال (4) : A(6,1)، B(8,2)، C(9,4)، D(7,3) یہ □ABCD کے راس ہیں تو دکھائیے □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

حل : آپ کو معلوم ہے کہ

$$\text{خط کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{خط AB کی ڈھلان} = \frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{(I)}$$

$$\text{خط BC کی ڈھلان} = \frac{4-2}{9-8} = 2 \quad \dots \text{(II)}$$

$$\text{خط CD کی ڈھلان} = \frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{(III)}$$

$$\text{خط DA کی ڈھلان} = \frac{3-1}{7-6} = 2 \quad \dots \text{(IV)}$$

$$\text{خط CD کی ڈھلان} = \text{خط AB کی ڈھلان} \quad \dots \text{[سے (III) اور (I)]}$$

$$\therefore \text{خط AB} \parallel \text{خط CD}$$

$$\text{خط DA کی ڈھلان} = \text{خط BC کی ڈھلان} \quad \dots \text{[سے (IV) اور (II)]}$$

$$\therefore \text{خط BC} \parallel \text{خط DA}$$

یعنی ذواربعیۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔  
 $\therefore$  □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

### مشقی سیٹ 5.3

1. ذیل میں خط کے ذریعے X-محور کی مثبت سمت بنائے گئے زاویے دیے ہوئے ہیں، اس کی مدد سے اس خط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

$$90^\circ \quad (1) \quad 60^\circ \quad (2) \quad 45^\circ \quad (3)$$

2. ذیل میں دیے ہوئے نقاط سے گزرنے والے خطوط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

$$(1) \quad A(2, 3) \text{ اور } B(4, 7) \quad (2) \quad P(-3, 1) \text{ اور } Q(5, -2)$$

$$(3) \quad C(5, -2) \text{ اور } D(7, 3) \quad (4) \quad L(-2, -3) \text{ اور } M(-6, -8)$$

$$(5) \quad E(-4, -2) \text{ اور } F(6, 3) \quad (6) \quad T(0, -3) \text{ اور } S(0, 4)$$

3. ذیل میں دیے ہوئے نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں، اسے طے کیجیے۔

$$(1) \quad A(-1, -1), \quad B(0, 1), \quad C(1, 3) \quad (2) \quad D(-2, -3), \quad E(1, 0), \quad F(2, 1)$$

$$(3) \quad L(2, 5), \quad M(3, 3), \quad N(5, 1) \quad (4) \quad P(2, -5), \quad Q(1, -3), \quad R(-2, 3)$$

$$(5) \quad R(1, -4), \quad S(-2, 2), \quad T(-3, 4) \quad (6) \quad A(-4, 4), \quad K(-2, \frac{5}{2}), \quad N(4, -2)$$

4. یہ مثلث کے راس ہیں تو ہر ضلع کی ڈھلان معلوم کیجیے۔  $C(-5, 3)$ ،  $B(0, 4)$ ،  $A(1, -1)$
5.  $D(5, -4)$  اور  $C(8, 5)$ ،  $B(-1, 2)$ ،  $A(-4, -7)$  دکھائیے کہ یہ متوازی الاضلاع ABCD کے راس ہیں۔
6. ہے اور خط RS کی ڈھلان -2 ہو تو  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔  $S(-2, k)$ ،  $R(1, -1)$
7. اور خط BC کی ڈھلان 7 ہو تو  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔  $C(1, 2)$ ،  $B(k, -5)$
8. ہے اور خط PQ، خط RS کے متوازی ہے تو  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔  $S(5, k)$  اور  $R(3, 1)$ ،  $Q(3, 6)$ ،  $P(2, 4)$

### مجموعہ سوالات 5

1. درج ذیل سوالوں کے تبدلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کر کے خالی جگہ پر کیجیے۔
- (1) قطعہ AB، Y-محور کے متوازی ہے۔ نقطہ A کے محددین (1, 3) ہیں تو نقطہ B کے محددین ..... ہوں گے۔  
 (A) (3,1) (B) (5,3) (C) (3,0) (D) (1,-3)
- (2) درج ذیل میں سے نقطہ ..... X-محور پر مبدا کے دائیں سمت میں واقع ہے۔  
 (A) (-2,0) (B) (0,2) (C) (2,3) (D) (2,0)
- (3) (-3, 4) اس نقطہ کا مبدا سے فاصلہ ..... ہے۔  
 (A) 7 (B) 1 (C) 5 (D) -5
- (4) ایک خط X-محور سے مثبت سمت میں  $30^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے، تو اس خط کی ڈھلان ..... ہے۔  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (D)  $\sqrt{3}$
2. ذیل کے نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں طے کیجیے۔
- (1)  $A(0, 2)$ ،  $B(1, -0.5)$ ،  $C(2, -3)$
- (2)  $P(1, 2)$ ،  $Q(2, \frac{2}{3})$ ،  $R(3, \frac{4}{3})$
- (3)  $L(1, 2)$ ،  $M(5, 3)$ ،  $N(8, 6)$
3. نقاط کو ملانے والے قطعہ کے وسطی نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔  $Q(12, 20)$  اور  $P(0, 6)$
4. ان نقاط کو ملانے والا قطعہ Y-محور کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔  $B(-9, 3)$  اور  $A(3, 8)$
5. X-محور پر ایسا نقطہ لیجیے کہ جو  $P(2, -5)$  اور  $Q(-2, 9)$  سے ہم فاصلہ ہے۔
6. ذیل کے نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔  
 (1)  $A(x, 0)$ ،  $B(0, y)$  (2)  $P(-6, -3)$ ،  $Q(-1, 9)$  (3)  $R(-3x, y)$ ،  $S(x, -2y)$
7. ایک مثلث کے راس  $A(-3, 1)$ ،  $B(0, -2)$  اور  $C(1, 3)$  ہیں۔ تو اس مثلث کا احاطہ مرکز معلوم کیجیے۔

8. کیا ذیل کے نقاط کو ملانے والے قطعات مثلث بنا سکیں گے؟ مثلث بن جانے پر اس کے اضلاع کی وجہ سے بننے والے مثلث کی قسم بتائیے۔

(1)  $L(6,4)$ ،  $M(-5,-3)$ ،  $N(-6,8)$

(2)  $P(-2,-6)$ ،  $Q(-4,-2)$ ،  $R(-5,0)$

(3)  $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ،  $B(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ ،  $C(\sqrt{6}, \sqrt{6})$

9. اگر  $P(-12, -3)$  اور  $Q(4, k)$  اس خط کی ڈھلان  $\frac{1}{2}$  ہے تو  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

10. اگر  $A(4, 8)$  اور  $B(5, 5)$  ان نقاط کو ملانے والا خط  $C(2, 4)$  اور  $D(1, 7)$  ان نقاط کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ اسے دکھائیے۔

11. دکھائیے کہ یہ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔  $S(-1, -5)$ ،  $R(3, -1)$ ،  $Q(5, 2)$ ،  $P(1, -2)$

12. اگر  $P(2, 1)$ ،  $Q(-1, 3)$ ،  $R(-5, -3)$  اور  $S(-2, -5)$  ہو تو دکھائیے کہ  $\square PQRS$  ایک مستطیل ہے۔

13. اگر  $A(-1, 1)$ ،  $B(5, -3)$ ،  $C(3, 5)$  راس والے مثلث کے وسطانیوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

14\*. اگر  $D(-7, 6)$ ،  $E(8, 5)$  اور  $F(2, -2)$  یہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط ہیں تو اس مثلث کے وسطانیوں کے ہندسی مرکز کے

محددین معلوم کیجیے۔

15. اگر  $A(4, -1)$ ،  $B(6, 0)$ ،  $C(7, -2)$  اور  $D(5, -3)$  تو دکھائیے کہ یہ مربع کے راس ہیں۔

16. اگر  $A(7, 1)$ ،  $B(3, 5)$  اور  $C(2, 0)$  راس والے مثلث کے حائل دائرہ کے مرکز کے محدودین اور حائل دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

17. اگر  $A(4, -3)$  اور  $B(8, 5)$  ہے تو قطعہ  $AB$  کے  $1:3$  کی نسبت میں حصہ کرنے والے نقطہ کے محدودین معلوم کیجیے۔

18\*. اگر  $A(-4, -2)$ ،  $B(-3, -7)$ ،  $C(3, -2)$  اور  $D(2, 3)$  ان نقاط کو ترتیب سے جوڑیں تو بننے والے ذواربعتہ الاضلاع  $ABCD$

کی قسم لکھیے۔

19. نقاط  $P$ ،  $Q$ ،  $R$  اور  $S$  کی وجہ سے قطعہ  $AB$  کو 5 متماثل قطعات میں تقسیم اس طرح ہوتی ہے۔ کہ  $A-P-Q-R-S-B$

اگر  $Q(12, 14)$  اور  $S(4, 18)$  ہے تو  $A$ ،  $P$ ،  $R$  اور  $B$  کے محدودین معلوم کیجیے۔

20. اگر  $P(6, -6)$ ،  $Q(3, -7)$  اور  $R(3, 3)$  ان نقاط سے گزرنے والے دائرہ کے محدودین معلوم کیجیے۔

21\*. متوازی الاضلاع کے تین راسوں کے محدودین  $A(5, 6)$ ،  $B(1, -2)$  اور  $C(3, -2)$  ہوں تو چوتھے نقطہ کے محدودین کی ممکن ہو تو تمام

جوڑیاں معلوم کیجیے۔

22. اگر  $A(1, 7)$ ،  $B(6, 3)$ ،  $C(0, -3)$  اور  $D(-3, 3)$  راسوں والا ایک ذواربعتہ الاضلاع ہے۔ اس ذواربعتہ الاضلاع کے ہر وتر کی

ڈھلان معلوم کیجیے۔

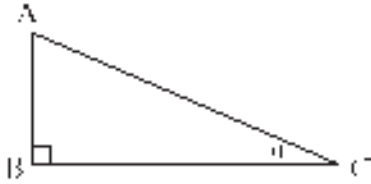


### آئیے سیکھیں



- مثلثیاتی نسبتیں
- مثلثیاتی متماثلہ مساوات
- صعودی زاویہ اور نزولی زاویہ
- اونچائی اور فاصلے پر مشتمل مثالیں

### آئیے ذرا یاد کریں



شکل 6.1

1. شکل 6.1 کی مدد سے خالی جگہ پر کیجیے۔

$$\sin \theta = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}, \quad \cos \theta = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}},$$

$$\tan \theta = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$$

2. ذیل کی نسبتوں کے تعلق کو مکمل کیجیے۔

(i)  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \boxed{\phantom{000}}$

(ii)  $\sin \theta = \cos (90 - \boxed{\phantom{000}})$

(iii)  $\cos \theta = \sin (90 - \boxed{\phantom{000}})$

(iv)  $\tan \theta \tan (90 - \theta) = \boxed{\phantom{000}}$

3. ذیل کی مساوات مکمل کیجیے۔

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \boxed{\phantom{000}}$$

4. ذیل کی مثلثیاتی نسبتوں کی قیمت لکھیے۔

(i)  $\sin 30^\circ = \frac{1}{\boxed{\phantom{000}}}$

(ii)  $\cos 30^\circ = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$

(iii)  $\tan 30^\circ = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$

(iv)  $\sin 60^\circ = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$

(v)  $\cos 45^\circ = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$

(vi)  $\tan 45^\circ = \boxed{\phantom{000}}$

ہم نویں جماعت میں حادہ زاویہ کی بعض مثلثیاتی نسبتوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس سال حادہ زاویہ کی مزید مثلثیاتی نسبتوں سے متعلق

مطالعہ کریں گے۔

## آئیے سمجھ لیں



cosec، sec اور cot نسبتیں (cosec, sec and cot ratios)

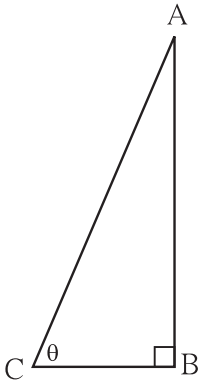
زاویہ کی sine نسبت کی معکوس نسبت کو cosecant نسبت کہتے ہیں۔ اس مختصراً cosec لکھتے ہیں۔

$$\therefore \text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

اسی طرح cosine اور tangent نسبتوں کی معکوس نسبتوں کو بالترتیب secant اور cotangent نسبتیں کہتے ہیں، اور اسے

مختصراً بالترتیب sec اور cot لکھتے ہیں۔

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ اور } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$



شکل 6.2

$$\cos \theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{BC}{AC}} \\ = \frac{AC}{BC}$$

لہذا،

$$\sec \theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصل ضلع}}$$

یہ تو آپ کو معلوم ہی ہے کہ،

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

شکل 6.2 میں،

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{AB}{AC}} \\ = \frac{AC}{AB}$$

لہذا،

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل کا ضلع}}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

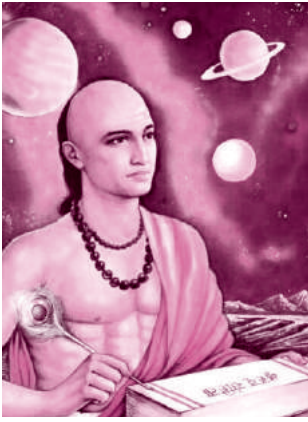
$$= \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{مقابل کا ضلع}}$$



مثالی نسبتوں میں ایک دوسرے سے تعلق cosec، sec اور cot ان نسبتوں کی تعریف کی بنا پر،

- $\frac{1}{\sin \theta} = \text{cosec } \theta$  ,  $\therefore \sin \theta \times \text{cosec } \theta = 1$
- $\frac{1}{\cos \theta} = \text{sec } \theta$  ,  $\therefore \cos \theta \times \text{sec } \theta = 1$
- $\frac{1}{\tan \theta} = \text{cot } \theta$  ,  $\therefore \tan \theta \times \text{cot } \theta = 1$



مزید معلومات کے لیے

عظیم بھارتی سائنس داں آریابھٹ کی پیدائش 476 عیسوی میں گُتم پور میں ہوئی۔ یہ مقام موجودہ ریاست بہار میں پٹنہ شہر کے قریب تھا۔ انھوں نے علم حساب، الجبرا اور علم ہندسہ، ریاضی کی شاخوں میں قابل ذکر کام کیا ہے۔ ’آریہ بھٹس‘ نامی کتاب میں کئی ریاضیاتی نتائج ضابطوں کی صورت میں لکھے ہوئے ہیں۔ مثلاً

(1) حسابی تصاعد میں  $n$  واں رکن معلوم کرنا اور پہلے  $n$  ارکان کی جمع کا ضابطہ

(2)  $\sqrt[n]{a}$  کی قیمت معلوم کرنے کا ضابطہ

(3) انھوں نے  $\pi$  عدد کی قیمت 3.1416 معلوم کی جو چار اعشاریہ مقام تک کی صحیح قیمت ہے۔ وغیرہ۔

علم فلکیات کے مطالعہ میں انھوں نے علم مثلث کا استعمال کیا اور ’جیانست‘ یعنی sine نسبت (sine ratio) کا تصور پہلی مرتبہ استعمال کیا۔

ریاضی کے علم کے بارے میں غور کریں تو انھوں نے اپنے زمانے میں ریاضی میں عظیم خدمات انجام دیں۔ اس وجہ سے ان کی کتاب کی ترسیل سارے بھارت میں ہوئی۔ اسی طرح عربوں کے توسط سے یہ یورپ میں بھی پہنچی۔

سورج زمین کے گرد گردش نہیں کرتا ہے بلکہ سورج کے گرد زمین گردش کرتی ہے۔ اس خیال کو سب سے پہلے کوپرنیکس نے پیش کیا، ایسا مانا جاتا ہے لیکن اس سے تقریباً 1000 سال قبل ’سورج زمین کے گرد گردش ہوا نظر آتا ہے، ایسا تصور کیا جاتا تھا۔‘ ایسا آریہ بھٹ نے اس کتاب میں واضح طور پر لکھا ہے۔

19 اپریل 1975 کے روز بھارت نے اپنا پہلا مصنوعی سیارچہ آسمان میں داغا۔ اس ذیلی سیارچہ کو ’آریابھٹ‘ نام دے کر ہمارے ملک نے عظیم ریاضی داں کو مناسب خراج تحسین پیش کی۔

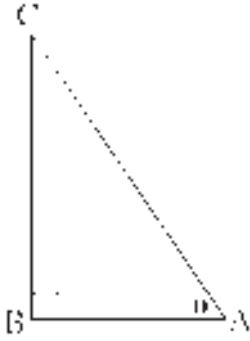
0°, 30°, 45°, 60° اور 90° پیمائش کے زاویوں کی مثلثاتی نسبتوں کی جدول

مثلثاتی نسبتیں	زاویوں کی پیمائش (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کر سکتے
$\frac{1}{\sin \theta}$	طے نہیں کر سکتے	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\frac{1}{\cos \theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	طے نہیں کر سکتے
$\frac{1}{\tan \theta}$	طے نہیں کر سکتے	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

آئیے سمجھ لیں



مثلثاتی متماثلہ مساواتیں (Trigonometrical identities) :



شکل 6.3

بازو کی شکل 6.3 میں،  $\triangle ABC$ ، قائمہ الزاویہ مثلث ہے جس میں  $\angle B = 90^\circ$

$$(i) \sin \theta = \frac{BC}{AC}$$

$$(ii) \cos \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$(iii) \tan \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$(iv) \operatorname{cosec} \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$(v) \sec \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$(vi) \cot \theta = \frac{AB}{BC}$$

اسی طرح فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \dots (I)$$

مساوات (I) کے طرفین کو  $AC^2$  سے تقسیم دینے پر

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\therefore \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$$

$$\therefore \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

[ہم  $(\sin\theta)^2$  کو  $\sin^2\theta$  اور  $(\cos\theta)^2$  کو  $\cos^2\theta$  لکھتے ہیں]

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \dots \text{(II)}$$

اب مساوات (II) کے طرفین کو  $\sin^2\theta$  سے تقسیم کرنے پر،

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \dots \text{(III)}$$

اسی طرح، مساوات (II) کے طرفین کو  $\cos^2\theta$  سے تقسیم کرنے پر،

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

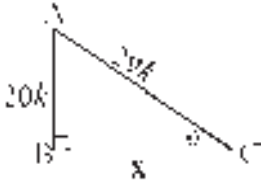
$$\therefore \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \dots \text{(IV)}$$

مساوات (I)، (II)، (III) اور (IV) یہ بنیادی مثلثاتی متماثلہ مساواتیں ہیں۔

### حل کردہ مثالیں

مثال (1): اگر  $\sin\theta = \frac{20}{29}$  ہو تو  $\cos\theta$  کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 6.4

طریقہ II

$$\sin\theta = \frac{20}{29}$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \quad \dots \text{(لیکن شکل 6.4 سے)}$$

$\therefore$  فرض کیجیے  $AB = 20k$ ،  $AC = 29k$  اور  $BC = x$

فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$$

$$400k^2 + x^2 = 841k^2$$

$$x^2 = 841k^2 - 400k^2$$

$$= 441k^2$$

$$\therefore x = 21k$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$$

حل : طریقہ I

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$$

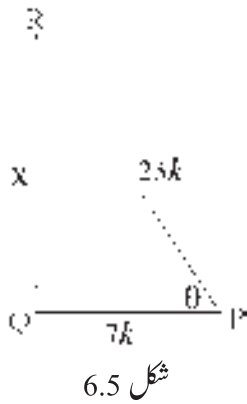
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$$

$$= \frac{441}{841}$$

طرفین کا جذر المربع لینے پر،

$$\therefore \cos\theta = \frac{21}{29}$$

مثال (2) : اگر  $\sec\theta = \frac{25}{7}$  ہو تو  $\tan\theta$  کی قیمت معلوم کیجیے۔



طریقہ II

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

فرض کیجیے،

$$QR = X \text{ اور } PQ = 7k, PR = 25k$$

فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore QR = 24k$$

جذرالمربع لینے پر،

$$\text{اب، } \tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$$

حل : طریقہ I

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

جذرالمربع لینے پر،

$$\therefore \tan\theta = \frac{24}{7}$$

مثال (3) : اگر  $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$  ہو تو  $\sec\theta$  اور  $\operatorname{cosec}\theta$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

$$\text{اب، } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$$

حل :  $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{12}{5}$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \frac{25 + 144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{13}{5}$$

مثال (4) : اگر  $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  تو  $\frac{1 - \sec\theta}{1 - \csc\theta}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ II

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{ (یہ ہم جانتے ہیں)} \\ \therefore \theta &= 30^\circ \\ \therefore \sec\theta &= \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \csc\theta &= \csc 30^\circ = 2 \\ \therefore \frac{1 - \sec\theta}{1 - \csc\theta} &= \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - 2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

حل : طریقہ I

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1 \\ \therefore \sin^2\theta &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ \therefore \sin\theta &= \frac{1}{2} \quad \therefore \csc\theta = 2 \\ \therefore \frac{1 - \sec\theta}{1 - \csc\theta} &= \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - 2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

مثال (5) : دکھائیے کہ  $\sec x + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\sqrt{1 - \sin x}}$

حل :

$$\begin{aligned}\sec x + \tan x &= \frac{1 + \sin x}{\cos x + \sin x} \\ &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \\ &= \frac{(1 + \sin x)}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \\ &= \frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{\sqrt{(1 - \sin^2 x)}} \\ &= \frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{\sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}} \\ &= \frac{1 + \sin x}{\sqrt{1 - \sin x}}\end{aligned}$$

مثال (6) : درج ذیل مساوات میں  $\theta$  کا اخراج کیجیے۔

$$x = a \cot \theta - b \operatorname{cosec} \theta$$

$$y = a \cot \theta + b \operatorname{cosec} \theta$$

$$x = a \cot \theta - b \operatorname{cosec} \theta \quad \dots \text{(I)}$$

$$y = a \cot \theta + b \operatorname{cosec} \theta \quad \dots \text{(II)}$$

مساوات (I) اور (II) دونوں کی جمع کرنے پر،

$$x + y = 2a \cot \theta$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{x + y}{2a} \quad \dots \text{(III)}$$

مساوات (II) سے (I) تفریق کرنے پر،

$$y - x = 2b \operatorname{cosec} \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{y - x}{2b} \quad \dots \text{(IV)}$$

$$\text{اب } \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\therefore \left( \frac{y - x}{2b} \right)^2 - \left( \frac{x + y}{2a} \right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y - x)^2}{4b^2} - \frac{(x + y)^2}{4a^2} = 1$$

$$\text{یا } \frac{(y - x)^2}{b^2} - \frac{(x + y)^2}{a^2} = 4$$

### مشقی سیٹ 6.1

1. اگر  $\sin \theta = \frac{7}{25}$  ہو تو  $\cos \theta$  اور  $\tan \theta$  کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

2. اگر  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  ہو تو  $\sec \theta$  اور  $\cos \theta$  کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

3. اگر  $\csc \theta = \frac{40}{9}$  ہو تو  $\operatorname{cosec} \theta$  اور  $\sin \theta$  کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

4. اگر  $5 \sec \theta - 12 \operatorname{cosec} \theta = 0$  ہو تو  $\sec \theta$ ،  $\cos \theta$  اور  $\sin \theta$  کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

5. اگر  $\tan \theta = 1$  ہو تو  $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

6. ثابت کیجیے کہ

(1)  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \sec \theta$

(2)  $\cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) = 1$

$$(3) \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \sec \theta - \tan \theta$$

$$(4) (\sec \theta + \cos \theta)(\cot \theta + \tan \theta) = \tan \theta \sec \theta$$

$$(5) \cot \theta + \tan \theta = \csc \theta \sec \theta$$

$$(6) \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = \sec \theta + \tan \theta$$

$$(7) \sec^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta$$

$$(8) \sec \theta + \tan \theta = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2 \text{ ہو تو دکھائیے کہ } \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2 \text{ اگر } (9)$$

$$(10) \frac{\tan A}{1 + \tan^2 A} + \frac{\cot A}{1 + \cot^2 A} = \sin A \cos A$$

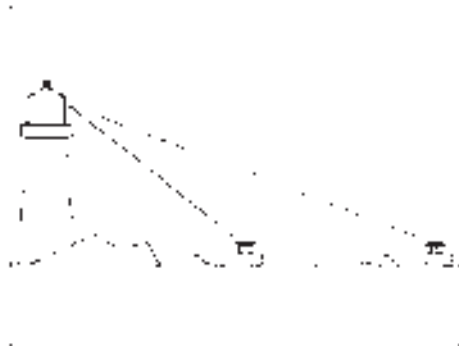
$$(11) \sec^2 A (1 - \sin^2 A) = 2 \tan^2 A - 1$$

$$(12) \frac{\tan \theta}{\sec \theta - 1} = \frac{\tan \theta + \sec \theta + 1}{\tan \theta + \sec \theta - 1}$$

آئیے سمجھ لیں



### علم مثلث کا اطلاقی (Application of Trigonometry)



شکل 6.6

بسا اوقات مینار کی بلندی، عمارت یا درخت کی اونچائی اسی طرح جہازوں کا روشنی کے مینار سے فاصلہ یا ندی کی پاٹ کی چوڑائی وغیرہ کی جانکاری کی ضرورت ہوتی ہے یہ فاصلے ہم عملی طور پر معلوم نہیں کر سکتے، لیکن مثلثاتی نسبتوں کا استعمال کر کے اونچائی یا فاصلے معلوم کر سکتے ہیں۔

اونچائی یا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے، دی ہوئی معلومات کے مطابق پہلے ہم

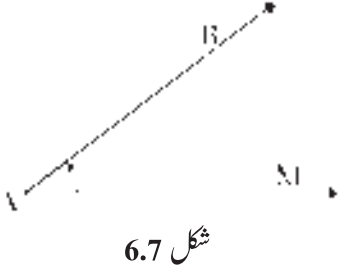
کچی شکل بناتے ہیں۔ درخت، ٹیکری، مینار وغیرہ جیسی اشیا زمین پر عموداً ایستادہ

ہوتی ہیں یہ دکھانے کے لیے ہم شکل میں عمودی قطعہ کا استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم ناظر کی اونچائی نظر انداز کر دیں گے۔ عام حالت

میں ایسا مان لیا جاتا ہے کہ ناظر کی نظر، افقی خط کے متوازی ہوتی ہے۔

اب ہم اس سے مربوط چند اصطلاحات کا مطالعہ کریں گے۔

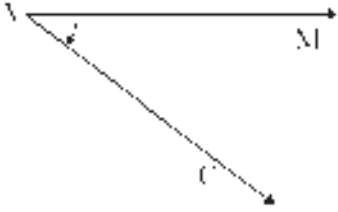
(i) بصری خط (Line of Vision) : اگر کوئی شخص نقطہ A کے مقام سے کسی جسم B کو دیکھتا ہے تب خط AB کو بصری خط کہتے ہیں۔



شکل 6.7

(ii) صعودی زاویہ یا زاویہ فراز (Angle of Elevation) :

خط AM ناظر کا بصری خط عام حالت میں، افقی خط کے متوازی ہوتا ہے۔ مشاہدہ کیا جانے والا نقطہ B، اگر A کی نسبت سے زیادہ اونچائی پر ہو تو، بصری خط AB یہ خط AM کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اسے صعودی زاویہ کہتے ہیں۔ شکل میں  $\angle MAB$  صعودی زاویہ ہے۔



شکل 6.8

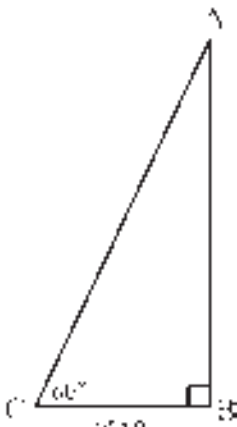
(iii) نزولی زاویہ یا نشیبی زاویہ (Angle of Depression) :

مشاہدہ کیا جانے والا نقطہ C اگر افقی خط AM سے نیچے کی جانب ہو تو بصری خط AC یہ خط AM کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اسے نزولی زاویہ کہتے ہیں۔ شکل میں  $\angle MAC$ ، نزولی زاویہ ہے۔

جب ہم افق کے متوازی خط سے اوپر کی جانب واقع کسی شے کو دیکھتے ہیں تو بننے والا زاویہ صعودی زاویہ ہوتا ہے۔ جب ہم افق کے متوازی خط سے نیچے کی جانب واقع کسی شے کو دیکھتے ہیں تو بننے والا زاویہ نزولی زاویہ ہوتا ہے۔

### حل کردہ مثالیں

مثال (1) : ایک درخت کے تنے سے 10 میٹر فاصلے پر کھڑے ہو کر ایک ناظر درخت کے اوپری سرے کو دیکھتا ہے تو  $60^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے تو درخت کی اونچائی کتنی ہے؟ ( $\sqrt{3} = 1.73$ ) شکل میں C نقطہ کے پاس ناظر ہے اور AB درخت ہے۔



شکل 6.9

حل : شکل 6.9 میں، درخت کی اونچائی  $AB = h$  قطعہ

میٹر  $BC = 10$  = ناظر کا درخت سے فاصلہ

$\theta = \angle BCA = 60^\circ$  = صعودی زاویہ

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} \quad \dots \text{ (شکل سے) } \dots \text{ (I)}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \dots \text{ (II)}$$

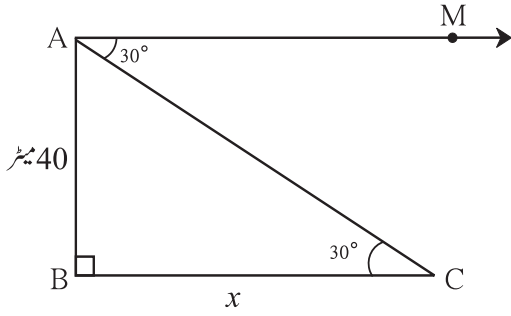
$$\therefore \frac{AB}{10} = \sqrt{3} \quad \dots \text{ [ (I) اور (II) سے ]}$$

$$\therefore AB = 10 \sqrt{3} = 10 \times 1.73$$

$$\therefore AB = 10 \times 1.73 = 17.3 \text{ میٹر}$$

اس لیے درخت کی اونچائی 17.3 میٹر ہے۔

مثال (2) : 40 میٹر بلند عمارت کی چھت سے، اس عمارت سے کچھ فاصلے پر کھڑے اسکوٹر کا مشاہدہ کرنے پر  $30^\circ$  کا نزولی زاویہ بنتا ہے۔ اسکوٹر عمارت سے کتنے فاصلے پر کھڑا ہے؟ ( $\sqrt{3} = 1.73$ )



شکل 6.10

حل : شکل 6.10 میں، قطعہ AB عمارت ظاہر کرتا ہے۔ عمارت سے 'x' میٹر فاصلے پر مقام 'C' پر اسکوٹر کھڑا ہے۔

شکل میں عمارت کی چھت کے مقام A پر ناظر کھڑا ہے۔ خط AM افق کے متوازی ہے  $\angle MAC$  نزولی زاویہ ہے۔  $\angle MAC$  اور  $\angle ACB$  متبادلہ زاویے ہیں اسے دھیان میں رکھیے۔

$$\therefore \triangle ABC \text{ میں، } \angle B = 90^\circ$$

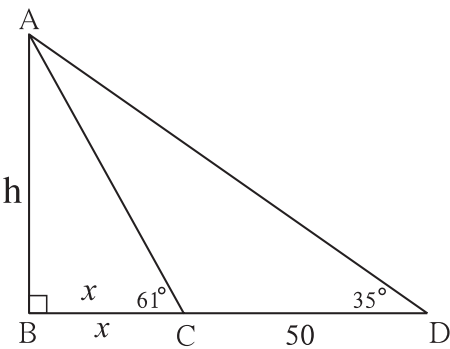
$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \quad \dots (\text{شکل کی بنا پر})$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 40\sqrt{3} \\ &= 40 \times 1.73 \\ &= 69.20 \text{ میٹر} \end{aligned}$$

$\therefore$  وہ اسکوٹر عمارت سے 69.20 میٹر فاصلے پر ہے۔

مثال (3) : ندی کے پاٹ کی چوڑائی معلوم کرنے کے لیے ایک شخص ندی کے ایک کنارے پر کھڑے ہو کر دوسرے کنارے پر موجود مینار کے اوپری سرے کو دیکھتا ہے تو  $61^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ اسی خط میں ندی کے پاٹ کے کنارے سے 50 میٹر فاصلے پیچھے جا کر مینار کے اوپری سرے کو دیکھنے پر  $35^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ ندی کی چوڑائی اور مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔ ( $\tan 61^\circ \approx 1.8$ ,  $\tan 35^\circ \approx 0.7$ )



شکل 6.11

حل : قطعہ AB کو مینار سے ظاہر کیا گیا ہے۔ 'A' مینار کا اوپری سر ہے قطعہ BC ندی کی چوڑائی ظاہر کرتا ہے۔ فرض کریں مینار کی اونچائی h میٹر اور ندی کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$$\tan 61^\circ = \frac{h}{x} \quad \dots (\text{شکل میں})$$

$$\therefore 1.8 = \frac{h}{x}$$

$$h = 1.8 \times x \quad \dots (I)$$

$$10h = 18x \quad \dots \text{(طرفین کو 10 سے ضرب کرنے پر)}$$

قائمہ الزاویہ میں  $\triangle ABD$  میں،

$$\text{اسی طرح , } \tan 35 = \frac{h}{x + 50}$$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$$\therefore 10h = 7(x + 50) \quad \dots (II)$$

(I) اور (II) سے،

$$18x = 7(x + 50)$$

$$\therefore 18x = 7x + 350$$

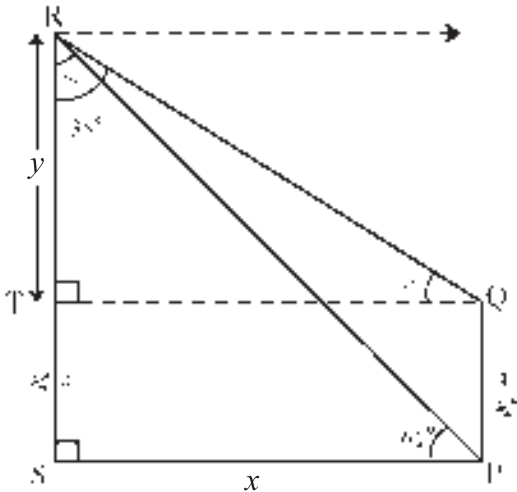
$$\therefore 11x = 350$$

$$\therefore x = \frac{350}{11} = 31.82$$

$$\text{اب } h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$$

$$= 57.28 \text{ میٹر}$$

$\therefore$  ندی کے پاٹ کی چوڑائی 31.82 میٹر اور مینار کی بلندی 57.28 میٹر



شکل 6.12

مثال (4) : جویریہ گھر کے دروازے میں کھڑی ہے۔ گھر سے کچھ فاصلے پر واقع

ایک درخت کے اوپر پیٹھی ہوئی چیل کو دیکھتی ہے تو  $61^\circ$  پیمائش کا

صعودی زاویہ بنتا ہے۔ چیل کو واضح طور پر دیکھنے کے لیے وہ گھر کی چھت

پر گئی جو 4 میٹر کی اونچائی پر ہے وہاں سے  $52^\circ$  پیمائش کا صعودی

زاویہ بنتا ہے۔ بتائیے وہ چیل زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔

(اپنا جواب مکمل صحیح عدد میں لکھیے)

$$(\tan 61^\circ = 1.80, \tan 52^\circ = 1.28, \tan 29^\circ = 0.55, \tan 38^\circ = 0.78)$$

حل : فرض کیجیے، شکل 6.10 میں، گھر PQ اور درخت SR ہے۔ اور چیل کا مقام نقطہ R ہے۔

RS قطعہ QT  $\perp$  قطعہ کیجیے۔

اس لیے  $\square$ TSPQ ایک مستطیل ہے۔

فرض کیجیے TR = y اور SP = x

اب  $\triangle$ RSP میں،  $\angle$ PRS =  $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

اسی طرح،  $\triangle$ RTQ میں،  $\angle$ QRT =  $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$$\therefore \text{tan } \angle \text{PRS} = \text{tan } 29^\circ = \frac{SP}{RS}$$

$$\therefore 0.55 = \frac{x}{y+4}$$

$$\therefore x = 0.55(y + 4) \quad \dots \text{(I)}$$

$$\text{اسی طرح، tan } \angle \text{QRT} = \frac{TQ}{RT}$$

$$\therefore \text{tan } 38^\circ = \frac{x}{y} \quad \dots [\because SP = TQ = x]$$

$$\therefore 0.78 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore x = 0.78y \quad \dots \text{(II)}$$

$$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4) \quad \dots \text{[ (I) اور (II) سے ]}$$

$$\therefore 78y = 55(y + 4)$$

$$\therefore 78y = 55y + 220$$

$$\therefore 23y = 220$$

$$\therefore y = 9.565 \approx 10 \quad \dots \text{(قریبی صحیح عدد میں)}$$

$$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$$

$\therefore$  چیل زمین سے 14 میٹر اونچائی پر تھی۔

مثال (5) : تیز طوفانی ہوا کی وجہ سے ایک درخت ٹوٹ گیا۔ اس کا اوپری سر از زمین سے  $30^\circ$  کا زاویہ بناتے ہوئے زمین سے ٹک گیا۔ اگر

درخت کے اوپری سرے اور اس کے تنے کے نچلے حصے کے درمیان کا فاصلہ 10 میٹر ہو تو درخت کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

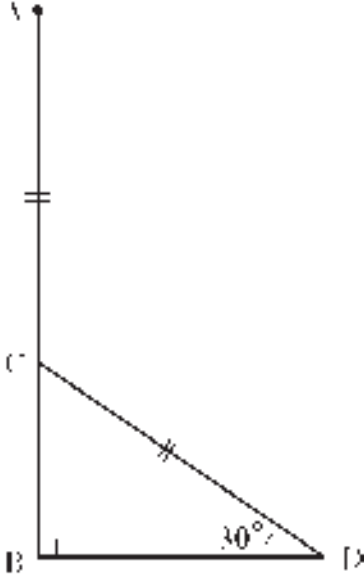
حل : فرض کیجیے کہ شکل 6.11 میں درخت AB کا اوپری سرا 'A' ہے۔ طوفانی ہوا کی وجہ سے درخت 'C' مقام سے ٹوٹ گیا اور 'D'

مقام پر ٹک گیا۔

$$\angle CDB = 30^\circ, BD = 10 \text{ میٹر}, BC = x \text{ میٹر}$$

$$CA = CD = y \text{ میٹر}$$

قائمہ الزاویہ  $\triangle CBD$  میں،



شکل 6.11

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

لہذا درخت کی کل اونچائی  $10\sqrt{3}$  میٹر ہے۔

## مشقی سیٹ 6.2

1. ایک شخص، ایک گرجا گھر سے 80 میٹر کے فاصلہ پر کھڑا ہے۔ وہ شخص گرجا گھر کی چھت کی جانب دیکھتا ہے تو  $45^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بناتا ہے۔ گرجا گھر کی اونچائی کتنی ہے؟
2. مینارہ نور سے ایک جہاز کو دیکھنے پر  $60^\circ$  پیمائش کا نزولی زاویہ بنتا ہے۔ اگر مینارہ نور کی بلندی 90 میٹر ہو تب وہ جہاز مینارہ نور سے کتنے فاصلے پر ہے؟ ( $\sqrt{3} = 1.732$ )
3. 12 میٹر چوڑے راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل دو عمارتیں ہیں۔ ان میں سے ایک عمارت کی بلندی 10 میٹر ہے۔ اس عمارت کی چھت پر سے دوسری عمارت کی چھت کو دیکھنے پر  $60^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ بتائیے کہ دوسری عمارت کی بلندی کتنی ہے؟
4. 18 میٹر اور 7 میٹر اونچائی کے دو ستون زمین پر نصب کیے گئے ہیں۔ 22 میٹر کے لمبے تار سے ستون کے اوپری سروں کو باندھ دیا گیا ہے۔ تار کے ذریعے افقی خط کے ساتھ بننے والا زاویہ معلوم کیجیے۔
5. طوفانی ہوا کے ذریعے ایک درخت ٹوٹ گیا۔ اس کا اوپری سر اتنے کے نچلے حصے سے 20 میٹر فاصلے پر سطح زمین سے  $60^\circ$  کا زاویہ بناتے ہوئے ٹکا ہوا ہے۔ درخت کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

6. سطح زمین سے 60 میٹر بلندی پر ایک پتنگ اڑ رہی ہے۔ پتنگ کی ڈور سطح زمین سے عارضی طور پر باندھ دی گئی۔ ڈور کا زمین کے ساتھ  $60^\circ$  کی پیمائش کا زاویہ بناتا ہے۔ ڈور کی لمبائی معلوم کیجیے یہ مانتے ہوئے کہ ڈور میں کسی قسم کا جھول نہیں ہے۔ ( $\sqrt{3} = 1.732$ )

### مجموعہ سوالات 6

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

$$\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = ? \quad (1)$$

- (A) 1    (B) 0    (C)  $\frac{1}{2}$     (D)  $\sqrt{2}$

- (2) بتائیے کہ  $\operatorname{cosec} 45^\circ$  کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

- (A)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$     (B)  $\sqrt{2}$     (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     (D)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$1 + \tan^2\theta = ? \quad (3)$$

- (A)  $\cot^2\theta$     (B)  $\operatorname{cosec}^2\theta$     (C)  $\sec^2\theta$     (D)  $\tan^2\theta$

- (4) جب ہم افقی خط کے اوپری سمت دیکھتے ہیں تب، ..... زاویہ بنتا ہے۔

- (A) صعودی زاویہ    (B) نزولی زاویہ    (C) صفر    (D) خطی

2. اگر  $\sec\theta = \frac{1}{\sin\theta}$  ہو تو متماثلہ مساوات کا استعمال کر کے  $\cos\theta$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

3. جب  $\tan\theta = 2$  ہو تو دیگر مثلثاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

4. اگر  $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$  ہو، تب دیگر مثلثاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

5. ثابت کیجیے کہ،

$$(1) \sec\theta (1 - \sin\theta) (\sec\theta + \tan\theta) = 1$$

$$(2) (\sec\theta + \tan\theta) (1 - \sin\theta) = \cos\theta$$

$$(3) \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$(4) \cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$$

$$(5) \tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$

$$(6) \frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2 \sec^2\theta$$

$$(7) \sec^6x - \tan^6x = 1 + 3\sec^2x \times \tan^2x$$

$$(8) \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = \frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta}$$

$$(9) \frac{\tan^3 \theta - 1}{\tan \theta - 1} = \sec^2 \theta + \tan \theta$$

$$(10) \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$

6. ایک لڑکا ایک عمارت سے 48 میٹر کے فاصلے پر کھڑا ہوا ہے۔ وہ عمارت کے اوپری سرے کو دیکھتے ہوئے  $30^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بناتا ہے تو اس عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔

7. مینارہ نور سے ایک جہاز کو دیکھنے پر، ناظر  $30^\circ$  پیمائش کا نزولی زاویہ بناتا ہے۔ اگر مینارہ نور کی اونچائی 100 میٹر ہو تب جہاز سے مینارہ نور کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

8. 15 میٹر چوڑے راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل دو عمارتیں ہیں۔ ان میں سے ایک عمارت کی بلندی 12 میٹر ہے۔ اس کی چھت سے دوسری عمارت کی چھت دیکھنے پر  $30^\circ$  پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ اس عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔

9. آگ بجھانے والی گاڑی پر نصب سیڑھی زیادہ سے زیادہ  $70^\circ$  پیمائش کے زاویہ میں اٹھائی جاسکتی ہے۔ اس وقت اس کی لمبائی زیادہ سے زیادہ 20 میٹر ہوتی ہے۔ سیڑھی کا گاڑی پر کاسرازمین سے 2 میٹر اونچائی پر ہے۔ تو سیڑھی کا دوسرا سرازمین سے زیادہ سے زیادہ کتنی اونچائی تک پہنچ سکتا ہے۔ ( $\sin 70 \approx 0.94$ )

10. آسمان میں پرواز کرتے ہوئے ہوائی جہاز کے پائلٹ نے ہوائی اڈے پر اترنا شروع کرتے وقت  $20^\circ$  پیمائش کا نزولی زاویہ بناتا ہے۔ تب ہوائی جہاز کی اوسط رفتار 200 کلومیٹر فی گھنٹا تھی۔ وہ ہوائی جہاز 54 سیکنڈ میں ہوائی اڈے پر اترتا ہے۔ ہوائی اڈے پر اترنا شروع کرنے کے وقت، وہ جس مقام پر تھا وہاں سے زمین سے کتنی اونچائی پر تھا؟ ( $\sin 20^\circ \approx 0.342$ )



آئیے سیکھیں




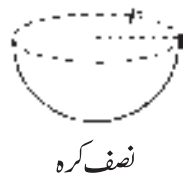
- مختلف مجسم اشکال کی سطحوں کا رقبہ اور حجم پر مشتمل مخلوط مثالیں
- دائرے کے تراشے کا رقبہ
- دائرے کا قوس - قوس کی لمبائی
- قطعہ دائرے کا رقبہ

آئیے ذرا یاد کریں

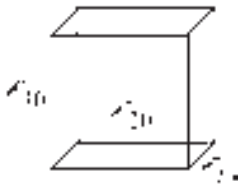


گذشتہ جماعتوں میں ہم نے بعض سہ ابعادی اشکال کی سطحوں کا رقبہ اور حجم کا مطالعہ کرچکے ہیں۔ اس کے لیے استعمال ہونے والے ضابطوں کا اعادہ کرتے ہیں۔

نمبر شمار	سہ ابعادی اشکال	ضابطے
1	 مکعب نما / مستطیلی منشور	عمودی سطحوں کا رقبہ = $2h(l + b)$ کل سطحوں کا رقبہ = $2(lb + bh + hl)$ مکعب نما کا حجم = $lbh$
2	 مکعب	مکعب کی عمودی سطحوں کا رقبہ = $4l^2$ مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ = $6l^2$ مکعب کا حجم = $l^3$
3	 مدور استوانہ	مدور استوانے کی خماری سطح کا رقبہ = $2\pi rh$ مدور استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ = $2\pi r(r + h)$ مدور استوانے کا حجم = $\pi r^2 h$
4	 مخروط	مخروط کی مائل بلندی $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$ مخروط کی خماری سطح کا رقبہ = $\pi rl$ مخروط کی کل سطحوں کا رقبہ = $\pi r(r + l)$ مخروط کا حجم = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

5		$4\pi r^2 =$ کرہ کی سطح کا رقبہ $\frac{4}{3}\pi r^3 =$ کرہ کا حجم
6		$2\pi r^2 =$ نصف کرہ کی خم دار سطح کا رقبہ $3\pi r^2 =$ نصف کرہ کی کل سطح کا رقبہ $\frac{2}{3}\pi r^3 =$ نصف کرہ کا حجم

درج ذیل مثالیں حل کیجیے :



شکل 7.1

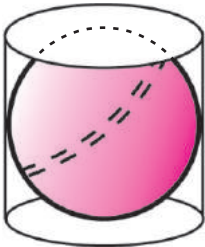
مثال (1) : متصلہ شکل میں 30 سم اونچائی، 20 سم لمبائی اور 20 سم چوڑائی کا ایک تیل کا ڈبہ ہے۔ اس میں کتنے لیٹر تیل سمائے گا؟ (مکعب سم = 1000 لٹر)



شکل 7.2

مثال (2) : متصلہ شکل میں جو کر کی ٹوپی دکھائی گئی ہے۔ اس ٹوپی کو تیار کرنے کے لیے کتنا کپڑا درکار ہوگا؟

غور کیجیے



شکل 7.3

متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق،

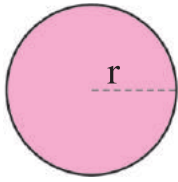
ایک مدور استوانے میں ایک گیند ہے۔ گیند مدور استوانے کی تہہ اور خم دار سطح کو مس کرتی ہے۔ مدور

استوانے سے قاعدے کا نصف قطر  $r$  ہو تو

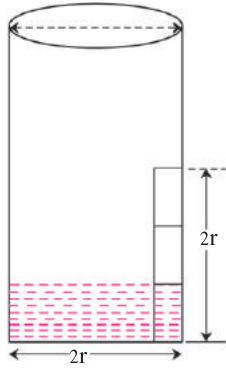
1. کرہ کا نصف قطر کتنا ہوگا؟

2. مدور استوانے کی خم دار سطح کا رقبہ اور کرہ کی خم دار سطح کا رقبہ کے درمیان نسبت کیا ہوگی؟

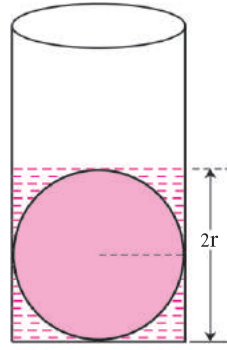
3. مدور استوانے کا حجم اور کرہ کے حجم میں کیا نسبت ہے؟



شکل 7.4



شکل 7.5



شکل 7.6

درج بالا شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق ایک گیندا اور گیند کے نصف قطر کے مساوی (r) نصف قطر والا ایک بیکر لیجیے۔ بیکر کے قطر کے مساوی لمبائی (2r) کا ایک کاغذ کی پٹی لیجیے۔ اس کاغذ کی لمبائی کے تین مساوی حصے کرنے کے لیے دو لیکریں کھینچیے۔ کاغذ کی وہ پٹی بیکر کے قاعدے سے عموداً چسپاں کیجیے۔ اب بیکر میں کاغذ کی پٹی کے نیچے پہلے حصے کے نشان تک پانی بھریئے۔ بعد میں گیندا بیکر میں آہستہ سے اس طرح چھوڑیے کہ وہ بیکر کی تہ سے مس ہو جائے۔ بیکر میں پانی کی سطح میں کہاں تک اضافہ ہوا ہے اس کا مشاہدہ کیجیے۔

پانی کی سطح کاغذ کی پٹی کے اونچائی کے نشان تک پہنچی ہوئی دکھائی دے گی۔

اس مشاہدے کے ذریعے گیند کے حجم کا ضابطہ کس طرح حاصل ہوتا ہے اسے سمجھ لیجیے۔

بیکر مدور استوانے کی شکل کا ہے۔ یعنی بیکر کی 2r اونچائی تک کے حصے کا حجم، مدور استوانے کے حجم کے ضابطے سے ظاہر ہوتا ہے۔

فرض کریں یہ حجم V ہے۔

$$\therefore V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

بیکر میں پہلے بھرے ہوئے پانی کا حجم + گیند کا حجم = V، لیکن

$$= \text{گیند کا حجم} + \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$$

$$\therefore \text{گیند کا حجم} = V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

کرے کے حجم کا ضابطہ 'V = \frac{4}{3} \pi r^3' حاصل ہوتا ہے۔

آپ اس ضابطے کا استعمال کر کے شکل 7.3 کے سوال نمبر 3 کا جواب حاصل کر سکتے ہیں۔

## حل کردہ مثالیں

مثال (1) : ایک مدور استوانہ نمائندگی کی ٹانگی کا نصف قطر 2.8 میٹر اور اونچائی 3.5 میٹر ہے۔ اس ٹانگی میں کتنا لٹر پانی سمائے گا؟ ایک شخص کو روزانہ اوسطاً 70 لٹر پانی درکار ہوتا ہو تو پوری بھری ہوئی ٹانگی کا پانی روزانہ کتنے لوگوں کے لیے کافی ہوگا؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

حل : میٹر (r) = نصف قطر، میٹر (h) = اونچائی،  $\pi = \frac{22}{7}$

مدور استوانہ شکل کی ٹانگی کا حجم = پانی کی ٹانگی کی گنجائش

$$= \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$$

$$= 86.24 \text{ مکعب میٹر}$$

$$= 86.24 \times 1000 \text{ لٹر} \quad \dots (\because 1 \text{ مکعب میٹر} = 1000 \text{ لٹر})$$

$$= 86240.00 \text{ لٹر}$$

اس لیے ٹانگی میں 86240 لٹر پانی سمائے گا۔

ایک شخص کو روزانہ 70 لٹر پانی درکار ہوتا ہے۔

$$\therefore \text{مکمل بھری ہوئی ٹانگی کا پانی استعمال کرنے والے اشخاص کی تعداد} = \frac{86240}{70} = 1232$$

اس لیے مکمل بھری ہوئی ٹانگی کا پانی 1232 اشخاص کے لیے کافی ہوگا۔

مثال (2) : 30 سم نصف قطر کا ایک ٹھوس کرہ پگھلا کر اس سے 10 سم نصف قطر اور 6 سم اونچائی والے ٹھوس مدور استوانے بنائیں تو بتائیے کتنے استوانے تیار ہوں گے؟

حل : سم  $r = 30$ ، کرے کا نصف قطر

سم  $R = 10$ ، مدور استوانے کا نصف قطر

سم  $H = 6$ ، مدور استوانے کی اونچائی

فرض کریں  $n$  استوانے تیار ہوں گے۔

$$\therefore \text{ایک مدور استوانے کا حجم} \times n = \text{کرے کا حجم}$$

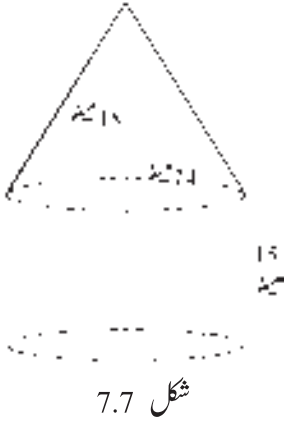
$$\therefore \text{مدور استوانوں کی تعداد} = n = \frac{\text{کرے کا حجم}}{\text{ایک مدور استوانے کا حجم}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \times (30)^3}{10^2 \times 6} = \frac{\frac{4}{3} \times 30 \times 30 \times 30}{10 \times 10 \times 6} = 60$$

$\therefore$  کل 60 مدور استوانے تیار ہوں گے۔

مثال (3) : سرکس کے خیمے کا نچلا حصہ مدور استوانہ شکل کا اور اوپری حصہ مخروط شکل کا ہے۔ خیمے کے قاعدے کا قطر 48 میٹر ہے۔ مدور استوانہ نما حصے کی اونچائی 15 میٹر ہے۔ خیمے کی کل بلندی 33 میٹر ہے تو خیمے کے لیے درکار کپڑے کا رقبہ اور خیمے میں موجود ہوا کا حجم معلوم کیجیے۔  
حل : خیمے کی کل اونچائی 33 میٹر ہے۔



فرض کریں مدور استوانہ نما حصے کی اونچائی = H، اس لیے میٹر H = 15

$$\therefore \text{مخروطی حصے کی عمودی اونچائی} = h = 33 - 15 = 18 \text{ میٹر}$$

$$\begin{aligned} \text{مخروط کی مائل بلندی } (l) &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \sqrt{24^2 + 18^2} \\ &= \sqrt{576 + 324} \\ &= \sqrt{900} \\ &= 30 \text{ میٹر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مخروطی حصے کی مائل سطح کا رقبہ} + \text{مدور استوانے کی خماری سطح کا رقبہ} &= \text{سرکس کے خیمے کے لیے درکار کپڑے کا رقبہ} \\ &= 2\pi rH + \pi r l \\ &= \pi r (2H + l) \\ &= \frac{22}{7} \times 24 (2 \times 15 + 30) \\ &= \frac{22}{7} \times 24 \times 60 \\ &= 4525.71 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

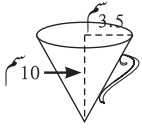
$$\begin{aligned} \text{مخروطی حصے کا حجم} + \text{مدور استوانہ نما حصے کا حجم} &= \text{خیمے میں موجود ہوا کا حجم} \\ &= \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 \left( H + \frac{1}{3} h \right) \\ &= \frac{22}{7} \times 24^2 \left( 15 + \frac{1}{3} \times 18 \right) \\ &= \frac{22}{7} \times 576 \times 21 \\ &= 38,016 \text{ مکعب میٹر} \end{aligned}$$

$\therefore$  خیمے کے لیے لگنے والے کپڑے کا رقبہ = 4525.71 مربع میٹر اور

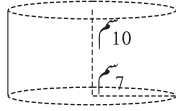
خیمے میں موجود ہوا کا حجم = 38016 مکعب میٹر

## مشقی سیٹ 7.1

1. ایک مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 1.5 سم اور عمودی بلندی 5 سم ہے۔ تو اس مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔
2. 6 سم قطر والے کرے کا حجم معلوم کیجیے۔
3. ایک مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر 5 سم اور اونچائی 40 سم ہے تو اس کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک کرہ کا نصف قطر 7 سم ہو تو اس کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔
5. ایک ٹھوس دھاتی مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 44 سم، 21 سم اور 12 سم ہے اسے پگھلا کر 24 سم بلندی والا ایک مخروط بنایا گیا۔ مخروط کے قاعدے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔



شکل 7.8  
مخروطی شکل کا پانی کا جگ



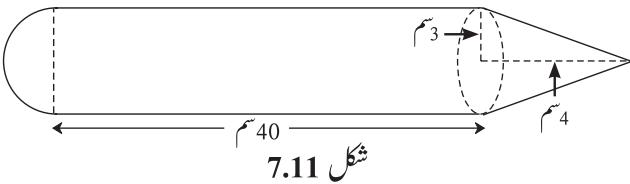
شکل 7.9  
استوانہ شکل کا ڈرم

6. شکل 7.8 اور 7.9 میں برتنوں کے پیمائش (ناپ) کا مشاہدہ کیجیے۔ اس کی مدد سے بتائیے کہ مدور استوانہ نما ڈرم بھرنے کے لیے کتنے جگ پانی لگے گا؟



شکل 7.10

7. شکل میں مدور استوانہ اور مخروط کے قاعدے مساوی ہیں۔ مدور استوانے پر مخروط رکھا گیا ہے۔ مدور استوانے کی اونچائی 3 سم ہے۔ قاعدے کا رقبہ 100 مربع سم ہے۔ اگر کل مجسم شکل کا حجم 500 مکعب سم ہو تو اس مجسم شکل کی اونچائی معلوم کیجیے۔

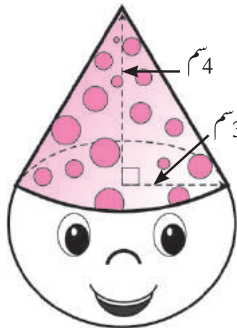


شکل 7.11

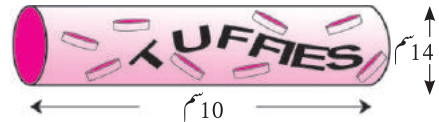
8. کھلونے کی ایک تصویر میں دی ہوئی معلومات پر سے نصف کرہ، مدور استوانہ اور مخروط سے تیار ہونے والے کھلونے کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

9. شکل 7.12 میں مدور استوانے کی شکل کا قرص رکھنے والا ڈبا ہے۔ ایک قرص کا نصف قطر 7 ملی میٹر اور بلندی 5 ملی میٹر ہو تو اس ڈبے میں کتنی قرص رکھی جاسکتی ہیں؟

10. شکل 7.13 میں بچوں کا ایک کھلونا ہے۔ جو ایک نصف مخروط کی مدد سے تیار کیا گیا ہے۔ شکل میں دکھائی گئی پیمائشوں کی مدد سے کھلونے کا حجم اور خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

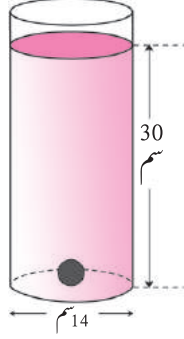


شکل 7.13



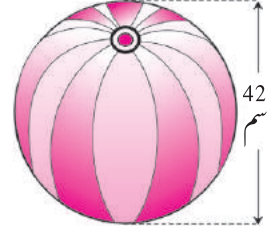
شکل 7.12

12. شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق ایک مدور استوانہ نما گلاس میں پانی ہے اس میں 2 سم قطر والی ایک دھاتی گولی (شکل کے مطابق) ڈوبی ہوئی ہے۔ تو پانی کا حجم معلوم کیجیے۔



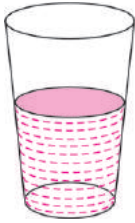
شکل 7.15

11. شکل میں دکھائے گئے بیچ بال (beach ball) کی خمدار سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔



شکل 7.14

آئیے سمجھ لیں

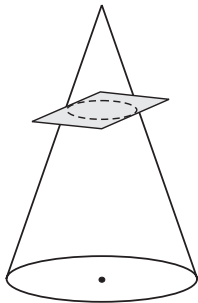


شکل 7.16

مخروط ناقص (Frustum of the cone)

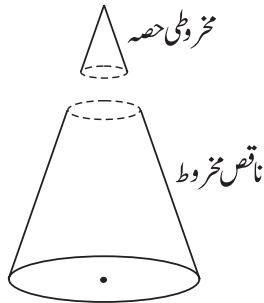
ہم پانی پینے کے لیے گلاس کا استعمال کرتے ہیں۔

یہ گلاس کی شکل اور ساتھ ہی ساتھ پانی کی شکل بھی مخروط ناقص ہے۔



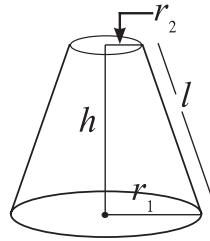
شکل 7.17

مخروط کاٹتے وقت



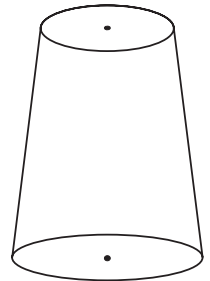
شکل 7.18

مخروط کاٹنے کے بعد علیحدہ ہوئے دو حصے



شکل 7.19

مخروط ناقص



شکل 7.20

اوندھا رکھا ہوا گلاس

شکل 7.17 میں ایک مخروط کو اوندھا کر کے دکھایا گیا ہے۔ اس مخروط کو اس کے قاعدے کے متوازی اس طرح قطع کیا گیا ہے کہ اس طرح بننے والے

دو حصوں میں سے ایک حصہ کی شکل مخروط ہے۔ بچے ہوئے دوسرے حصے کو ناقص مخروط (Frustum) کہتے ہیں۔

مخروط کی طرح ہی ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کے لیے ہم درج ذیل ضابطوں کا استعمال کریں گے۔

## اسے ذہن نشین کر لیں



ناقص مخروط کی مائل بلندی  $l$  ، ناقص مخروط کی بلندی  $h$  =

یہاں، ناقص مخروط کے دائروں کے نصف قطر  $r_1$  اور  $r_2$  ہیں اور  $r_1 > r_2$

$$\text{ناقص مخروط کی مائل بلندی} = l = \sqrt{h^2 + r_1^2 - r_2^2}$$

$$\text{ناقص مخروط کی خماری سطح کا رقبہ} = \pi l (r_1 + r_2)$$

$$\text{ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ} = \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\text{ناقص مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$



شکل 7.21

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : ایک ناقص مخروط شکل کی بالٹی کی اونچائی 28 سم ہے۔ اس بالٹی کے دونوں سرے کے دائروں کے نصف قطر 12 سم اور 15 سم ہیں تو بالٹی

میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

حل : بالٹی کے دونوں سرے کے دائروں کے نصف قطر  $r_1 = 15$  سم،  $r_2 = 12$  سم، بالٹی کی بلندی  $h = 28$  سم



شکل 7.22

$$\text{ناقص مخروط کا حجم} = \text{بالٹی کی گنجائش}$$

$$= \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28 (15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

$$= 16104 \text{ سم مکعب} = 16.104 \text{ لٹر}$$

بالٹی میں 16.104 لٹر پانی سمائے گا۔

مثال (2) : ناقص مخروط کے دائروں کے نصف قطر 14 سم اور 8 سم ہیں۔ اگر ناقص مخروط کی بلندی 8 سم ہو تو درج ذیل قیمتیں معلوم کیجیے۔

( $\pi = 3.14$ )

(i) ناقص مخروط کی خماری سطح کا رقبہ (ii) ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ (iii) ناقص مخروط کا حجم

حل : یہاں  $r_1 = 14$  سم،  $r_2 = 8$  سم،  $h = 8$  بلندی

$$\text{ناقص مخروط کی مائل بلندی}, l = \sqrt{h^2 + r_1^2 - r_2^2}$$

$$l = \sqrt{8^2 + (14 - 8)^2}$$

$$l = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ سم}$$

$$\begin{aligned} \text{ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ} &= \pi (r_1 + r_2) l \\ &= 3.14 \times (14 + 8) \times 10 \\ &= 690 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

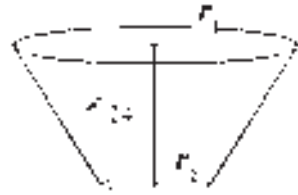
$$\begin{aligned} \text{ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ} &= \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \\ &= 3.14 \times 10(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2 \\ &= 690.8 + 615.44 + 200.96 \\ &= 690.8 + 816.4 \\ &= 1507.2 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ناقص مخروط کا حجم} &= \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \\ &= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8(14^2 + 8^2 + 14 \times 8) \\ &= 3114.88 \text{ مکعب سم} \end{aligned}$$

## مشقی سیٹ 7.2

1. ناقص مخروط شکل والی پانی کی بالٹی کی بلندی 30 سم اور دونوں دائروں کے نصف قطر 14 سم اور 7 سم ہیں۔ بالٹی میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟ (مکعب سم = 1000 لٹر)
2. ایک ناقص مخروط کے دائروں کے نصف قطر 14 سم اور 6 سم ہے۔ اس کی بلندی 6 سم ہے۔ درج ذیل قیمتیں معلوم کیجیے۔  
(i) ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ (ii) ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ (iii) ناقص مخروط کا حجم
3. شکل 7.23 میں ایک ناقص مخروط کے دائروں کے محیط بالترتیب 132 سم اور 88 سم ہیں۔ اس کی بلندی 24 سم ہے تو اس ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔ (π = 3.14)

$$\begin{aligned} \text{محیط}_1 &= 2\pi r_1 = 132 \\ r_1 &= \frac{132}{2\pi} = \boxed{\phantom{00}} \text{ سم} \\ \text{محیط}_2 &= 2\pi r_2 = 88 \\ r_2 &= \frac{88}{2\pi} = \boxed{\phantom{00}} \text{ سم} \end{aligned}$$



شکل 7.23

$$\text{ناقص مخروط کی مائل بلندی } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$l = \sqrt{\boxed{\phantom{00}}^2 + \boxed{\phantom{00}}^2}$$

$$l = \boxed{\phantom{00}} \text{ سم}$$

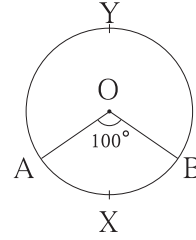
$$\begin{aligned} \text{ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ} &= \pi(r_1 + r_2)l \\ &= \pi \times \square \times \square \\ &= \square \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

آئیے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل 7.24 کی مدد سے جدول مکمل کیجیے۔

قوس کی قسم	قوس کا نام	قوس کی پیمائش
اصغر قوس	قوس AXB	.....
.....	قوس AYB	.....

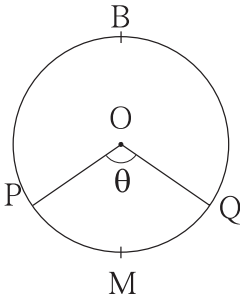


شکل 7.24

آئیے سمجھ لیں



دائرے کا تراشہ (Sector of a circle)



شکل 7.25

شکل میں مرکزی زاویے کی وجہ سے دائروں کی علاقہ دو حصوں میں تقسیم ہو گیا ہے۔ ہر حصہ کو دائرے کا تراشہ کہتے ہیں۔

”دائرے کے دو نصف قطر اور اس کے سروں کو ملانے والے دائرے کے قوس کے ذریعے بننے والے حصے کو دائرے کا تراشہ کہتے ہیں۔“

شکل میں O - PMQ اور O - PBQ یہ دونوں ایک دائرے کے تراشے ہیں۔

اصغر تراشہ (Minor sector) :

دو نصف قطر اور ان سے متعلقہ اصغر قوس کے ذریعے بننے والے تراشے کو اصغر تراشہ کہتے ہیں۔

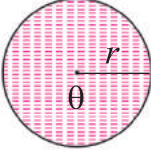
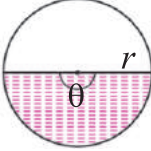
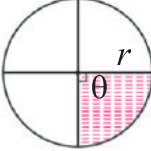
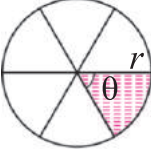
شکل میں O - PMQ اصغر تراشہ ہے۔

اکبر تراشہ (Major sector) :

دو نصف قطر اور ان سے متعلقہ اکبر قوس کے ذریعے بننے والا تراشہ، اکبر تراشہ کہلاتا ہے۔ شکل میں O - PBQ اکبر تراشہ ہے۔

دائرے کے تراشے کا رقبہ (Area of a sector)

درج ذیل شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق مساوی نصف قطر والے دائروں کے نشان زدہ حصوں کے رقبوں کا مشاہدہ کیجیے اور درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

$\theta = 360^\circ$  $A_1 = \pi r^2$	$\theta = 180^\circ$  $A_2 = \frac{1}{2} \pi r^2$	$\theta = 90^\circ$  $A_3 = \frac{1}{4} \pi r^2$	$\theta = 60^\circ$  $A_4 = \frac{1}{6} \pi r^2$
--	--	---	---

شکل 7.26

مکمل زاویہ =  $360^\circ$  = دائرے کے مرکزی زاویے کی پیمائش

دائرے کا مرکزی زاویہ = $360^\circ$ ,		دائرے کا رقبہ = $\pi r^2$	
دائرے کا تراشہ	دائرے کے تراشے کے قوس کی پیمائش	$\frac{\theta}{360}$	دائرے کے تراشے کا رقبہ A
$A_1$	$360^\circ$	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times \pi r^2$
$A_2$	$180^\circ$	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
$A_3$	$90^\circ$	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
$A_4$	$60^\circ$	.....	.....
A	$\theta$	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

جدول کی مدد سے سمجھ میں آتا ہے کہ دائرے کے رقبے کو  $\frac{\theta}{360}$  سے ضرب کرنے پر  $\theta$  پیمائش والے قوس سے متعلقہ تراشے کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ ضابطہ درج ذیل طریقے سے لکھا جاسکتا ہے۔

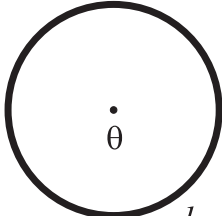
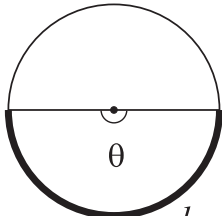
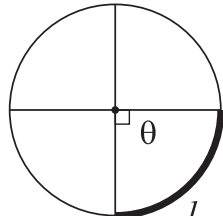
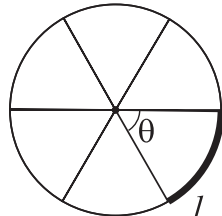
$$(A) \text{ دائرے کے تراشے کا رقبہ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360} \quad \dots \text{(اس ضابطے کی بنا پر)}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{دائرے کے تراشے کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\theta}{360}$$

(Length of an arc) قوس کی لمبائی

درج ذیل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق مساوی نصف قطر والے دائروں کے واضح نمایاں کیے ہوئے قوس کی لمبائی کا مشاہدہ کیجیے اور درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

$\theta = 360^\circ$  $l_1 = 2\pi r$	$\theta = 180^\circ$  $l_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi r$	$\theta = 90^\circ$  $l_3 = \frac{1}{4} \times 2\pi r$	$\theta = 60^\circ$  $l_4 = \frac{1}{6} \times 2\pi r$
---	--	--	---

شکل 7.27

دائرے کے قوس کی لمبائی	دائرے کے قوس کی پیمائش ( $\theta$ )	$\frac{\theta}{360}$	دائرے کے قوس کی لمبائی ( $l$ )
$l_1$	$360^\circ$	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
$l_2$	$180^\circ$	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
$l_3$	$90^\circ$	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
$l_4$	$60^\circ$	.....	.....
$l$	$\theta$	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

مندرجہ بالا تواتر کی بنا پر یہ سمجھ میں آتا ہے کہ جب محیط کو  $\frac{\theta}{360}$  سے ضرب کرتے ہیں تو  $\theta$  پیمائش والے دائرے کے قوس کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔ اسے ضابطے کی شکل میں مندرجہ ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$$(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

اس ضابطے کی بنا پر،

$$\frac{\text{دائرے کے قوس کی لمبائی}}{\text{محیط}} = \frac{\theta}{360}$$

دائرے کے قوس کی لمبائی اور دائرے کے تراشے کے رقبے کے درمیان تعلق۔

$$(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \quad \dots (I)$$

$$(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad \dots (II)$$

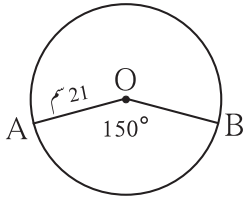
$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 \quad \dots (I \text{ اور } II \text{ سے})$$

$$A = \frac{1}{2} l r = \frac{l r}{2}$$

$$\therefore \text{دائرے کے تراشے کا رقبہ} = \frac{\text{دائرے کے قوس کی لمبائی} \times \text{نصف قطر}}{2}$$

$$\text{اسی طرح, } \frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

### حل کردہ مثالیں



شکل 7.28

مثال (1) : 21 سم نصف قطر والے دائرے کے تراشے کے قوس کی پیمائش  $150^\circ$  ہے۔

دائرے کے تراشے کا رقبہ اور نظیری قوس کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : یہاں، سم  $r = 21$ ،  $\theta = 150^\circ$ ،  $r = 21$

$$(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

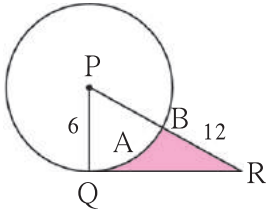
$$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= \frac{1155}{2} \text{ مربع سم} = 577.5 \text{ مربع سم}$$

$$\text{دائرے کے قوس کی لمبائی} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$= 55 \text{ سم}$$



شکل 7.29

مثال (2) : شکل میں دائرے کا مرکز P اور دائرے کا نصف قطر 6 سم ہے۔ قطعہ QR دائرے کا

مماس ہے۔ سم  $PR = 12$  ہو تو نشان زدہ حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ( $\sqrt{3} = 1.73$ )

حل : دائرے کے مماس کے تماسی نقطے سے کھینچا گیا نصف قطر مماس پر عمود ہوتا ہے۔

اس لیے  $\triangle PQR$  میں،

$$\angle PQR = 90^\circ, PQ = 6 \text{ سم}, PR = 12 \text{ سم}, \therefore \sin Q = \frac{PQ}{PR}$$

اگر قائمہ الزاویہ مثلث کا ایک ضلع، وتر کا نصف ہو تو اس ضلع کے مقابل کے زاویے کی پیمائش  $30^\circ$  ہوتی ہے۔

$$\therefore \angle R = 30^\circ \text{ اور } \angle P = 60^\circ$$

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  مسئلے کی رؤ سے،

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

$$QR = 6\sqrt{3} \text{ سم}$$

$$\therefore A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$$

$$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$$

$$= 31.14 \text{ مربع سم}$$

$$\text{دائرے کے تراشے کا رقبہ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\therefore A(P-QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$$

$$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 = 3.14 \times 6$$

$$= 18.84 \text{ مربع سم}$$

$$\text{نشان زدہ حصے کا رقبہ} = A(\triangle PQR) - A(P-QAB)$$

$$= 31.14 - 18.84$$

$$= 12.30 \text{ مربع سم}$$

$$\text{نشان زدہ حصے کا رقبہ} = 12.30 \text{ مربع سم}$$



7. 3.4 سم نصف قطر کے تراشے کا محیط 12.8 سم ہے۔ تو تراشے کا رقبہ معلوم کیجیے۔



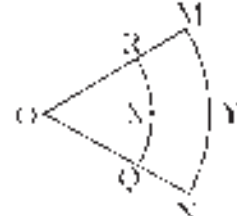
شکل 7.32

8. شکل 7.33 میں، نقطہ 'O' تراشے کا مرکز ہے۔

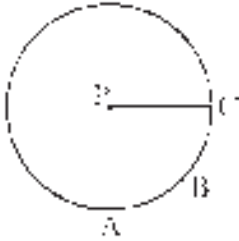
$$\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ, \text{ سم } OR = 7$$

سم  $OM = 21$  ہو تو قوس  $RXQ$  اور قوس  $MYN$  کی قیمت

$$\left( \pi = \frac{22}{7} \right) \text{ معلوم کیجیے۔}$$



شکل 7.33



شکل 7.34

9. شکل 7.34 میں، مربع سم  $A(P - ABC) = 154$ ، دائرے کا نصف قطر 14 سم ہو تو

(i)  $\angle APC$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔

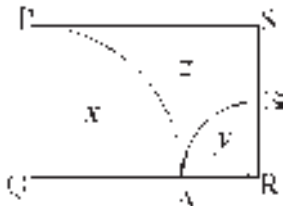
(ii) قوس  $ABC$  کی لمبائی معلوم کیجیے۔

10. دائرے کا نصف قطر 7 سم ہے۔ اگر تراشوں کے قوسین کی پیمائشیں ذیل کے مطابق ہوں تو ان

تراشوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

- (i)  $30^\circ$  (ii)  $210^\circ$  (iii) قائمہ زاویہ  $3$

11. اصغر تراشے کا رقبہ 3.85 مربع سم اور نظیری مرکزی زاویہ کی پیمائش  $36^\circ$  ہو تو اس دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔



شکل 7.35

12. شکل 7.35 میں  $\square PQRS$  ایک مستطیل ہے۔

سم  $PQ = 14$ ، سم  $QR = 21$  ہو تو شکل میں  $x$ ،  $y$  اور  $z$  میں سے ہر

ایک کا رقبہ معلوم کیجیے۔

13.  $\triangle LMN$  متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

سم  $LM = 14$ ، مثلث کے ہر اس کو مرکز مان کر 7 سم نصف قطر لے کر شکل

کے مطابق تین تراشے بنائے گئے ہیں۔

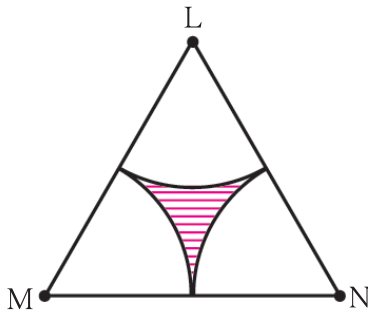
اس معلومات کی بنا پر،

$$A(\triangle LMN) = ? \quad (1)$$

(2) ایک تراشے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(3) تینوں تراشوں کا کل رقبہ معلوم کیجیے۔

(4) نشان زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

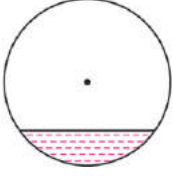


شکل 7.36

## آئیے سمجھ لیں



### دائرے کا قطعہ دائرہ (Segment of a circle)

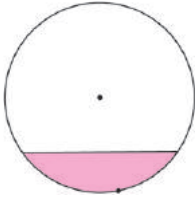


شکل 7.37

قطعہ دائرہ یعنی، وتر اور قوس سے گھرا ہوا علاقہ  
 اصغر قطعہ دائرہ : وتر اور اصغر قوس سے گھرا ہوا علاقہ اصغر قطعہ دائرہ کہلاتا ہے۔ شکل میں قطعہ دائرہ  
 AXB، اصغر قطعہ دائرہ ہے۔  
 اکبر قطعہ دائرہ : وتر اور اکبر قوس سے گھرا علاقہ، اکبر قطعہ دائرہ کہلاتا ہے۔ شکل میں قطعہ دائرہ AYB،  
 اکبر قطعہ دائرہ ہے۔

نصف قطعہ دائرہ : قطر سے بنے قطعہ دائرے کو نصف قطعہ دائرہ کہتے ہیں۔

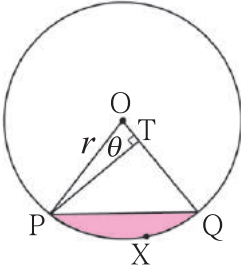
### قطعہ دائرہ کا رقبہ (Area of a segment)



شکل 7.38

شکل میں PXQ، اصغر قطعہ دائرہ ہے۔

اور PYQ، اکبر قطعہ دائرہ ہے۔



شکل 7.39

اصغر قطعہ دائرہ کا رقبہ کیسے معلوم کریں؟

مرکز 'O' سے دائرے میں OP اور OQ دونوں قطر کھینچیں۔

یہاں  $\angle POQ = \theta$  ہے۔ آپ تراشے O-PXQ کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح

$\triangle OPQ$  کا رقبہ بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ تراشے کے رقبے میں سے مثلث کا رقبہ تفریق کرنے پر

اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

$\triangle OPQ$  کا رقبہ - تراشے (O-PXQ) کا رقبہ = اصغر قطعہ دائرہ PXQ کا رقبہ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \triangle OPQ \text{ کا رقبہ} \quad \dots (I)$$

شکل میں  $\triangle OPQ$  میں، قطعہ PT، ضلع OQ پر کھینچا ہوا عمود ہے۔

قائمہ الزاویہ  $\triangle OTP$  میں،

$$\sin \theta = \frac{PT}{OP}$$

$$\therefore PT = OP \times \sin \theta$$

$$PT = r \sin \theta \quad \dots (\because OP = r)$$

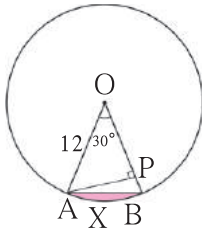
$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} \times \Delta \text{OPQ کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} \\ &= \frac{1}{2} \times OQ \times PT \\ &= \frac{1}{2} \times r \times r \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times r^2 \sin \theta \quad \dots (ii) \end{aligned}$$

بیان (I) اور (II) کی رؤ سے،

$$\begin{aligned} \text{قطعہ دائرہ PXQ کا رقبہ} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\ &= r^2 \left[ \frac{\pi \theta}{360} - \frac{\sin \theta}{2} \right] \end{aligned}$$

(ہم نے حادہ زاویوں کے sine مثلثیاتی نسبتوں کا مطالعہ کیا ہے اس لیے  $\theta$  کی پیمائش  $90^\circ$  یا اس سے کم ہو تو اس ضابطہ کو آسانی سے استعمال کر سکتے ہیں۔ اسے ذہن نشین کر لیجیے۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) : شکل 7.40 میں  $\angle AOB = 30^\circ$ ،  $OA = 12$  سم

ہو تو اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ )

طریقہ (I)

$$\begin{aligned} A(\Delta OAB) &= \frac{1}{2} r^2 \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30 \\ &= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2} \\ &\therefore (\because \sin 30 = \frac{1}{2}) \\ &= 36 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 12 \text{ سم}, \theta = 30^\circ, \pi = 3.14 \\ \text{تراشہ O-AXB کا رقبہ} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2 \\ &= 3.14 \times 2 \\ &= 37.68 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{قطعہ دائرہ AXB کا رقبہ} &= \text{تراشہ (O-AXB) کا رقبہ} - A(\Delta OAB) \\ &= 37.68 - 36 = 1.68 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

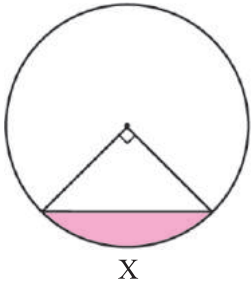
$$\begin{aligned}
 \text{قطعہ دائرے AXB کا رقبہ} &= r^2 \left[ \frac{\pi \theta}{360} - \frac{\sin \theta}{2} \right] \\
 &= 12^2 \left[ \frac{3.14 \times 30}{360} - \frac{\sin 30}{2} \right] \\
 &= 144 \left[ \frac{3.14}{12} - \frac{1}{2 \times 2} \right] \\
 &= \frac{144}{4} \left[ \frac{3.14}{3} - 1 \right] \\
 &= 36 \left[ \frac{3.14 - 3}{3} \right] \\
 &= \frac{36}{3} \times 0.14 = 12 \times 0.14
 \end{aligned}$$

$$\text{مربع سم AXB کا رقبہ} = 1.68$$

مثال (2) : 'P' مرکز والے دائرے کا نصف قطر 10 سم ہے۔ وتر AB، دائرے کے مرکز پر قائمہ زاویہ بناتا ہے تو اصغر قطعہ دائرے اور اکبر

قطعہ دائرے کے رقبے معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ )

حل : سم  $r = 10$ ،  $\theta = 90^\circ$ ،  $\pi = 3.14$



شکل 7.41

$$\begin{aligned}
 \text{تراشے کا رقبہ} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\
 &= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2 \\
 &= \frac{1}{4} \times 314 \\
 &= 78.5 \text{ مربع سم}
 \end{aligned}$$

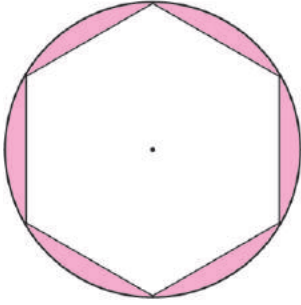
$$\begin{aligned}
 A(\Delta APB) &= \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع} \\
 &= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \\
 &= 50 \text{ مربع سم}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{مثبت کا رقبہ} - \text{تراشے کا رقبہ} &= \text{اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ} \\
 &= 78.5 - 50 \\
 &= 28.5 \text{ مربع سم}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ} - \text{دائرہ کا رقبہ} &= \text{اکبر قطعہ دائرے کا رقبہ} \\
 &= 3.14 \times 10^2 - 28.5 \\
 &= 314 - 28.5 \\
 &= 285.5 \text{ مربع سم}
 \end{aligned}$$

مثال (3) : ایک دائرے کا نصف قطر 14 سم ہے۔ اُس میں ایک منتظم مسدس حائظ ہے۔ منتظم مسدس کے بیرونی اور دائرے کے اندرونی

علاقے کے درمیان کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ( $\pi = \frac{22}{7}$ ,  $\sqrt{3} = 1.732$ )



شکل 7.42

حل : منتظم مسدس کے حائظ دائرے کا نصف قطر = منتظم مسدس کا ضلع

$$\therefore \text{منتظم مسدس کا ضلع} = 14 \text{ سم}$$

$$\text{منتظم مسدس کا رقبہ} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ضلع})^2$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$$

$$= 509.21 \text{ مربع سم}$$

$$\text{دائرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= 616 \text{ مربع سم}$$

منتظم مسدس کا رقبہ - دائرے کا رقبہ = منتظم مسدس کے بیرونی اور دائرے کے اندرونی علاقے کے درمیان کا رقبہ (خط کشیدہ علاقے کا رقبہ)

$$= 616 - 509.21$$

$$= 106.79 \text{ مربع سم}$$

#### مشقی سیٹ 7.4

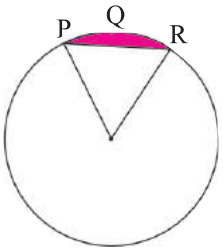


شکل 7.43

1. شکل 7.43 میں، 'A' مرکز والے دائرے میں،

$\angle BXC = 45^\circ$ ، سم  $AX = 7\sqrt{2}$  ہو تو قطعہ دائرہ BXC کا رقبہ معلوم

کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ ,  $\sqrt{2} = 1.41$ )

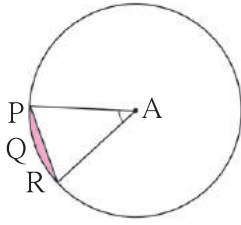


شکل 7.44

2. شکل 7.44 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔  $m(\text{قوس } PQR) = 60^\circ$ ،

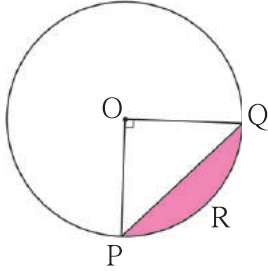
سم  $OP = 10$  ہو تو نشان زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

( $\pi = 3.14$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$ )



شکل 7.45

3. 'A' مرکز والے دائرے میں،  $\angle PAR = 30^\circ$  اور  $AP = 7.5$  سم ہو تو قطعہ دائرہ PQR کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ )



شکل 7.46

4. متصلہ شکل میں دائرے کا مرکز 'O' اور اس کا وتر PQ ہے۔  $\angle POQ = 90^\circ$  اور نشان زدہ علاقہ کا رقبہ 114 مربع سم ہے تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ )

5. 15 سم نصف قطر والے دائرے کا وتر PQ، مرکز پر  $60^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے۔ اس وتر کی وجہ سے بننے والے اصغر قطعہ دائرے اور اکبر قطعہ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$ )

### مجموعہ سوالات 7

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

- (1) اگر ایک دائرے کے محیط اور دائرے کے رقبے میں 7 : 2 کی نسبت ہو تو دائرے کا محیط کتنا ہوگا؟  
 (A)  $14\pi$  (B)  $\frac{7}{\pi}$  (C)  $7\pi$  (D)  $\frac{14}{\pi}$
- (2) 44 سم لمبائی کے قوس کی پیمائش  $160^\circ$  ہو تو، اس دائرے کا محیط کتنا ہوگا؟  
 (A) 66 سم (B) 44 سم (C) 160 سم (D) 99 سم
- (3) قوس کی پیمائش  $90^\circ$  اور نصف قطر 7 سم ہو تو ترانے کا احاطہ معلوم کیجیے۔  
 (A) 44 سم (B) 25 سم (C) 36 سم (D) 56 سم
- (4) مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 7 سم اور اونچائی 24 سم ہو تو مخروط کی خماری کا رقبہ معلوم کیجیے۔  
 (A) 440 مربع سم (B) 550 مربع سم (C) 330 مربع سم (D) 110 مربع سم
- (5) مدور استوانہ کی خماری کا رقبہ 440 مربع سم اور نصف قطر 5 سم ہو تو اس کی اونچائی کتنی سینٹی میٹر ہوگی؟  
 (A)  $\frac{44}{\pi}$  (B)  $22\pi$  (C)  $14\pi$  (D)  $\frac{22}{\pi}$
- (6) ایک مخروط پگھلا کر اس کے قاعدے کے نصف قطر کے مساوی نصف قطر والا مدور استوانہ بنایا گیا۔ اگر استوانے کی بلندی 5 سم ہو تو مخروط کی بلندی کتنی ہوگی؟  
 (A) 15 سم (B) 10 سم (C) 18 سم (D) 5 سم

(7) 0.01 سم ضلع کے مکعب کا حجم کتنا مکعب سم ہے؟

- (A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) ایک مکعب میٹر حجم والے مکعب کے ضلع کی لمبائی کتنی ہوگی؟

- (A) 1 سم (B) 10 سم (C) 100 سم (D) 1000 سم

2. ایک مخروط ناقص شکل کے کپڑے دھونے کے ٹب (ناند) کی اونچائی 21 سم ہے۔ ٹب کے دونوں دائروں و حصوں کے نصف قطر 20

سم اور 15 سم ہیں۔ بتائیے ٹب میں کتنے لیٹر پانی سمائے گا؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

3. پلاسٹک کے 1 سم نصف قطر کی گولیاں پگھلا کر، استوانہ نمائنی تیار کی گئی۔ نلی کی موٹائی 2 سم، اونچائی 90 سم اور بیرونی نصف قطر

30 سم ہو تو، اس نلی کو بنانے کے لیے کتنے گولیاں پگھلائی گئی ہوں گی؟

4. لمبائی 16 سم، چوڑائی 11 سم اور اونچائی 10 سم کے دھاتی مکعب نما (مستطیلی منشور) سے، 2 ملی میٹر موٹائی اور 2 سم قطر کے

سکے بنائے گئے ہوں تو بتائیے کل کتنے سکے بنائے جاسکتے ہیں؟

5. ایک رولر (متحرکہ دھمس) کا قطر 120 سم اور لمبائی 84 سم ہے۔ ایک میدان ایک مرتبہ ہموار بنانے کے لیے رولر 200

گردشیں مکمل کرتا ہے۔ 10 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے میدان ہموار کرنے کا کل خرچ کتنا ہوگا؟

6. ایک کھوکھلے دھاتی کرے کا قطر 12 سم اور موٹائی 0.01 میٹر ہے۔ اس کرے کے بیرونی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے اور جب کہ دھات کی

کثافت 8.88 گرام فی مکعب میٹر ہو تو اس کرے کی کمیت معلوم کیجیے۔

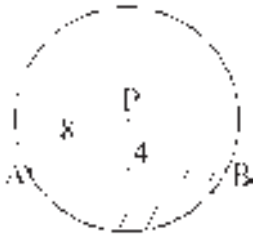
7. ایک مدور استوانہ نما بالٹی کے قاعدے کا قطر 28 سم اور اونچائی 20 سم ہے۔ یہ بالٹی ریت سے مکمل بھری ہوئی ہے۔ اس بالٹی کی ریت

زمین پر اس انداز میں انڈیل دی گئی کہ ریت کا مخروط بن گیا۔ ریت کے مخروط کی اونچائی 14 سم ہو تو اس مخروط کے قاعدے کا رقبہ معلوم

کیجیے۔

8. ایک دھاتی کرے کا نصف قطر 9 سم ہے۔ اس کرے کو پگھلا کر، 4 ملی میٹر قطر کی دھات کا تار بنایا گیا تو اس تار کی لمبائی کتنی ہوگی؟

9. 6 سم نصف قطر کے ایک دائرے کے تراشے کا رقبہ  $15\pi$  مربع سم ہے۔ اس تراشے کے قوس کی لمبائی اور قوس کی پیمائش معلوم کیجیے۔



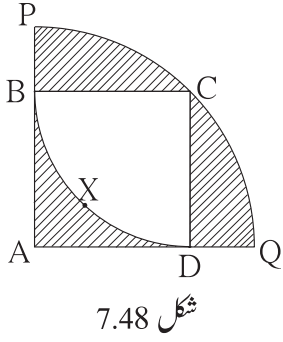
شکل 7.47

10. شکل 7.47 میں، P دائرے کا مرکز ہے۔ AB وتر ہے۔  $PA = 8$

اور وتر AB دائرے کے مرکز سے 4 سم کے فاصلے پر واقع ہے۔ تو نشان

زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

( $\pi = 3.14$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$ )



11. دائرہ کا تراشہ A - PCQ میں  $\square ABCD$  ایک مربع ہے۔

اگر تراشہ کا نصف قطر 20 سم ہو تو نشان زدہ

علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

حل : سم  $\square$  = تراشہ C - BXD کا نصف قطر = مربع ABCD کا ضلع

$$\text{مربع کا رقبہ} = \text{ضلع}^2 = \square^2 = \square \quad \dots (I)$$

تراشہ C - BXD کا رقبہ - مربع ABCD کا رقبہ = مربع کا نشان زدہ علاقے کا رقبہ

$$= \square - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \square - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \square - 314$$

$$= \square$$

مربع ABCD کے وتر کی لمبائی = بڑے تراشہ کا نصف قطر

$$= 20\sqrt{2}$$

مربع ABCD - تراشہ A - PCQ کا رقبہ = بڑے تراشہ میں نشان زدہ علاقے کا رقبہ

$$= A (B - PCQ) - A (\square ABCD)$$

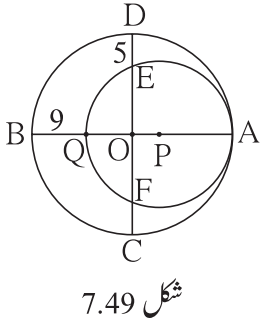
$$= \left( \frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2 \right) - \square^2$$

$$= \frac{90}{360} \times 3.14 (20\sqrt{2})^2 - (20)^2$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$

مربع سم 314 = کل نشان زدہ علاقے کا رقبہ = 36 + 228



12. 'O' اور 'P' مرکز والے دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو نقطہ A پر مس کرتے ہیں۔ اگر  $BQ = 9$ ،  $DE = 5$  ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

حل : فرض کیجیے بڑے دائرے کا نصف قطر R اور چھوٹے دائرے کا نصف قطر 'r' ہے۔  
لہذا OA، OB، OC، OD اور OD بڑے دائرے کے نصف قطر ہیں۔

$$\therefore OA = OB = OC = OD = R$$

$$PQ = PA = r$$

$$OQ = OB - BQ = \boxed{\phantom{00}}$$

$$OE = OD - DE = \boxed{\phantom{00}}$$

P مرکز والے دائرے میں دو وتروں کے اندرونی طور پر تقسیم کرنے کی خصوصیت کی بنا پر،

$$OQ \times OA = OE \times OF$$

$$\boxed{\phantom{00}} \times R = \boxed{\phantom{00}} \times \boxed{\phantom{00}} \quad \dots (\because OE = OF)$$

$$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$$

$$R = \boxed{\phantom{00}}$$

$$AQ = 2r = AB - BQ$$

$$2r = 50 - 9 = 41$$

$$r = \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}}$$







(3)  $90^\circ$ ; MS : SR = 2 : 1      9.  $4\sqrt{3}$  سم

13. (1)  $180^\circ$       (2)  $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3)  $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$       (4)  $65^\circ, 130^\circ$       (5)  $100^\circ$

(2)  $130^\circ$       (3)  $210^\circ$       15. (1)  $56^\circ$       (2) 6      (3) 16 یا 9

(2) 3.36      (3) 6      18. (1)  $68^\circ$       (2) OR = 16.2, QR = 13      (3) 13      21. 13

#### 4. ہندی عمل

#### مجموعہ سوالات - 4

1. (1) C      (2) A      (3) A

#### 5. محدودی علم ہندسہ

#### مشقی سیٹ 5.1

1. (1)  $2\sqrt{2}$       (2)  $4\sqrt{2}$       (3)  $\frac{11}{2}$       (4) 13      (5) 20      (6)  $\frac{29}{2}$

2. (1) ہم خطی ہیں      (2) غیر ہم خطی ہیں      (3) غیر ہم خطی ہیں      (4) ہم خطی ہیں      3. (-1, 0)      7. 7 یا -5

#### مشقی سیٹ 5.2

1. (1, 3)      2. (1)  $\left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$       (2)  $\left[ \frac{4}{3}, \frac{11}{3} \right]$       (3)  $\left[ 0, \frac{13}{3} \right]$       3. 2:7      4. (-6, 3)

5. 2:5,  $k=6$       6. (11, 18)      7. (1) (1, 3)      (2) (6, -2)      (3)  $\left[ \frac{19}{3}, \frac{22}{3} \right]$

8. (-1, -7)      9.  $h=7, k=18$       10. (0, 2); (-2, -3)

11. (-9, -8), (-4, -6), (1, -4)      12. (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

#### مشقی سیٹ 5.3

1. (1) 1      (2)  $\sqrt{3}$       (3) ڈھلان طے نہیں کر سکتے

2. (1) 2      (2)  $-\frac{3}{8}$       (3)  $\frac{5}{2}$       (4)  $\frac{5}{2}$       (5)  $\frac{1}{2}$       (6) ڈھلان طے نہیں کر سکتے

3. (1) ہم خطی ہیں      (2) ہم خطی ہیں      (3) غیر ہم خطی ہیں      (4) ہم خطی ہیں      (5) ہم خطی ہیں      (6) ہم خطی ہیں

4.  $-5; \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}$       6.  $k-5$       7.  $k-0$       8.  $k-5$

#### مجموعہ سوالات - 5

1. (1) D      (2) D      (3) C      (4) C

2. (1) ہم خطی ہیں      (2) ہم خطی ہیں      (3) غیر ہم خطی ہیں      3. (6, 13)      4. 3 : 1

5.  $(-7, 0)$       6. (1)  $\sqrt{2}$  (2) 13 (3)  $5a$       7.  $\left| \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right|$
8. (1) مختلف الاضلاع مثلث      (2) ہاں، متساوی الاضلاع مثلث      (3) ہاں، متساوی الاضلاع مثلث      9.  $k=5$
13.  $5, 2\sqrt{13}, \sqrt{37}$       14.  $(1, 3)$       16.  $\left| \frac{25}{6}, \frac{13}{6} \right|$ , نصف قطر =  $\frac{13\sqrt{2}}{6}$       17.  $(7, 3)$
18. متوازی الاضلاع      19.  $A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20)$       20.  $(3, -2)$
21.  $(7, 6)$  اور  $(3, 6)$       22. 10 اور 0

## 6. علم مثلث

### 6.1 مشقی سیٹ

1.  $\cos\theta = \frac{24}{25}$  ;  $\tan\theta = \frac{7}{24}$       2.  $\sec\theta = \frac{5}{4}$  ;  $\cos\theta = \frac{4}{5}$
3.  $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$  ;  $\sin\theta = \frac{9}{41}$       4.  $\sec\theta = \frac{13}{5}$  ;  $\cos\theta = \frac{5}{13}$  ;  $\sin\theta = \frac{12}{13}$
5.  $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{2}$

### 6.2 مشقی سیٹ

- چرچ کی اونچائی 80 میٹر
- جہاز کاروشنی کے مینار سے فاصلہ 51.60 میٹر
- دوسری عمارت کی بلندی  $(10 + 12\sqrt{3})$  میٹر
- تار سے افقی خط سے بنایا ہوا زاویہ  $30^\circ$
- درخت کی اونچائی  $(40 + 20\sqrt{3})$  میٹر
- پتنگ کی ڈور کی لمبائی 69.20 میٹر

### مجموعہ سوالات - 6

- (1) A (2) B (3) C (4) A
- $\cos\theta = \frac{60}{61}$       3.  $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  ;  $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  ;  $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$  ;  $\sec\theta = \sqrt{5}$  ;  $\cot\theta = \frac{1}{2}$
- $\sin\theta = \frac{5}{13}$  ;  $\cos\theta = \frac{12}{13}$  ;  $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$  ;  $\tan\theta = \frac{5}{12}$  ;  $\cot\theta = \frac{12}{5}$
- عمارت کی اونچائی  $16\sqrt{3}$  میٹر      7. جہاز کاروشنی کے مینار سے فاصلہ  $\frac{100\sqrt{3}}{3}$  میٹر
- عمارت کی اونچائی  $(12 + 15\sqrt{3})$  میٹر
- سیرھی کا دوسرا سر زمین سے زیادہ سے زیادہ 20.80 میٹر اونچا ہوگا

10. ہوائی جہاز زمین سے زیادہ سے زیادہ 68.40 میٹر اونچا ہوگا

## 7. مساحت

### 7.1 مشقی سیٹ

1. 11.79 مکعب سم
2. 113.04 مکعب سم
3. 1413 مربع سم ( $\pi = 3.14$  لیجیے)
4. 616 مربع میٹر
5. 21 سم
6. جگ 12
7. 5 سم
8. 273  $\pi$  مربع سم
9. گولیاں 20
10. 94.20 مکعب سم , 103.62 مربع سم
11. 5538.96 مربع سم , 38772.72 مکعب سم
12. 14.68.67  $\pi$  مکعب سم

### 7.2 مشقی سیٹ

1. 10.780 لٹر
2. (1) 628 مربع سم (2) 1356.48 مربع سم (3) 1984.48 مکعب سم

### 7.3 مشقی سیٹ

1. 47.1 مربع سم
2. 25.12 سم
3. 3.85 مربع سم
4. 214 مربع سم
5. 4 سم
6. (1) 154 مربع سم (2) 25.7 مربع سم (3) 128.3 مربع سم
7. 10.2 مربع سم
8. 7.3 سم ; 22 سم
9. (1)  $90^\circ$  (2) 22 سم
10. (1) 12.83 مربع سم (2) 89.83 مربع سم (3) 115.5 مربع سم
11. 3.5 سم
12.  $x = 154$  مربع سم ;  $y = 38.5$  مربع سم ;  $z = 101.5$  مربع سم
13. (1) 84.87 مربع سم (2) 25.67 مربع سم (3) 77.01 مربع سم (4) 7.86 مربع سم

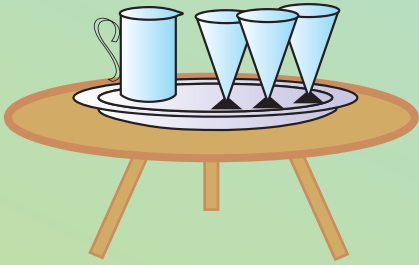
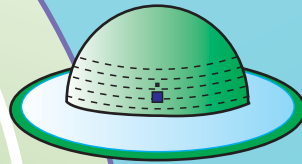
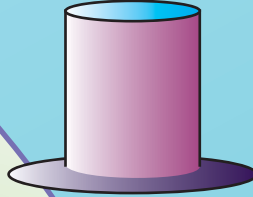
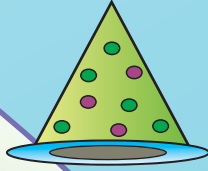
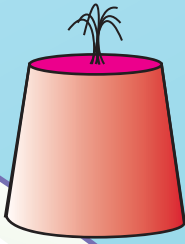
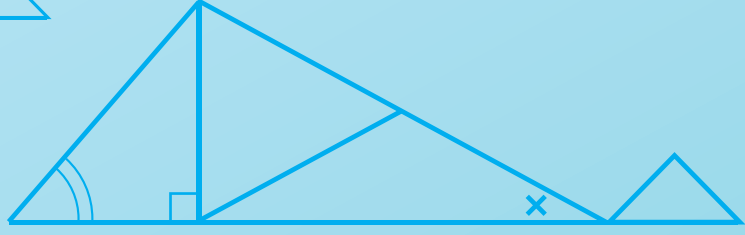
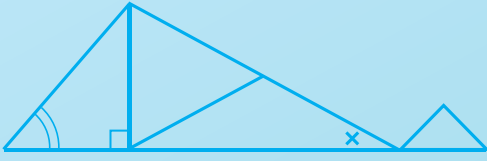
### 7.4 مشقی سیٹ

1. 3.2 مربع سم
2. 9.08 مربع سم
3. 0.65625 مربع اکائی
4. 20 سم
5. 20.43 مربع سم ; 686.07 مربع سم

## مجموعہ سوالات - 7

1. (1) A (2) D (3) B (4) B (5) A (6) A (7) D (8) C.
2. 20.35 لٹر
3. 7830 گولیاں
4. 2800 سکے ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)
5. 6336 روپے
6. 452.16 مربع سم ; 3385.94 گرام
7. 2640 مربع سم
8. 108 میٹر
9.  $150^\circ$  ;  $5\pi$  سم
10. 39.28 مربع سم





مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پینتک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل،

پونہ - ۴۱۱۰۰۴



उर्दू गणित इ. १० वी भाग-२

₹ 77.00