2 पायथागोरस का प्रमेय

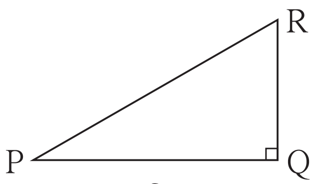
आओ सीखें

- पायथागोरस का त्रिक्
- ज्यामितीय माध्य का प्रमेय
- पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन
- समकोण त्रिभुजों की समरूपता
- पायथागोरस का प्रमेय
- अपोलोनियस का प्रमेय

थोड़ा याद करें

पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.1

आकृति 2.1 देखिए Δ PQR में $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

इसे हम $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ऐसा लिखेंगे ।

Δ PQR में भुजा PQ, QR तथा PR की लंबाई क्रमशः r, p और q इन चिन्हों से दर्शाई जाती है । इस प्रकार आकृति 2.1 के संदर्भ में पायथागोरस के प्रमेय को $q^2 = p^2 + r^2$ ऐसा भी लिखा जा सकता है।

पायथागोरस के त्रिक् :

प्राकृत संख्याओं के त्रिक् में यदि बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर हो तो उन्हें पायथागोरस का त्रिक् कहते हैं ।

उदाहरणार्थ : (11, 60, 61) इन संख्याओं के त्रिक् में,

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ और $121 + 3600 = 3721$

यहाँ पर बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है ।

$\therefore$ 11, 60, 61 यह 'पायथागोरस का त्रिक्' है ।

उसी प्रकार (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) भी पायथागोरस के त्रिक् हैं, इसकी जाँच करें ।

'पायथागोरस के त्रिक्' की संख्याओं को किसी भी क्रम से लिखा जा सकता है ।

अधिक जानकारी हेतू :

पायथागोरस के त्रिक् प्राप्त करने का सूत्र :

यदि a, b, c प्राकृत संख्या हों और $a > b$, तो $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ ये पायथागोरस के त्रिक् हैं ।

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) तथा (III) से, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ यह पायथागोरस का त्रिक् है ।

पायथागोरस के विभिन्न त्रिक् प्राप्त करने के लिए इसे सूत्र के रूप में उपयोग करते हैं ।

उदाहरणार्थ, $a = 5$ और $b = 3$ हो तो,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ और $2ab = 30$.

(34, 16, 30) ये पायथगोरस के त्रिक् हैं, इसे आप जाँच करके देखिए ।

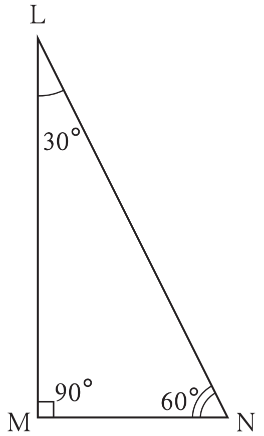
a और b के लिए भिन्न प्राकृत संख्या लेकर सूत्र के आधार पर पायथागोरस के 5 त्रिक् तैयार कीजिए ।

पिछली कक्षा में हमने **30°– 60°– 90°** और **45°– 45°– 90°** कोण वाले समकोण त्रिभुजों के गुणधर्म देखे हैं ।

(I) 30°–60°–90° माप वाले त्रिभुज का गुणधर्म

यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण 30° तथा 60° हों तो 30° मापवाले कोण की सम्मुख भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई के आधी तथा 60° मापवाले कोण की सम्मुख भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई का $\frac{\sqrt{3}}{2}$ गुना होती है ।

आकृति 2.2 देखिए Δ LMN में, $\angle L = 30°$, $\angle N = 60°$, $\angle M = 90°$



आकृति 2.2

$\therefore$ 30° माप वाले कोण की सम्मुख भुजा MN = $\frac{1}{2} \times$ LN

60° माप वाले कोण की सम्मुख भुजा LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN

यदि LN = 6 सेमी हो तो MN तथा LM का मान ज्ञात कीजिए ।

MN = $\frac{1}{2} \times$ LN

$= \frac{1}{2} \times 6$

= 3 सेमी

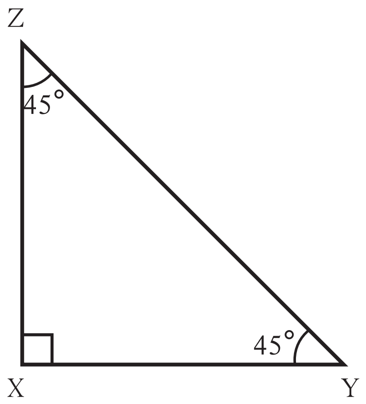
LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$

= $3\sqrt{3}$ सेमी

(II) $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ माप वाले त्रिभुज का गुणधर्म

यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यून कोणों के माप 45° तथा 45° हों तो समकोण को समाविष्ट करने वाली प्रत्येक भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई का $\frac{1}{\sqrt{2}}$ गुना होती है ।



आकृति 2.3

आकृति 2.3 Δ XYZ में, $\angle X = 90^\circ$,

$\angle Z = \angle Y = 45^\circ$

तब $XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$

$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$

यदि $ZY = 3\sqrt{2}$ सेमी तो XY और XZ का मान ज्ञात कीजिए ।

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

$\therefore$ XY = XZ = 3 सेमी

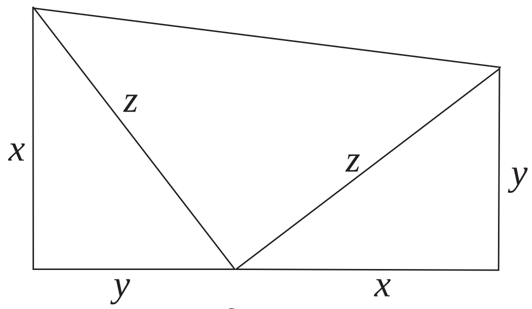
कक्षा 7 वीं में हमने क्षेत्रफल की सहायता से पायथागोरस के प्रमेय का अध्ययन किया है । उसमें हमने चार समकोण त्रिभुज तथा एक वर्ग के क्षेत्रफलों का उपयोग किया था । इसी प्रमेय की उपपत्ति को हम कुछ विभिन्न प्रकार से दे सकते हैं ।

कृति :

आकृति में दर्शाएअनुसार दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज लीजिए । उनके कर्णों की लंबाई के बराबर दो भुजावाला एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज लीजिए । इन तीनों समकोण त्रिभुजों की सहायता से एक समलंब चतुर्भुज तैयार कीजिए ।

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योगफल) × ऊँचाई ;

इस सूत्र का उपयोग कर उनके क्षेत्रफल तीनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योगफल के बराबर लिखकर पायथागोरस के प्रमेय को सिद्ध कीजिए ।



आकृति 2.4

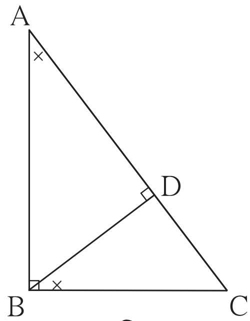
आओ जानें

अब हम पायथगोरस के प्रमेय की उपपत्ति को समरूप त्रिभुजों के आधार पर सिद्ध करेंगे ।

इसे सिद्ध करने के लिए आवश्यक समकोण त्रिभुजों की समरूपता संबंधी गुणधर्म का अध्ययन करेंगे ।

समरूपता और समकोण त्रिभुज (Similarity and right angled triangle)

प्रमेय : **समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींचे गए शीर्षलंब से निर्मित दोनों त्रिभुज परस्पर तथा मूल समकोण त्रिभुज के समरूप होते हैं ।**



आकृति 2.5

दत्त : Δ ABC में $\angle$ ABC = 90°,

रेख BD $\perp$ रेख AC, A-D-C

साध्य : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$

उपपत्ति : Δ ADB और Δ ABC में

$\angle DAB \cong \angle BAC$ ...(सामान्य कोण)

$\angle ADB \cong \angle ABC$ ...(प्रत्येक कोण 90°)

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ...(को को कसौटी)...(I)

उसी प्रकार Δ BDC और Δ ABC में

$\angle BCD \cong \angle ACB$ ...(सामान्य कोण)

$\angle BDC \cong \angle ABC$ ...(प्रत्येक कोण 90°)

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ...(को को कसौटी)..(II)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC$ (कथन (I) तथा (II) से) ...(III)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$ (कथन (I), (II) तथा (III) से..... संक्रामकता)

ज्यामितीय माध्य का प्रमेय (Theorem of geometric mean)

प्रमेय : **समकोण त्रिभुज में शीर्षबिंदु से कर्ण पर खींचा गया लंबरेखाखंड, कर्ण द्वारा विभाजित होने वाले रेखाखंडों का ज्यामितीय माध्य होता है ।**

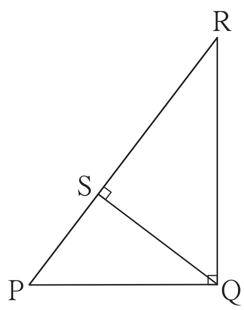
उपपत्ति : समकोण त्रिभुज PQR में, रेख QS $\perp$ कर्ण PR

$\Delta QSR \sim \Delta PSQ$ .... (समकोण त्रिभुजों की समरूपता)

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$



आकृति 2.6

$\therefore$ शीर्षलंब QS यह रेख PS और रेख SR का 'ज्यामितीय माध्य' है ।

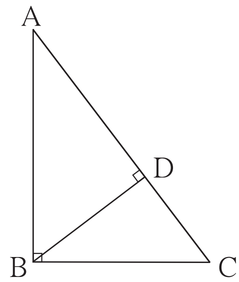
पायथागोरस का प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।

दत्त : Δ ABC में, $\angle ABC = 90^\circ$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदु B से भुजा AC पर एक लंब BD खींचिए A-D-C



आकृति 2.7

उपपत्ति : समकोण Δ ABC में रेख BD $\perp$ कर्ण AC ..... (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (समकोण त्रिभुजों की समरूपता)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ - (समरूप त्रिभुजों की संगतभुजाएँ)

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

इसीप्रकार, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ - (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) तथा (II) का योग करनेपर

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC\,(AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A-D-C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

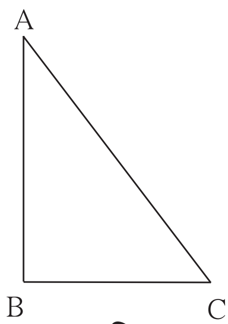
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

पायथागोरस के प्रमेय का विलोम (Converse of Pythagoras theorem)

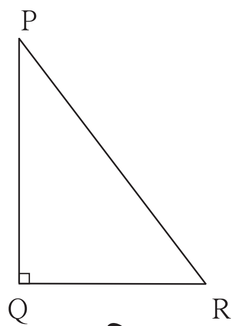
यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है ।

दत्त : Δ ABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



आकृति 2.8



आकृति 2.9

रचना : Δ PQR इसप्रकार खींचिए कि, AB = PQ, BC = QR , $\angle$ PQR = 90°.

उपपत्ति : Δ PQR में, $\angle$ Q = 90°

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (पायथागोरस का प्रमेय)

$= AB^2 + BC^2$ .... (रचना)

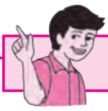
$= AC^2$ .... (दत्त)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

$\therefore$ PR = AC

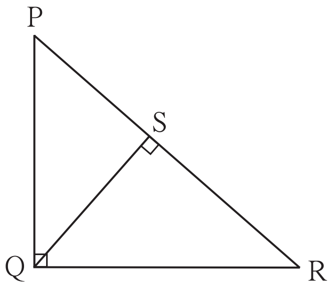
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (भु भु भु कसौटी)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90°$



इसे ध्यान में रखें

(1) (a) समकोण त्रिभुजों की समरूपता



आकृति 2.10

Δ PQR में $\angle$ Q = 90° , रेख QS $\perp$ रेख PR यहाँ $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ इसी पद्‌धति से आकृति में बनने वाले सभी समकोण त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं ।

(b) ज्यामितीय माध्य का प्रमेय :

उपर्युक्त आकृति में $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ रेख QS यह रेख PS तथा रेख SR इन रेखाखंडों का ज्यामितीय माध्य है ।

(2) पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।

(3) पायथागोरस के प्रमेय का विलोम :

यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है ।

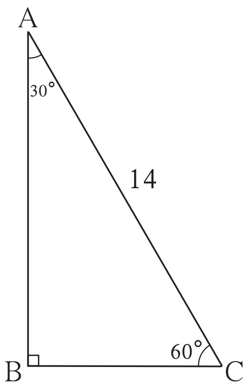
इसके आलावा एक और गुणधर्म अधिक उपयोगी है । उसे भी ध्यान में रखें ।

(4) यदि समकोण त्रिभुज में एक भुजा कर्ण की आधी हो तो उस भुजा के सम्मुख कोण 30° होता है । यह गुणधर्म 30°-60°-90° के प्रमेय का विलोम है ।

हल किए हुए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 2.11 देखिए । Δ ABC में $\angle$ B= 90°, $\angle$ A= 30°, AC=14 तो AB तथा BC का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 2.11

Δ ABC में,

$\angle B = 90°,\ \angle A = 30°,\ \therefore\ \angle C = 60°$

30°– 60°– 90° के प्रमेयानुसार,

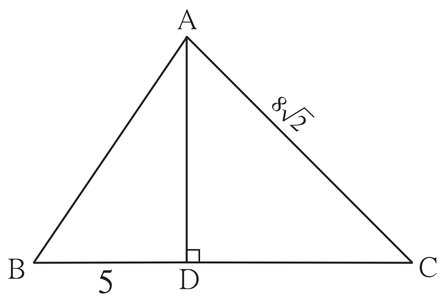
$BC = \frac{1}{2} \times AC$ | $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$ | $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$BC = 7$ | $AB = 7\sqrt{3}$

उदा. (2) आकृति 2.12 देखिए Δ ABC में रेख AD $\perp$ रेख BC, $\angle$ C = 45°, BD = 5 और AC = $8\sqrt{2}$, तो AD और BC का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 2.12

Δ ADC में,

$\angle ADC = 90°,\ \angle C = 45°,\ \therefore\ \angle DAC = 45°$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ... (45°–45°–90° के प्रमेयानुसार)

$\therefore\ DC = 8 \quad \therefore\ AD = 8$

BC = BD + DC

= 5 + 8

= 13

उदा. (3) आकृति 2.13 में $\angle$ PQR = 90°, रेख QN $\perp$ रेख PR, PN = 9, NR = 16 तो QN ज्ञात कीजिए ।

हल : Δ PQR में, रेख QN $\perp$ रेख PR

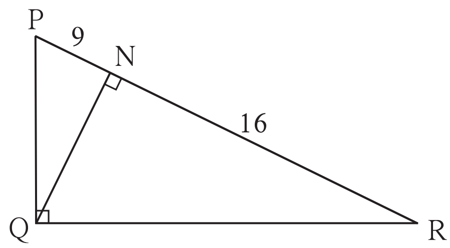
$\therefore\ QN^2 = PN \times NR$ .... (ज्यामितिय माध्य का प्रमेय)

$\therefore\ QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

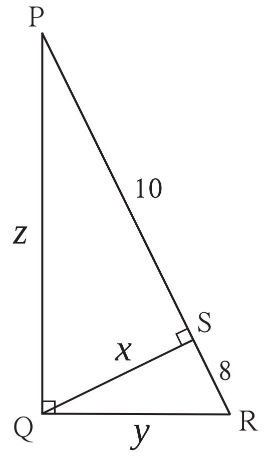
$= 3 \times 4$

$= 12$



आकृति 2.13

उदा. (4) आकृति 2.14 देखो Δ PQR में $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR तो x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.14

हल : Δ PQR में, $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR

$QS = \sqrt{PS \times SR}$ .... (ज्यामितिय माध्य के प्रमेय)

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore \quad x = 4\sqrt{5}$

Δ QSR में, $\angle$ QSR = 90°

$\therefore \; QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore \; QR = 12$

Δ PSQ में, $\angle$ QSP = 90°

$\therefore \; PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

$= 180$

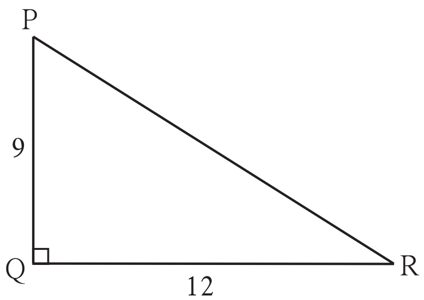
$= 36 \times 5$

$\therefore \; PQ = 6\sqrt{5}$

उत्तर $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

उदा. (5) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमश: 9 सेमी तथा 12 सेमी हों तो उस त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : Δ PQR में, $\angle$ Q = 90°



आकृति 2.15

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पायथागोरस प्रमेयानुसार)

$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore \; PR^2 = 225$

$\therefore \; PR = 15$

त्रिभुज का कर्ण = 15 सेमी

उदा. (6) Δ LMN में $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ तो निश्चित कीजिए कि Δ LMN यह समकोण त्रिभुज है या नहीं । ($\angle$ L, $\angle$ M और $\angle$ N की सम्मुख भुजाएँ क्रमशः l, m तथा n हैं)

हल : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$

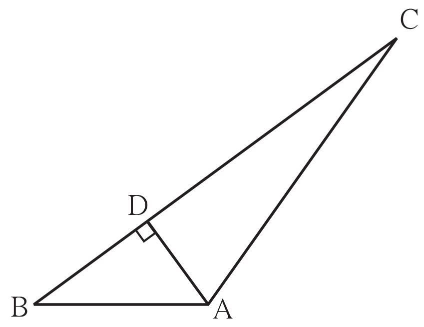
$l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$

$\therefore m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ पायथागोरस के प्रमेय के विलोमानुसार Δ LMN समकोण त्रिभुज है ।

उदा. (7) आकृति 2.16 देखिए ; Δ ABC में, रेख AD $\perp$ रेख BC, तो सिद्ध कीजिए :

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



आकृति 2.16

हल : Δ ADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

Δ ADB में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) और (II) से]

$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

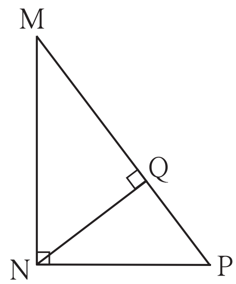
प्रश्नसंग्रह 2.1

1. नीचे दिए गए त्रिकों में से पायथागोरस के त्रिक् पहचानिए । कारण सहित लिखिए ।

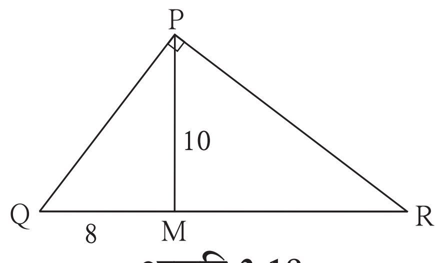
(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

(4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. आकृति 2.17 में $\angle$ MNP = 90°, रेख NQ $\perp$ रेख MP, MQ = 9, QP = 4 तो NQ का मान ज्ञात कीजिए ।



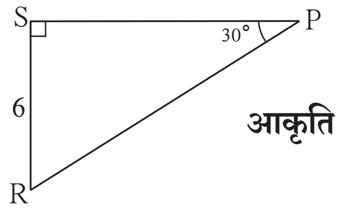
आकृति 2.17



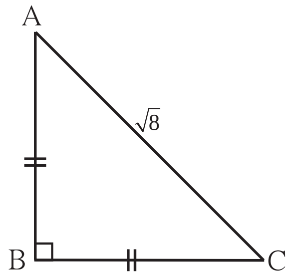
आकृति 2.18

3. आकृति 2.18 में $\angle$ QPR = 90°, रेख PM $\perp$ रेख QR और Q-M-R, PM = 10, QM = 8 तो QR का मान ज्ञात कीजिए ।

4. आकृति 2.19 Δ PSR में दी गई जानकारी के आधार पर RP और PS ज्ञात कीजिए ।



आकृति 2.19



आकृति 2.20

5. आकृति 2.20 में दी गई जानकारी के आधारपर AB और BC ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए ।

AB = BC .... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore$ $\angle$ BAC = $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore$ AB = BC = $\boxed{\quad\quad}$ $\times$ AC

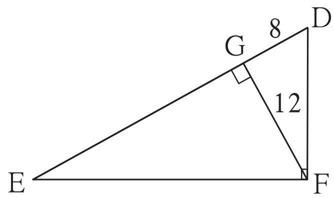
= $\boxed{\quad\quad}$ $\times$ $\sqrt{8}$

= $\boxed{\quad\quad}$ $\times$ $2\sqrt{2}$

= $\boxed{\quad\quad}$

6. किसी वर्ग के विकर्ण की लंबाई 10 सेमी हो तो उसकी भुजा की लंबाई तथा परिमिति ज्ञात कीजिए ।

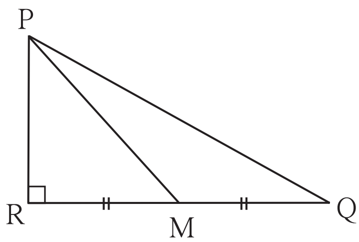
7. आकृति 2.21 में $\angle$ DFE = 90°, रेख FG $\perp$ रेख ED. यदि GD = 8, FG = 12, तो (1) EG (2) FD (3) EF का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 2.21

8. किसी आयत की लंबाई 35 सेमी तथा चौड़ाई 12 सेमी हो तो उस आयत के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

9★. आकृति 2.22 में M यह भुजा QR का मध्यबिंदु है । $\angle$ PRQ = 90° तो सिद्ध कीजिए कि, $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



आकृति 2.22

10★. किसी रास्ते के दोनों ओर स्थित घरों की दीवारें एक दूसरे के समांतर हैं । 5.8 मी लंबाई वाली सीढ़ी का सिरा रास्ते पर हो और उसका ऊपरी सिरा घर के 4 मीटर ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँचता है । उसी स्थान से सीढ़ी को रास्ते के दूसरी ओर झुकाने पर उसका ऊपरी सिरा दूसरे घर के 4.2 मीटर ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँचता हो तो रास्ते की चौड़ाई ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन

पायथागोरस के प्रमेय में समकोण त्रिभुज का कर्ण और समकोण बनाने वाली भुजाओं में परस्पर संबंध अर्थात समकोण की सम्मुख भुजा और अन्य दो भुजाओं मे संबंध बताया गया है ।

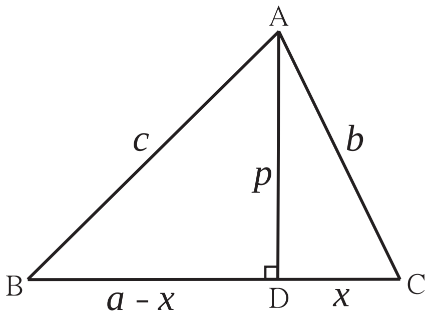
त्रिभुज में न्यूनकोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध, इसी प्रकार अधिक कोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध पायथागोरस के प्रमेय से निश्चित किया जाता है । यह संबंध निम्नलिखित उदाहरणों से समझिए ।

उदा.(1) Δ ABC में, $\angle$ C न्यूनकोण है, रेख AD $\perp$ रेख BC तो सिद्ध कीजिए कि :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

दी गई आकृति में, AB = c, AC = b, AD = p, BC = a, DC = x माना ।

$\therefore$ BD = $a - x$



आकृति 2.23

Δ ADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$c^2 = (a-x)^2 + \square$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square$ .... (I)

Δ ADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$b^2 = p^2 + \square$

$p^2 = b^2 - \square$ .... (II)

(II) में p^2 का मान, (I) में रखनेपर,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

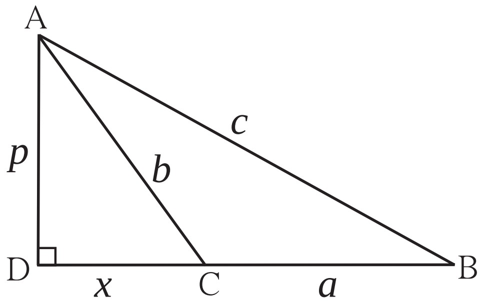
उदा.(2) Δ ABC में, $\angle$ ACB अधिक कोण है, रेख AD $\perp$ रेख BC, तो सिद्ध कीजिए कि :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

मान लीजिए AD = p, AC = b, AB = c,

BC = a, DC = x (माना)

DB = $a + x$



आकृति 2.24

Δ ADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)

इसी प्रकार Δ ADC में,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \quad \text{..........} \quad (II)$$

$\therefore$ (I) में (II) के p^2 का मान रखनेपर,

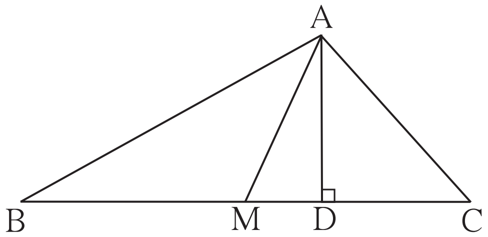
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

अपोलोनियस का प्रमेय (Appollonius' Theorem)

यदि Δ ABC में, बिंदु M भुजा BC का मध्य बिंदु हो, तो $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृति 2.25

दत्त : Δ ABC में बिंदु M भुजा BC का मध्यबिंदु है ।

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख AD $\perp$ रेख BC खींचते हैं ।

उपपत्ति : यदि रेख AM रेख BC पर लंब नहीं है, तो $\angle$ AMB और $\angle$ AMC में से एक अधिक कोण और दूसरा न्यूनकोण होता है ।

आकृति में $\angle$ AMB अधिक कोण और $\angle$ AMC न्यूनकोण है ।

उपर्युक्त उदाहरण (1) तथा उदाहरण (2) से,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

और $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) तथा (II) को जोड़नेपर,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

यदि रेख AM $\perp$ भुजा BC तो इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।

इस उदाहरण के आधारपर त्रिभुज की भुजा और माध्यिका में परस्पर संबंध समझा जा सकता है ।

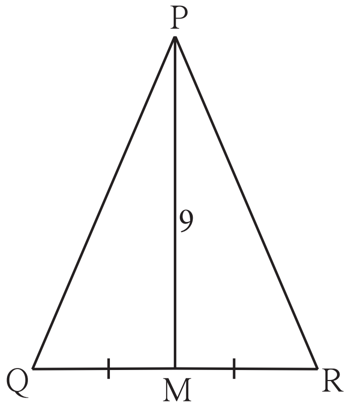
इसी को 'अपोलोनियस का प्रमेय' कहते हैं ।

हल किए हुए उदाहरण

उदा.(1) आकृति 2.26 Δ PQR में, रेख PM माध्यिका है PM = 9 और $PQ^2 + PR^2 = 290$, तो QR ज्ञात कीजिए ।

हल : Δ PQR में, रेख PM माध्यिका है ।

बिंदु M रेख QR का मध्यबिंदु है ।



आकृति 2.26

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (अपोलोनियस के प्रमेयानुसार)

$$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$$

$$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$

$$290 = 162 + 2QM^2$$

$$2QM^2 = 290 - 162$$

$$2QM^2 = 128$$

$$QM^2 = 64$$

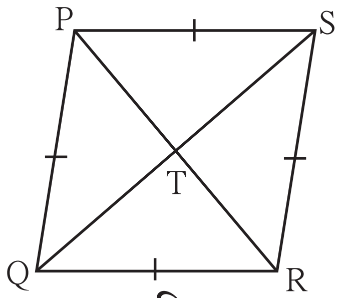
$$QM = 8$$

$$\therefore \quad QR = 2 \times QM$$

$$= 2 \times 8$$

$$= 16$$

उदा.(2) सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज के विकर्णों का योगफल उसकी भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.27

दत्त : □ PQRS एक समचतुर्भुज है जिसमें विकर्ण PR और विकर्ण SQ परस्पर बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

साध्य : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

उपपत्ति : समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

$\therefore$ अपोलोनियस के प्रमेयानुसार,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) को जोड़ने पर,

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... (RT = PT)

$$= 4PT^2 + 4QT^2$$

$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$

$$= PR^2 + QS^2$$

(इस उदाहरण को हम पायथागोरस के प्रमेय की सहायता से भी हल कर सकते हैं ।)

प्रश्नसंग्रह 2.2

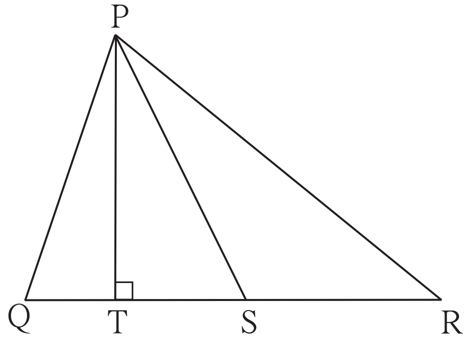
1. Δ PQR में, बिंदु S यह भुजा QR का मध्यबिंदु है, यदि PQ = 11, PR = 17, PS = 13 हो तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

2. Δ ABC में, AB = 10, AC = 7, BC = 9 तो बिंदु C से भुजा AB पर खींची गई माध्यिका की लंबाई कितनी होगी ?

3. आकृति 2.28 में रेख PS यह Δ PQR की माध्यिका है और PT $\perp$ QR तो सिद्ध कीजिए कि,

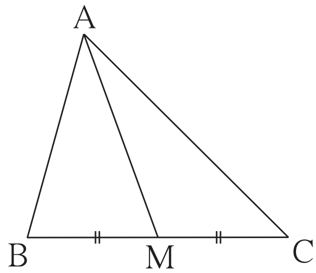
(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



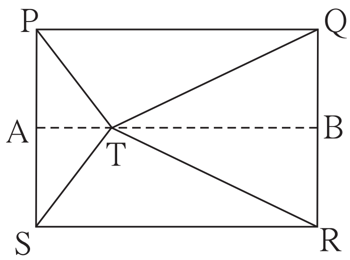
आकृति 2.28

4. आकृति 2.29 में, Δ ABC में बिंदु M यह भुजा BC का मध्यबिंदु है, यदि $AB^2 + AC^2$ = 290 सेमी, AM = 8 सेमी, तो BC ज्ञात कीजिए ।



आकृति 2.29

5*. आकृति 2.30 में दर्शाएनुसार बिंदु T यह आयत PQRS के अंतर्भाग में स्थित है । तो सिद्ध कीजिए कि, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृति में दर्शाएअनुसार रेख AB || भुजा SR ऐसा खींचिए कि A-T-B)



आकृति 2.30

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के दिए गए उत्तरों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) निम्नलिखित में से कौन-सा पायथागोरस का त्रिक् है ?

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं के वर्गों का योगफल 169 हो तो उसके कर्ण की लंबाई कितनी होगी ?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) निम्नलिखित में से कौन-से दिनांक की संख्या पायथागोरस का त्रिक् हैं?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) a, b, c भुजावाले त्रिभुज में यदि $a^2 + b^2 = c^2$ हो तो वह त्रिभुज किस प्रकार का होगा?

(A) अधिक कोण त्रिभुज (B) न्यूनकोण त्रिभुज (C) समकोण त्रिभुज (D)समबाहु त्रिभुज

(5) किसी चतुर्भुज का विकर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी हो तो उसकी परिमिति .... होगी।

(A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी (C) 20 सेमी (D) 40 सेमी

(6) किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींचे गए शीर्षलंब से कर्ण के 4 सेमी तथा 9 सेमी लंबाईवाले दो भाग होते हैं, तो उस शीर्षलंब की लंबाई कितनी होगी?

(A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

(7) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजा की लंबाई 24 सेमी तथा 18 सेमी हों तो उसके कर्ण की लंबाई .... होगी।

(A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

(8) Δ ABC में, यदि AB = $6\sqrt{3}$ सेमी, AC = 12 सेमी और BC = 6 सेमी हो, तो $\angle$ A का माप कितना होगा?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. निम्नलिखित उपप्रश्नों को हल कीजिए।

(1) किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ हो तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

(2) किसी त्रिभुज के भुजाओं की लंबाई क्रमश: 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी हो तो क्या वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा ? कारण सहित लिखिए।

(3) किसी आयत की भुजाएँ क्रमश: 11 सेमी तथा 60 सेमी हों तो उसके विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(4) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमश: 9 सेमी तथा 12 सेमी हों तो उस त्रिभुज के कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(5) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के भुजा की लंबाई x हो, तो उसके कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(6) Δ PQR में; PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; तो क्या Δ PQR समकोण त्रिभुज है ? यदि है, तो उसका कौन-सा कोण समकोण होगा?

3. Δ RST में, $\angle$ S = 90°, $\angle$ T = 30°, RT = 12 सेमी हो तो RS तथा ST का मान ज्ञात कीजिए।

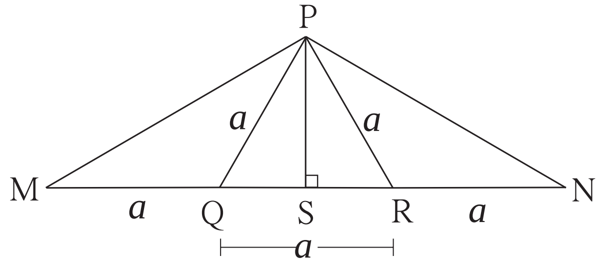
4. किसी आयत का क्षेत्रफल 192 वर्ग सेमी तथा उसकी लंबाई 16 सेमी हो, तो उस आयत के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

5★. किसी समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $\sqrt{3}$ सेमी हो, तो उस त्रिभुज के भुजा की लंबाई तथा उसकी परिमिति ज्ञात कीजिए।

6. Δ ABC में रेख AP माध्यिका है । यदि BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ तो AP ज्ञात कीजिए ।

7★ समकोण त्रिभुज ABC में आधार BC पर बिंदु P इस प्रकार है कि PC = $\frac{1}{3}$ BC, यदि AB = 6 सेमी तो AP ज्ञात कीजिए ।

8. आकृति 2.31 में M–Q–R–N दी गई जानकारी के आधार पर सिद्‌ध कीजिए कि :
PM = PN = $\sqrt{3} \times a$

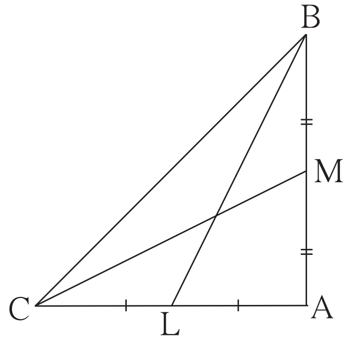


आकृति 2.31

9. सिद्‌ध कीजिए कि, समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योगफल उस चतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।

10. सीमा और नेहा ने एक ही स्थान से पूर्व और उत्तर दिशा में एक ही गति से चलना प्रारंभ किया, दो घंटे पश्चात उनके बीच की दूरी $15\sqrt{2}$ किमी हो तो उनकी प्रतिघंटा गति ज्ञात कीजिए ।

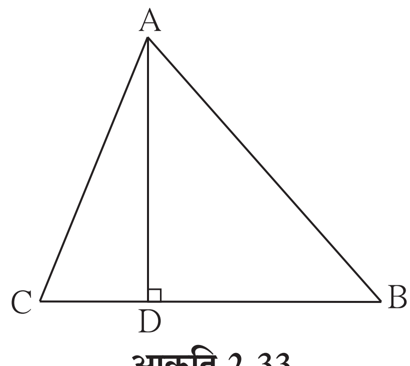
11★. Δ ABC में $\angle$ BAC = 90°, रेख BL तथा रेख CM, यह Δ ABC की माध्यिकाएँ हों तो सिद्‌ध कीजिए कि,
$4(BL^2 + CM^2) = 5\ BC^2$



आकृति 2.32

12. किसी समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं के वर्गों का योगफल 130 वर्ग सेमी हो तथा उसके एक विकर्ण की लंबाई 14 सेमी हो तो उसके दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

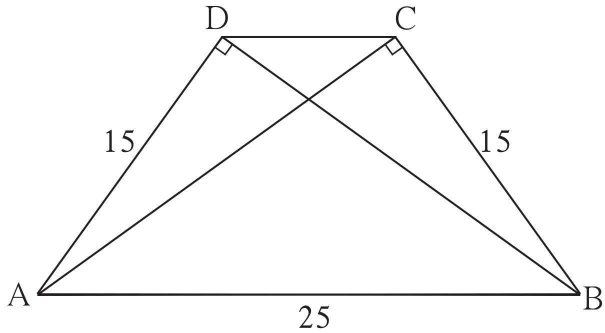
13. Δ ABC में रेख AD $\perp$ रेख BC और DB = 3CD, तो सिद्‌ध कीजिए कि :
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



आकृति 2.33

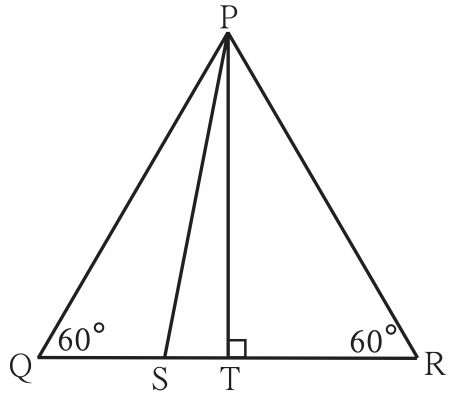
14★. किसी समद्‌विबाहु त्रिभुज में सर्वांगसम भुजाओं की लंबाई 13 सेमी तथा आधार की लंबाई 10 सेमी हो तो उस त्रिभुज की माध्यिकाओं के संगमन बिंदु से आधार के सम्मुख शीर्ष बिंदु तक की दूरी ज्ञात कीजिए ।

15. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
रेख AB || रेख DC
रेख BD $\perp$ रेख AD,
रेख AC $\perp$ रेख BC,
यदि AD = 15, BC = 15 और AB = 25
हो तो A($\square$ ABCD) का मान कितना होगा ?



आकृति 2.34

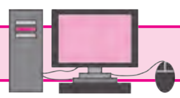
16★. संलग्न आकृति में Δ PQR एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु S यह रेख QR पर इस प्रकार है कि,
$QS = \frac{1}{3} QR$ तो सिद्‌ध कीजिए कि;
$9 PS^2 = 7 PQ^2$



आकृति 2.35

17★. Δ PQR में रेख PM यह माध्यिका है । यदि PQ = 40, PR = 42 और PM = 29, तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

18. Δ ABC में रेख AM यह माध्यिका है । यदि AB = 22, AC = 34, BC = 24, तो AM की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



ICT Tools or Links

इंटरनेट से 'Story on the life of Pythagoras' की जानकारी प्राप्त कर के Slide show तैयार कीजिए ।