5 निर्देशांक भूमिति

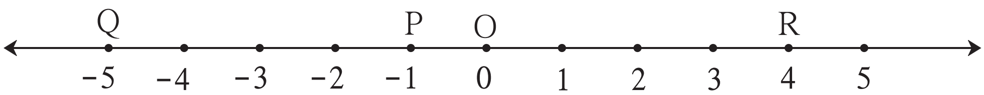
आओ सीखें

- दूरी सूत्र
- विभाजन सूत्र
- रेखा का ढाल

थोड़ा याद करें

हम संख्या रेखा पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी मापना जानते हैं ।

बिंदुओं P,Q और R के निर्देशांक क्रमश: −1,−5 और 4 हो तो रेख PQ,और रेख QR की दूरी ज्ञात कीजिए ।



आकृति 5.1

बिंदु A और B के निर्देशांक क्रमश: x_1 और x_2 हैं और $x_2 > x_1$ हो तो

रेखाखंड AB की दूरी = d(A,B) = $x_2 - x_1$

आकृति में दर्शाए अनुसार बिंदु P,Q और R के निर्देशांक क्रमश: −1,−5 और 4 हैं ।

$\therefore$ d(P, Q) = (−1)−(−5) = −1 + 5 = 4

और d(Q, R) = 4 − (−5) = 4 + 5 = 9

इसी संकल्पना का उपयोग करके हम प्रतल XY में स्थित तथा एक ही अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करेंगे ।

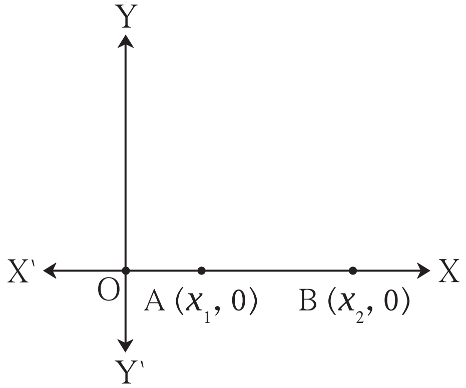
आओ जानें

(1) एक ही अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना :

एक ही अक्ष पर दो बिंदु अर्थात एक ही संख्या रेखा पर दो बिंदु । यह ध्यान में रखें कि X अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक (2, 0), ($\frac{-5}{2}$, 0), (8, 0) हैं, और Y अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक (0, 1), (0, $\frac{17}{2}$) और (0, −3) होते हैं ।

X अक्ष का ऋण निर्देशांक दर्शाने वाला भाग किरण OX′ है तथा Y अक्ष का ऋण निर्देशांक दर्शाने वाला भाग किरण OY′ है ।

(i) X-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।

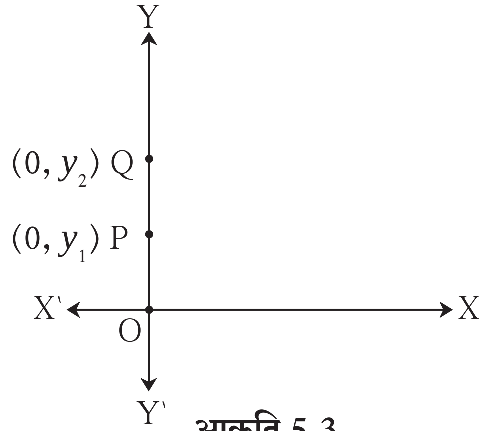


आकृति 5.2

उपर्युक्त आकृति में,
A(x_1, 0) और B(x_2, 0) ये दो बिंदु X- अक्ष पर इस प्रकार हैं कि, $x_2 > x_1$

$\therefore$ d(A, B) = $x_2 - x_1$

(ii) Y-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।

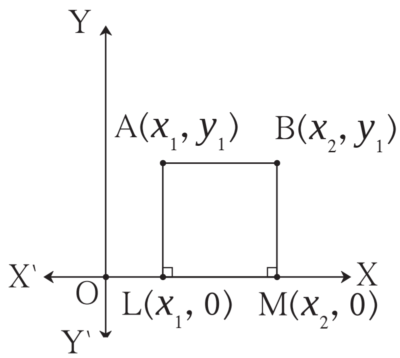


आकृति 5.3

उपर्युक्त आकृति में,
P(0, y_1) और Q(0, y_2) ये दो बिंदु Y- अक्ष पर इस प्रकार हैं, $y_2 > y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

(2) दो बिंदुओं को जोड़ने वाले प्रतल XY पर स्थित रेखाखंड किसी एक अक्ष के समांतर हों तो उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।



आकृति 5.4

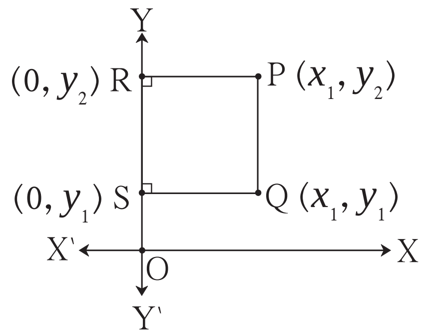
(i) आकृति में रेख AB यह X- अक्ष के समांतर है । इसीलिए बिंदु A तथा बिंदु B के y निर्देशांक समान हैं ।
X-अक्ष पर रेख AL और रेख BM लंब खींचिए।

$\therefore$ □ ABML एक आयत है ।

$\therefore$ AB = LM

परंतु, LM = $x_2 - x_1$

$\therefore$ d(A,B) = $x_2 - x_1$



आकृति 5.5

(ii) आकृति में रेख PQ यह Y- अक्ष के समांतर है । इसीलिए बिंदु P और बिंदु Q के x निर्देशांक समान हैं ।
Y-अक्ष पर रेख PR और रेख QS लंब खींचिए।

$\therefore$ □ PQSR एक आयत है ।

$\therefore$ PQ = RS

परंतु, RS = $y_2 - y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

कृति :

आकृति में रेख AB || Y–अक्ष और रेख CB || X–अक्ष है। बिंदु A और C के निर्देशांक दिए गए हैं।

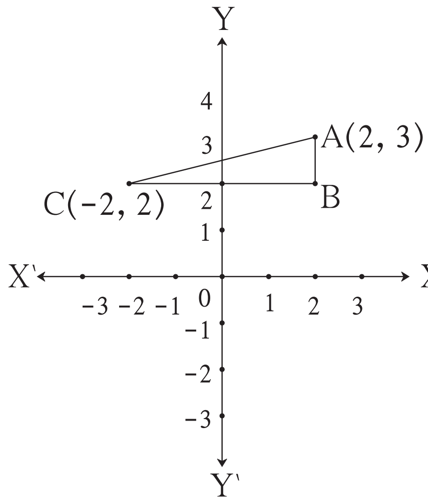
AC ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई चौखटों में लिखिए।

Δ ABC समकोण त्रिभुज है।

पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$(AB)^2 + (BC)^2 =$ [ ]

AB और BC प्राप्त करने के लिए बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात करेंगे।



आकृति 5.6

CB || X– अक्ष ∴ B का y निर्देशांक = [ ]

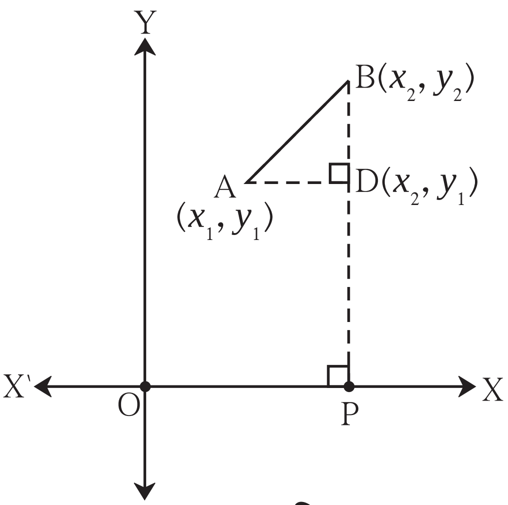
BA || Y– अक्ष ∴ B का x निर्देशांक = [ ]

AB = [3] − [ ] = [ ] BC = [ ] − [ ] = [4]

∴ AC^2 = [ ] + [ ] = [ ] ∴ AC = [$\sqrt{17}$]

आओ जानें

दूरी सूत्र (Distance formula)



आकृति 5.7

आकृति 5.7 में, A(x_1, y_1) और B(x_2, y_2) यह प्रतल XY पर स्थित कोई दो बिंदु हैं।

बिंदु B से X–अक्ष पर BP लंब खींचिए। उसी प्रकार बिंदु A से रेखा BP पर AD लंब खींचिए जो Y–अक्ष के समांतर हो।

∴ बिंदु D का x निर्देशांक x_2 है।

रेख AD यह X–अक्ष समांतर है।

∴ बिंदु D का y निर्देशांक y_1 है।

∴ $AD = d(A, D) = x_2 - x_1$,

$BD = d(B, D) = y_2 - y_1$

समकोण Δ ABD में, पायथागोरस के प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

इस निष्कर्ष को दूरी सूत्र कहते हैं।

यह ध्यान में रखें कि, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

आकृति 5.6 की कृति में हमने रेख AC की लंबाई ज्ञात करने के लिए AB और BC की लंबाई ज्ञात कर पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग किया था। अब दूरी-सूत्र की सहायता से हम उन रेखाखंडों की लंबाई ज्ञात करेंगे।

A(2, 3) और C(−2, 2) दिए गए हैं।

माना $A(x_1, y_1)$ और $C(x_2, y_2)$

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

दूरी सूत्र से,

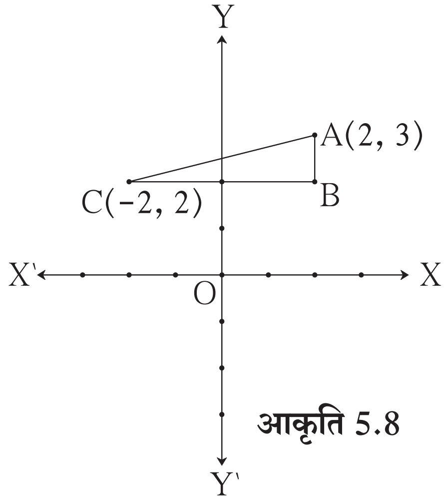
$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+1}$$

$$= \sqrt{17}$$



आकृति 5.8

रेखा AB || Y-अक्ष और रेखा BC || X-अक्ष

∴ बिंदु B का निर्देशांक (2, 2) है।

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

आकृति 5.1 में बिंदु P तथा बिंदु Q की दूरी (−1) − (−5) = 4; हमने ज्ञात किया था। इसी बिंदु के निर्देशांक प्रतल में (−1, 0) तथा (−5, 0) रहेंगे। दूरी सूत्र की सहायता से बिंदु P तथा बिंदु Q की दूरी उतनी ही रहेगी, इसकी जाँच कीजिए।

इसे ध्यान में रखें

- आरंभ बिंदु O के निर्देशांक (0, 0) होते हैं। अर्थात P के निर्देशांक (x, y) हो तो, $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ये दोनों बिंदु प्रतल XY में स्थित हों तो

  $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

  अर्थात, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) P(−1, 1), Q(5,−7) इन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$

$x_1 = -1,\quad y_1 = 1,\quad x_2 = 5,\quad y_2 = -7$

दूरी सूत्र के अनुसार $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2+[(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2+(-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$

$\therefore$ बिंदु P और Q के बीच की दूरी = 10

उदा. (2) सिद्ध कीजिए कि, A(−3, 2), B(1, −2) और C(9, −10) एकरेखीय बिंदु हैं ।

हल : यदि d(A, B); d(B, C) और d(A, C) इनमें से किन्हीं भी दो दूरियों का योगफल तीसरी दूरी के बराबर हो तो बिंदु A, B, C एकरेखीय होंगे ।

$\therefore$ d(A, B), d(B, C) और d(A, C) ज्ञात करेंगे ।

बिंदुA के निर्देशांक	बिंदु B के निर्देशांक	दूरी सूत्र
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2+[(-2)-2]^2}$ .... (दूरी सूत्रानुसार)

$= \sqrt{(1+3)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2+(-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ ....(II)

और $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2+(-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) और (III) से

$\therefore d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$

$\therefore$ A, B, C ये एकरेखीय बिंदु हैं ।

उदा. (3) निश्चित कीजिए कि क्या बिंदु P(6, -6), Q(3, -7) और R(3, 3) ये एकरेखीय बिंदु हैं ?

हल : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (दूरी सूत्र का उपयोग कर)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(9)^2} = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) और (III) से $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ और $\sqrt{90}$ में से $\sqrt{100}$ सबसे बड़ी संख्या है ।

संख्याएँ $(\sqrt{100})$ और $(\sqrt{10}+\sqrt{90})$ समान हैं या नहीं यह देखते हैं ।

इसके लिए $(\sqrt{100})^2$ और $(\sqrt{10}+\sqrt{90})^2$ की तुलना करें ।

इससे ध्यना में आएगा कि $(\sqrt{10}+\sqrt{90}) > (\sqrt{100})$ $\therefore PQ + PR \neq QR$

$\therefore$ P(6, -6), Q(3, -7) और R(3, 3) यह एकरेखीय बिंदु नहीं है ।

उदा. (4) सिद्‌ध कीजिए कि, बिंदु (1, 7), (4, 2), (−1, −1) और (−4, 4) वर्ग के शीर्ष बिंदु हैं ।

हल : जब किसी चतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान लंबाई की और विकर्ण भी समान लंबाई के हों तो वह वर्ग होता हैं । $\therefore$ सभी भुजाओं और विकर्णों की लंबाई दूरी सूत्र का प्रयोग कर ज्ञात करेंगे ।

माना कि, A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) और D(−4,4) बिंदु दिए गए हैं ।

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

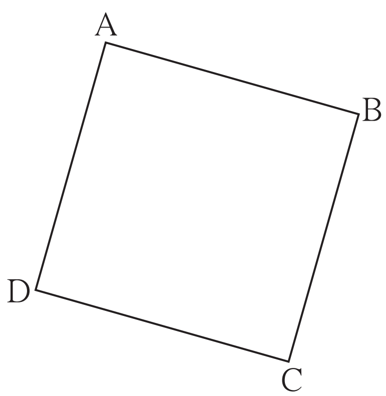
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



आकृति 5.9

$\therefore$ AB = BC = CD = DA और AC = BD

इस आधार पर हमें यह ज्ञात होता है कि, चारों भुजाएँ समान हैं और दोनों विकर्ण AC और BD भी समान हैं ।

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) और (−4,4) इन शीर्ष बिंदुओं से निर्मित चतुर्भुज वर्ग है ।

उदा. (5) Y- अक्ष पर स्थित ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो कि M (−5,−2) और N(3,2) से समान दूरी पर हो।

हल : माना, Y- अक्ष पर बिंदु P(0, y) बिंदु M तथा N से समान दूरी पर है ।

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) और N (3, 2) इन बिंदुओं से समान दूरी पर स्थित Y- अक्ष के बिंदु का निर्देशांक (0, −2) है ।

उदा. (6) यदि बिंदु A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) यह Δ ABC के शीर्ष बिंदु है । तो Δ ABC के परिकेंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : माना बिंदु P(a, b) यह Δ ABC का परिकेंद्र है। $\therefore$ बिंदु P बिंदु A, B, C से समान दूरी पर है।

$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2$ .... (I) $\qquad \therefore PA^2 = PB^2$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

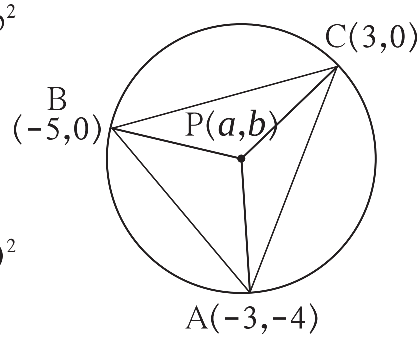
उसी प्रकार $PA^2 = PC^2$ .... (I) से

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$



आकृति 5.10

समीकरण (II) और (III) हल करने पर $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ परिकेंद्र के निर्देशांक $(-1, -\frac{1}{2})$ हैं ।

उदा. (7) यदि बिंदु (x, y) यह (7, 1) और (3, 5) से समान दूरी पर हो, तो सिद्‌ध कीजिए कि $y = x-2$

हल : माना, P (x, y) यह बिंदु A(7, 1) और B(3, 5) से समान दूरी पर है ।

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

उदा. (8) बिंदु A (2,−2) और बिंदु B (−1, y) के बीच की दूरी 5 है, तो y का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... दूरी सूत्रानुसार

$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$

$\therefore 25 = 9 + (y+2)^2$

$\therefore 16 = (y+2)^2$

$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ या $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ या $y = -6$

$\therefore y$ का मान 2 या −6 है ।

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. निम्नलिखित प्रत्येक युग्म के बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।
   (1) A(2, 3), B(4, 1) (2) P(−5, 7), Q(−1, 3) (3) R(0, −3), S(0, $\frac{5}{2}$)
   (4) L(5, −8), M(−7, −3) (5) T(−3, 6), R(9, −10) (6) W($\frac{-7}{2}$, 4), X(11, 4)
2. नीचे दिए गए बिंदु एकरेखीय हैं या नहीं ? इसकी जाँच कीजिए ।
   (1) A(1, −3), B(2, −5), C(−4, 7) (2) L(−2, 3), M(1, −3), N(5, 4)
   (3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, −1) (4) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)
3. X– अक्ष पर स्थित वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदु A(−3, 4) और B(1, −4) से समान दूरी पर हो ।
4. जाँच कीजिए कि बिंदु P(−2, 2), Q(2, 2) और R(2, 7) समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिंदु हैं ।

5. सिद्ध कीजिए कि, P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) और S (6, −6) शीर्ष बिंदुवाला चर्तुभुज, समांतर चर्तुभुज है ।

6. सिद्ध कीजिए कि, A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) और D(5, −4) समचतुर्भुज ABCD के शीर्ष बिंदु हैं ।

7. यदि बिंदु L(x, 7) और M(1, 15) के बीच की दूरी 10 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

8. सिद्ध कीजिए कि, A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिंदु हैं ।

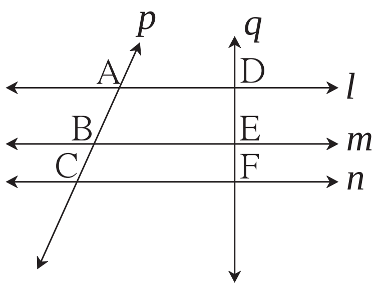
थोड़ा याद करें

तीन समांतर रेखाओं के अंत:खंडों का गुणधर्म :

आकृति में रेखा l || रेखा m || रेखा n,

रेखा p तथा रेखा q तिर्यक रेखाएँ हैं ।

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



आकृति 5.11

आओ जानें

रेखाखंडों का विभाजन (Division of a line segment)

आकृति 5.12

आकृति में, AP = 6 और PB = 10

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

इसे भिन्न शब्दों में 'बिंदु P रेखाखंड AB को 3:5 के अनुपात में विभाजित करता है ।', ऐसा कहते हैं । जब किसी रेखाखंड पर स्थित बिंदु रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभाजित करता है तब उस विभाजक बिंदु के निर्देशांक कैसे प्राप्त करेंगे यह देखते हैं ।

आओ जानें

विभाजन सूत्र (Section formula)

आकृति 5.13 में, प्रतल XY पर स्थित रेखाखंड AB पर बिंदु P, रेखाखंड AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है ।

माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $P(x, y)$

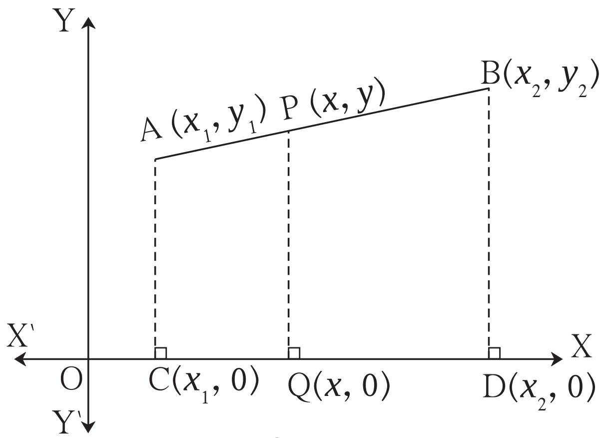
रेख AC, रेख PQ और रेख BD यह X–अक्ष पर लंब रेखाखंड खींचे गए हैं ।

$\therefore$ $C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$

और $D(x_2, 0)$.

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ CQ &= x - x_1 \\ \text{और } QD &= x_2 - x\end{aligned}\right\} \text{..........} \text{ (I)}$$

उसी प्रकार रेख AC || रेख PQ || रेख BD.



आकृति 5.13

$\therefore$ तीन समांतर रेखाओं के अंत:खंडों के गुणधर्म के अनुसार, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{m}{n}$

अब, $CQ = x - x_1$ और $QD = x_2 - x$ .... (I) के अनुसार

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

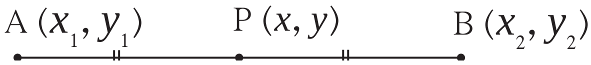
उसी प्रकार बिंदु A, P तथा B से Y- अक्ष पर लंब खींचकर उपर्युक्त दिए गए अनुसार कृति करने पर हमें $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ प्राप्त होगा ।

$\therefore$ बिंदु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ होते हैं ।

रेखाखंड के मध्यबिंदु का सूत्र (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ ये दो बिंदु हैं, और यदि बिंदु $P(x, y)$ रेखा AB का मध्य बिंदु हो तो

$m = n$



आकृति 5.14

अब विभाजन सूत्रानुसार,

x और y का मान लिखेगें ।

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \; m = n$$
$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \; m = n$$
$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ मध्य बिंदु P के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हैं । इसे ही रेखाखंड के **मध्यबिंदु का सूत्र** कहते हैं ।

हमने पिछली कक्षा में दो परिमेय संख्याएँ a और b को संख्या रेखा पर दर्शाकर, उनको जोड़ने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु $\frac{a + b}{2}$ होता है यह दिखाया था । यह निष्कर्ष अभी प्राप्त सूत्र का एक विशेष प्रकार है, इसे ध्यान में रखिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा.(1) यदि बिंदु A(3,5) और बिंदु B(7,9) है और बिंदु Q यह रेखाखंड AB को 2:3 अनुपात में विभाजित करता हो, तो बिंदु Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए उदाहरण में, माना $(x_1, y_1) = (3, 5)$

और $(x_2, y_2) = (7, 9)$

उसी प्रकार, $m : n = 2:3$

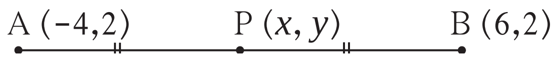
रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ बिंदु Q के निर्देशांक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

उदा.(2) A(−4,2), B(6,2) इस रेखाखंड का मध्य बिंदु P हो, तो P बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ और बिंदु P के निर्देशांक (x, y)

∴ मध्य बिंदु के सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

∴ मध्य बिंदु P के निर्देशांक (1,2) प्राप्त होंगे ।

थोड़ा याद करें

हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं ।

संगामी बिंदु (centroid) माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है ।

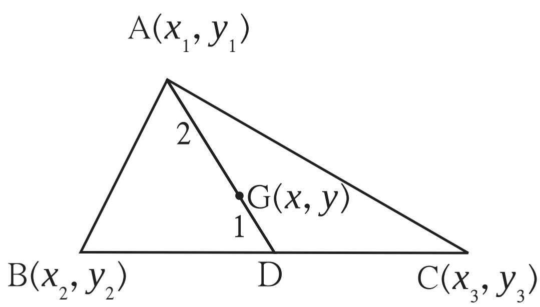
आओ जानें

केंद्रव बिंदु का सूत्र (माध्यिका संगामी बिंदु का सूत्र) (Centroid formula)

त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हों तो विभाजन सूत्र का उपयोग करके केंद्रव बिंदु के निर्देशांक कैसे प्राप्त कर सकते हैं । यह हम देखेंगे ।

माना, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ Δ ABC के शीर्ष बिंदु हैं । रेख AD Δ ABC की माध्यिका है । बिंदु $G(x, y)$ त्रिभुज का केंद्रव है ।

बिंदु D रेख BC का मध्य बिंदु है ।



आकृति 5.16

$\therefore$ बिंदु D के निर्देशांक $x = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \dfrac{y_2 + y_3}{2}$ .... रेखाखंड के मध्यबिंदु के सूत्रानुसार

बिंदु G(x, y) यह Δ ABC की माध्यिकाओं का केंद्रव है । $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{2\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\dfrac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अर्थात, शीर्ष बिंदु (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) वाले त्रिभुज के केंद्रव के निर्देशांक

$\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ होते हैं ।

इसे ही **केंद्रव (माध्यिकाओं के संगामी बिंदु) का सूत्र** कहते हैं ।

इसे ध्यान में रखें

- विभाजन सूत्र

  (x_1, y_1) और (x_2, y_2) इन दो भिन्न बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ होते हैं ।

- मध्य बिंदु का सूत्र

  (x_1, y_1) और (x_2, y_2) इन दो भिन्न बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ होते हैं ।

- केंद्रव का सूत्र

  यदि (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) ये त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक हों तो केंद्रव का निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ होता है ।

हल किए गए उदाहरण

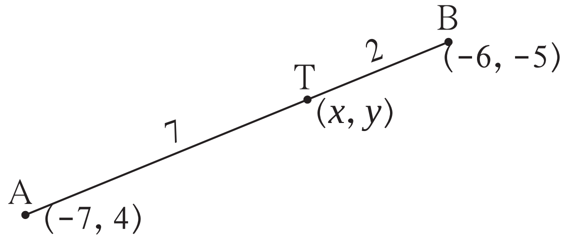
उदा. (1) बिंदु A(−7,4) और बिंदु B(−6,−5) है । बिंदु T यह रेखाखंड AB को 7:2 के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिंदु T के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : माना, T का निर्देशांक (x, y) है ।

∴ रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$



आकृति 5.17

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ बिंदु T का निर्देशांक $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ प्राप्त होगा ।

उदा. (2) बिंदु P(−4, 6) यह बिंदु A(−6, 10) और बिंदु B(r, s) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$$\therefore \quad -4 = \frac{2r-6}{3}$$

$$\therefore \quad -12 = 2r - 6$$

$$\therefore \quad 2r = -6$$

$$\therefore \quad r = -3$$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{2s+10}{3}$$

$$\therefore \quad 18 = 2s + 10$$

$$\therefore \quad 2s = 8$$

$$\therefore \quad s = 4$$

∴ बिंदु B के निर्देशांक (−3, 4) है ।

उदा. (3) बिंदु A(15,5), B(9,20) और P(11,15) इस प्रकार हैं कि A−P−B तो ज्ञात कीजिए कि बिंदु P रेखाखंड AB को किस अनुपात में विभाजित करता है ।

हल : बिंदु P(11,15) रेखाखंड AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है ।

∴ विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$$

$$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore\ 2m = 4n$$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ विभाजन अनुपात 2 : 1 है ।

> इसी प्रकार y निर्देशांक का मान रखकर प्राप्त अनुपात कितना आएगा ? ज्ञात कीजिए और अपना निष्कर्ष लिखिए ।

उदा. (4) बिंदु A (2,−2) और B(−7,4) को जोड़ने वाले रेखाखंड को तीन समान भागों में विभाजित (सम त्रिभाजन) करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
(रेखाखंड के वे दो बिंदु जो रेखाखंड को तीन समान भागों में विभाजित करते हैं, उन्हें उस रेखाखंड के सम त्रिभाजक बिंदु कहते हैं ।)

हल : माना बिंदु P और Q ये बिंदु A और बिंदु B को जोड़ने वाले रेखाखंड के त्रिभाजक बिंदु हैं । अर्थात बिंदु P और Q के कारण रेखाखंड AB के तीन समान भाग होते हैं ।

AP = PQ = QB .... (I)

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2} \quad \text{.......... (I) से}$$

बिंदु P रेखाखंड AB को 1:2 के अनुपात में विभाजित करता है ।

आकृति 5.18

$$\text{P का } x \text{ निर्देशांक} = \frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\text{P का } y \text{ निर्देशांक} = \frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

उसी प्रकार बिंदु Q रेखाखंड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है । अर्थात $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

$$\text{Q का } x \text{ निर्देशांक} = \frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\text{Q का } y \text{ निर्देशांक} = \frac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore$ रेखाखंड के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक (−1, 0), (−4, 2) है ।

अधिक जानकारी हेतू :

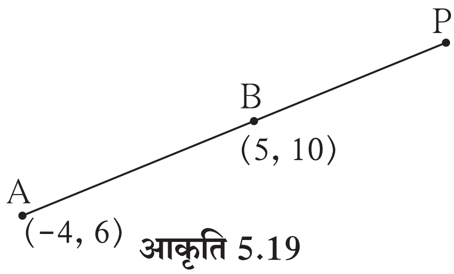
बिंदु A और B को जोड़ने वाले रेखाखंड का बाह्य विभाजन कैसे करते हैं ?

A(−4, 6), B(5, 10) ऐसे बिंदु हों तो रेखाखंड AB को 3:1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु P के निर्देशांक कैसे प्राप्त करेंगे ? आइए देखें ।

$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{1}$ अर्थात AP, PB से बड़ा है और A–B–P

$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{1}$ अर्थात AP = 3k, BP = k, तो AB = 2k

$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$



आकृति 5.19

अब बिंदु B रेखाखंड AP को 2 : 1 इस अनुपात में विभाजित करता है ।

बिंदु A और बिंदु B के निर्देशांक दिए होने पर हमने बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात करना सीखा है ।

प्रश्नसंग्रह 5.2

1. यदि बिंदु P बिंदुओं A(−1,7) और B(4,−3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2 : 3 अनुपात में विभाजित करता हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
2. नीचे दिए गए प्रत्येक उदाहरण में रेखाखंड PQ को a : b के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

   (1) P(−3, 7), Q(1, −4), a : b = 2 : 1

   (2) P(−2, −5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4

   (3) P(2, 6), Q(−4, 1), a : b = 1 : 2
3. यदि P–T–Q है, तो बिंदु T(−1, 6), बिंदु P(−3, 10) और बिंदु Q(6, −8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है, ज्ञात कीजिए ।
4. रेखाखंड AB यह वृत्त का व्यास है, जिसका केंद्र बिंदु P है । A(2, −3) और P (−2, 0) हो तो बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. बिंदु A(8, 9) और B(1, 2) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को बिंदु P(k, 7) किस अनुपात में विभाजित करता है ज्ञात कीजिए और k का मान बताइए ।
6. (22, 20) और (0, 16) को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
7. नीचे त्रिभुज के शीर्ष बिंदु दिए हैं । प्रत्येक त्रिभुज के केंद्रव का निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

   (1)(−7, 6), (2, −2), (8, 5)

   (2) (3, −5), (4, 3), (11, −4)

   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABC में बिंदु G केंद्रव है, बिंदु A, B तथा G के निर्देशांक क्रमशः (−14, −19), (3, 5) और (−4, −7) हैं, तो बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

9. G (1, 5) केंद्रव वाले त्रिभुज के A (h, −6), B (2, 3) और C (−6, k) शीर्ष बिंदु हों तो h और k के मान ज्ञात कीजिए ।

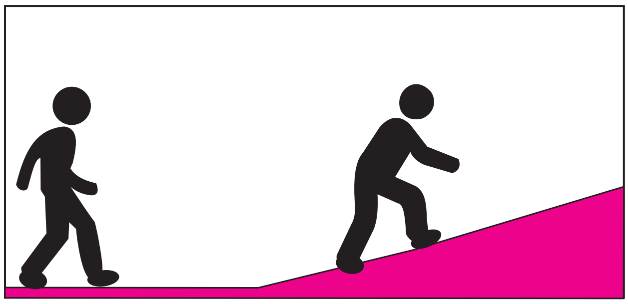
10. बिंदु A (2, 7) और B(−4, −8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

11. A (−14, −10), B(6, −2) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार सर्वांगसम रेखाखंडों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

12. A (20, 10), B(0, 20) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को पांच सर्वांगसम रेखाखंडों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

रेखा का ढाल (Slope of a line)

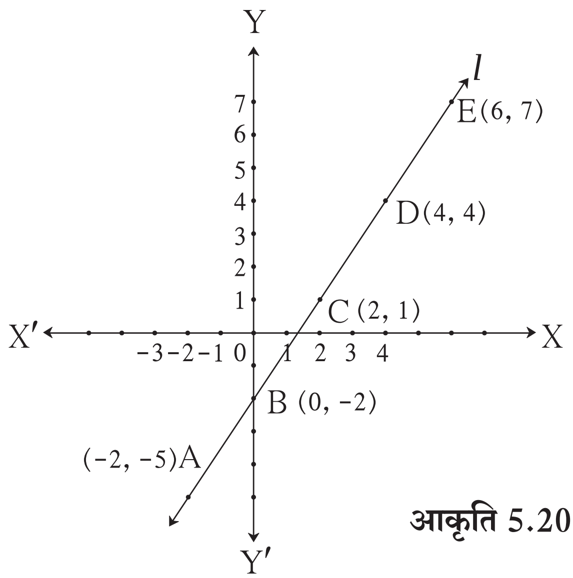


समतल जमीन पर चलते समय हमें परिश्रम नहीं करना पड़ता है । ऊँचाई (ढलान) पर चढ़ते समय थोड़ा परिश्रम करना पड़ता है । मनुष्य की साँस फूल सकती है । हमने विज्ञान में अध्ययन किया है कि ऊँचाई (ढलान) वाले रास्ते पर चढते समय गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्‌ध काम करना पड़ता है ।

प्रतलीय निर्देशांक भूमिति में रेखा का ढाल एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना है । नीचे दी गई कृति से इस संकल्पना को समझेंगे ।

कृति I :

संलग्न आकृति में A(−2, −5), B(0, −2), C(2, 1), D(4, 4), E(6,7) यह बिंदु रेखा l पर स्थित है । इन निर्देशांकों का उपयोग कर के नीचे दी गई सारिणी का अवलोकन कीजिए ।



आकृति 5.20

अ. क्र.	प्रथम बिंदु	द्वितीय बिंदु	प्रथम बिंदु के निर्देशांक (x_1, y_1)	द्वितीय बिंदु के निर्देशांक (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर सारिणी पूर्ण कीजिए । इसी प्रकार रेखा l पर स्थित अन्य जोडियाँ लेकर प्रत्येक युग्म के लिए अनुपात $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ज्ञात कीजिए ।

इस कृति से हमें यह ध्यान में आता है कि रेखा l के किसी भी दो बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के लिए $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ यह अनुपात स्थिर है ।

रेखा l पर (x_1, y_1) और (x_2, y_2) कोई भी दो बिंदु हों तो $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ इस अनुपात को रेखा का ढाल कहते हैं ।

रेखा के ढाल को सामान्य रूप से m अक्षर से दर्शाते हैं ।

$$\therefore \; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

कृति II : आकृति में रेखा l, t और n पर कुछ बिंदु दिए गए हैं । इस आधारपर उन रेखाओं के ढाल ज्ञात कीजिए ।

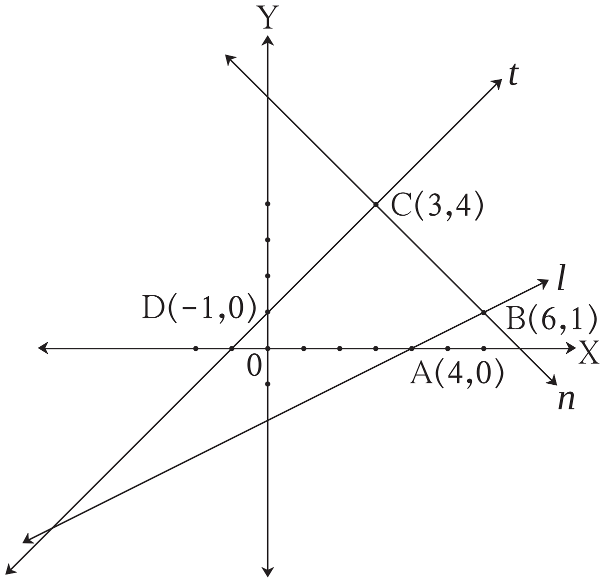
आपको पता होगा कि,

(1) रेखा l और रेखा t का ढाल धनात्मक है ।

(2) रेखा n का ढाल ऋणात्मक है ।

(3) रेखा t का ढाल रेखा l के ढाल से अधिक है ।

(4) X- अक्ष की धन दिशा की ओर बनने वाले न्यून कोण की रेखा l तथा रेखा t का ढाल धनात्मक है ।



आकृति 5.21

(5) X- अक्ष की धन दिशा की ओर बने अधिक कोण वाली रेखा n का ढाल ऋणात्मक है ।

X-अक्ष, Y-अक्ष और अक्षों के समांतर रेखाओं के ढाल :

आकृति 5.22 में, $(x_1, 0)$ और $(x_2, 0)$ यह X- अक्ष के दो बिंदु है ।

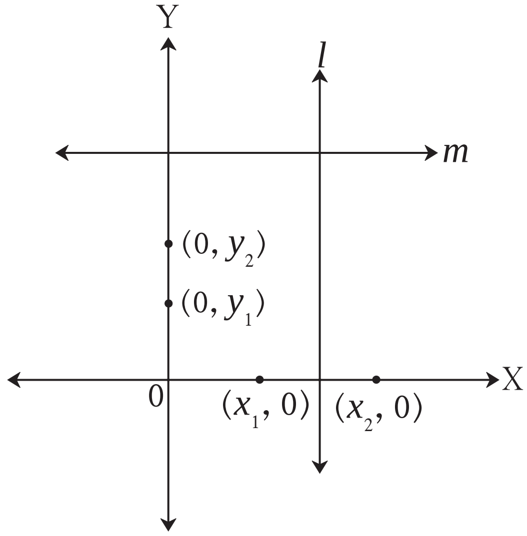
$$\text{X- अक्ष का ढाल} = \frac{0-0}{x_2-x_1} = 0$$

उसी प्रकार, $(0, y_1)$ और $(0, y_2)$ यह Y- अक्ष के दो बिंदु हैं ।

$$\text{Y- अक्ष का ढाल} = \frac{y_2-y_1}{0-0} = \frac{y_2-y_1}{0},$$

परंतु 0 से किसी भी संख्या में भाग नही जाने से

Y- अक्ष के ढाल की गणना नहीं की जा सकती है ।



आकृति 5.22

उसी प्रकार रेखा m की तरह ही X- के समांतर किसी भी रेखा का ढाल ज्ञात करें, वह शून्य प्राप्त होगा ।

उसी प्रकार रेखा l की तरह ही Y- अक्ष के समांतर किसी रेखा का ढाल नहीं बताया जा सकता, ऐसा ज्ञात होगा।

रेखा का ढाल – त्रिकोणमिति के अनुपात का प्रयोग कर

आकृति 5.23 में, $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ रेखा l पर स्थित दो बिंदु हैं ।

रेखा l यह X अक्ष को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है ।

रेखाखंड QS $\perp$ X- अक्ष, रेख PR $\perp$ रेख QS $\therefore$ रेख PR $\parallel$ रेख TS .... संगत कोण कसौटी

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ और PR $= x_2 - x_1$

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ .... (I)}$$

रेखा TQ यह X- अक्ष के साथ θ कोण बनाती है ।

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta \text{ .... (II)}$$

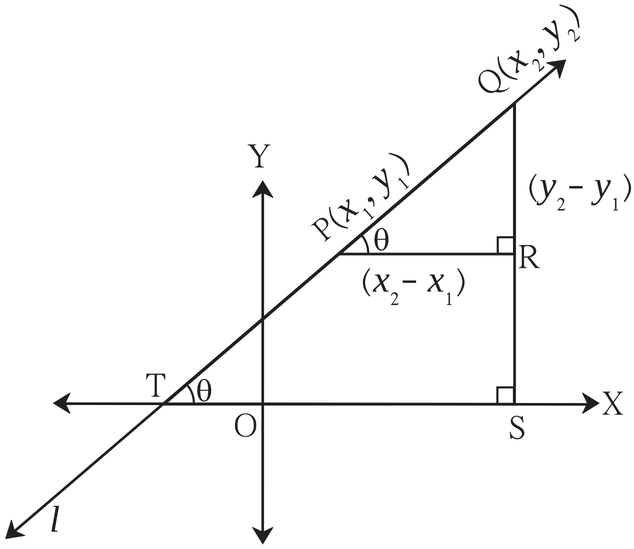
$\therefore$ (I) तथा (II) से, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore$ $m = \tan\theta$

अब रेख PR || रेख TS और रेखा l उसकी तिर्यक रेखा है ।

$\therefore$ ∠QPR = ∠QTS .... संगत कोण

इस प्रकार, रेखा द्‌वारा X-अक्ष के धन दिशा में बनाए गए कोण का **टॅन** (tan) अनुपात ही उस रेखा का ढाल होता है । इस प्रकार भी ढाल की परिभाषा कर सकते हैं ।



आकृति 5.23

दो रेखाओं का ढाल जब समान होता है तब वे रेखाएँ X- अक्ष की धन दिशा में समान माप के कोण बनाती हैं ।

$\therefore$ वे दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

समांतर रेखाओं का ढाल (Slope of parallel lines)

कृति : आकृति 5.24 में रेखा l और रेखा t इन दोनों ही रेखाओं द्‌वारा X- अक्ष के धन दिशा में बना कोण θ है ।

$\therefore$ रेखा l || रेखा t .... संगत कोण कसौटी

रेखा l पर बिंदु A(-3, 0) और बिंदु B(0, 3) का विचार कीजिए और रेखा AB का ढाल ज्ञात कीजिए ।

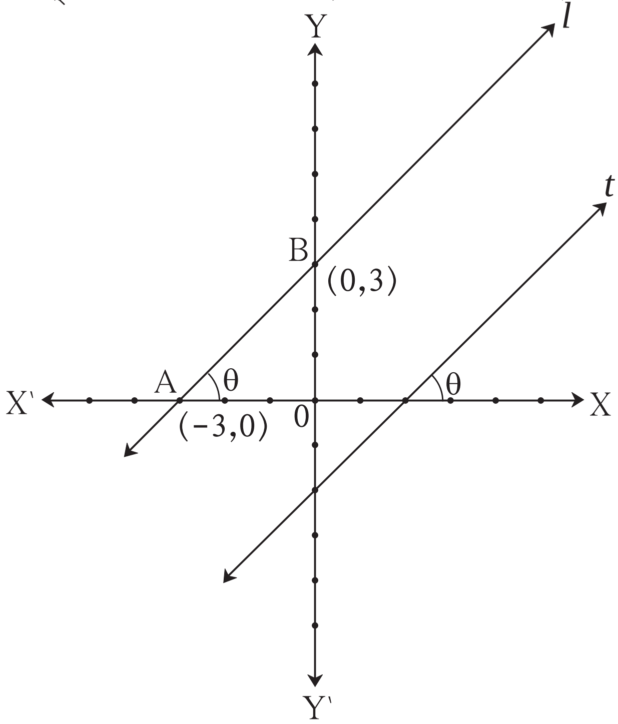
रेखा AB का ढाल = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\square - \square}{\square - \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \square$$

उसी प्रकार t पर अपनी सुविधानुसार बिंदु लेकर उसका ढाल ज्ञात कीजिए ।

इस प्रकार समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच आप कर सकते हैं ।



आकृति 5.24

यहाँ पर $\theta = 45^\circ$ है ।

ढाल, $m = \tan\theta$ का उपयोग कर समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच करके देखिए ।

उसी प्रकार $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ मान लेकर समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

X- अक्ष या X- अक्ष के समांतर रेखाओं का ढाल शून्य होता है ।

Y- अक्ष या Y- अक्ष के समांतर रेखाओं का ढाल बताया नहीं जा सकता ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) बिंदु A (−3, 5) और बिंदु B (4, −1) से जाने वाली रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$$\therefore \text{ रेखा AB का ढाल } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{-6}{7}$$

उदा. (2) सिद्‌ध कीजिए कि बिंदु P(−2, 3), बिंदु Q(1, 2) बिंदु R(4, 1) यह एक रेखीय बिंदु हैं ।

हल : P(−2, 3), Q(1, 2) और R(4, 1) ये दिए हुए बिंदु हैं ।

$$\text{रेखा PQ का ढाल } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{रेखा QR का ढाल } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

रेखा PQ और रेखा QR का ढाल समान है ।

परंतु बिंदु Q यह दोनों ही रेखाओं पर है ।

$\therefore$ बिंदु P, Q, R यह एकरेखीय बिंदु हैं ।

उदा. (3) यदि बिंदु P(k, 0) और बिंदु Q(−3, −2), इन दोनों बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा का ढाल $\frac{2}{7}$ है तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : P(k, 0) और Q(−3, −2)

$$\text{रेखा PQ का ढाल } = \frac{-2-0}{-3-k} = \frac{-2}{-3-k}$$

रेखा PQ का ढाल $\frac{2}{7}$ दिया है ।

$$\therefore \frac{-2}{-3-k} = \frac{2}{7} \qquad \therefore k = 4$$

उदा. (4) बिंदु A (6, 1), बिंदु B (8, 2), बिंदु C (9, 4) और बिंदु D (7, 3) यह □ ABCD के शीर्ष बिंदु हों तो सिद्ध कीजिए कि □ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

हल : आपको पता है कि, रेखा का ढाल = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

रेखा AB का ढाल = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

रेखा BC का ढाल = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

रेखा CD का ढाल = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

रेखा DA का ढाल = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

रेखा AB का ढाल = रेखा CD का ढाल .... (I) तथा (III) से

∴ रेखा AB || रेखा CD

रेखा BC का ढाल = रेखा DA का ढाल .... (II) तथा (IV) से

∴ रेखा BC || रेखा DA

अर्थात चतुर्भुज के दोनों सम्मुख भुजाओं के युग्म परस्पर समांतर है ।

∴ □ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. किसी रेखा द्वारा X-अक्ष की धन दिशा की ओर निर्मित कोण का माप दिया गया है, इस आधार पर उन रेखाओं का ढाल ज्ञात कीजिए ।

   (1) 45° (2) 60° (3) 90°

2. नीचे दिए गए बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए ।

   (1) A (2, 3) और B (4, 7) (2) P (−3, 1) और Q (5, −2)

   (3) C (5, −2) और D (7, 3) (4) L (−2, −3) और M (−6, −8)

   (5) E(−4, −2) और F (6, 3) (6) T (0, −3) और S (0, 4)

3. निम्नलिखित बिंदु एक रेखीय हैं या नहीं ? जाँच कीजिए ।

   (1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)

   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)

   (5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K(−2, $\frac{5}{2}$), N(4, −2)

4. बिंदु A (1, −1), बिंदु B (0, 4), बिंदु C (−5, 3) ये त्रिभुज के शीर्षबिंदु हैं तो त्रिभुज की प्रत्येक भुजा का ढाल ज्ञात कीजिए ।

5. सिद्ध कीजिए कि, बिंदु A (−4, −7), बिंदु B (−1, 2), बिंदु C (8, 5) और D (5, −4) यह समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्ष बिंदु हैं ।

6. R(1, −1) और S (−2, k) है । यदि इस रेखा RS का ढाल −2 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

7. B(k, −5) और C (1, 2) है । यदि इस रेखा का ढाल 7 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

8. बिंदु P(2, 4), Q (3, 6), R(3, 1) और S(5, k) है और रेखा PQ और रेखा RS परस्पर समांतर हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. उचित पर्याय चुनकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(1) रेखा AB, यह Y-अक्ष के समांतर है यदि बिंदु A के निर्देशांक (1,3) हो तो, B बिंदु के निर्देशांक .... होंगे ।

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,−3)

(2) निम्नलिखित में से बिंदु .... X- अक्ष पर धन दिशा की ओर है ।

(A)(−2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (−3,4) इस बिंदु की आरंभ बिंदु से दूरी ...... है ।

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)−5

(4) एक रेखा द्वारा X- अक्ष की धन दिशा से 30° का कोण बनता है, इसलिए उस रेखा का ढाल .... है ।

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. निम्नलिखित बिंदु एक रेखीय हैं या नही ? निश्चित कीजिए ।

(1) A (0,2) , B (1,−0.5), C (2,−3)

(2) P (1, 2) , Q (2, $\frac{8}{5}$) , R (3, $\frac{6}{5}$)

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) और Q (12,20) इन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

4. A (3,8) और B (−9,3) इन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को Y- अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है ।

5. X-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु प्राप्त कीजिए जो P(2,−5) और Q(−2,9) से समान दूरी पर हो ।

6. निम्नलिखित बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

(1) A (a, 0), B (0, a) (2) P (−6, −3), Q (−1, 9) (3) R (−3a, a), S (a, −2a)

7. किसी त्रिभुज के शीर्ष बिंदु A (−3,1), B (0,−2) और C (1,3) हों तो इस त्रिभुज के परिकेंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

8. निम्नलिखित बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड त्रिभुज बना सकते हैं क्या ? यदि त्रिभुज बनता हो तो भुजाओं के आधार पर त्रिभुज का प्रकार लिखिए ।

(1) L (6,4) , M (–5,–3) , N (–6,8)

(2) P (–2,–6) , Q (–4,–2), R (–5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

9. यदि बिंदुओं P (–12,–3) और Q (4, k) से जानेवाली रेखा का ढाल $\frac{1}{2}$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

10. सिद्‍ध कीजिए कि, बिंदुओं A(4, 8) और B(5, 5) को जोड़ने वाली रेखा बिंदुओं C(2,4) और D(1,7) को जोड़ने वाली रेखा के समांतर है ।

11. सिद्‍ध कीजिए कि, बिंदु P(1,–2), Q(5,2), R(3,–1)और S(–1,–5) समांतर चतुर्भुज के शीर्ष बिंदु हैं ।

12. यदि बिंदु P(2,1), Q(–1,3), R(–5,–3) और S(–2,–5) हो तो सिद्‍ध कीजिए कि □PQRS एक आयत है ।

13. A (–1, 1), B (5, –3) और C (3, 5) इन शीर्ष बिंदु वाले त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

14★. यदि D (–7, 6), E (8, 5)और F (2, –2) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु हों तो उस त्रिभुज के केंद्रव बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

15. सिद्‍ध कीजिए, कि A(4, –1), B(6, 0), C(7, –2) और D(5, –3) वर्ग के शीर्ष बिंदु हैं ।

16. शीर्ष बिंदु A(7, 1), B(3, 5) और C(2, 0) वाले त्रिभुज के परिवृत्त के केंद्र (परिकेंद्र) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

17. यदि बिंदु A(4,–3) और B(8,5) हो तो रेखाखंड AB को 3:1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

18★. बिंदुओं A(–4, –2), B(–3, –7) C(3, –2) और D(2, 3) को क्रम से जोड़ने पर बनने वाले □ ABCD का प्रकार लिखिए ।

19★. बिंदु P, Q, R और S के कारण रेखाखंड AB पाँच सर्वांगसम भागों में विभाजित होता है । यदि A-P-Q – R-S-B और Q(12, 14) तथा S(4, 18) हो तो A, P, R, B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

20. P (6,–6), Q (3,–7) और R (3,3) इन बिंदुओं से जाने वाले वृत्त के केंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

21★. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक A (5,6), B (1,–2) और C (3,–2) हों तो चौथे बिंदु के सभी निर्देशांकों की जितनी संभव हो उतनी जोड़ियाँ ज्ञात कीजिए ।

22. A (1,7), B (6,3) C (0,–3) और D (–3,3) शीर्ष बिंदुओं वाला एक चतुर्भुज है । इस चतुर्भुज के प्रत्येक विकर्ण का ढाल ज्ञात कीजिए ।

PGBURG