5 निर्देशक भूमिती

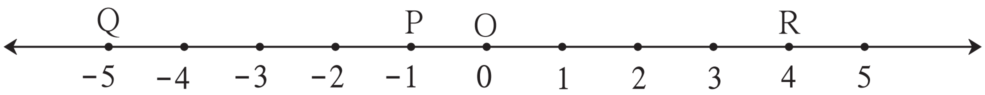
चला, शिकूया.

- अंतराचे सूत्र
- विभाजनाचे सूत्र
- रेषेचा चढ

जरा आठवूया.

संख्यारेषेवरील दोन बिंदूंतील अंतर कसे काढतात हे आपल्याला माहीत आहे.

P,Q आणि R बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे −1,−5 आणि 4 आहेत तर रेख PQ,रेख QR यांची लांबी काढा.



आकृती 5.1

बिंदू A आणि B यांचे निर्देशक x_1 आणि x_2 असतील, आणि $x_2 > x_1$ असेल तर

रेषाखंड AB ची लांबी = d(A,B) = $x_2 - x_1$

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बिंदू P,Q आणि R यांचे निर्देशक अनुक्रमे −1,−5 आणि 4 आहेत.

$\therefore$ d(P, Q) = (−1)−(−5) = −1 + 5 = 4

आणि d(Q, R) = 4 − (−5) = 4 + 5 = 9

हीच संकल्पना वापरून आपण XY प्रतलातील,एकाच अक्षावर असणाऱ्या दोन बिंदूंतील अंतर काढू.

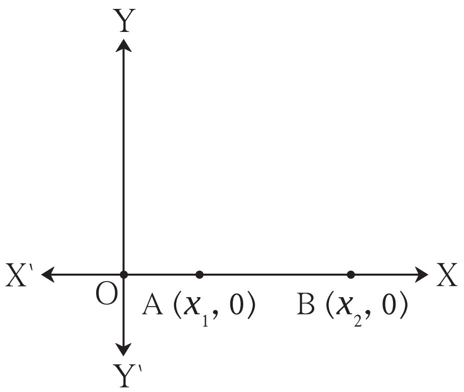
जाणून घेऊया.

(1) एकाच अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

एकाच अक्षावरील दोन बिंदू म्हणजे एकाच संख्यारेषेवरील दोन बिंदू होत. X अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक (2, 0), $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$, (8, 0) असे, तर Y अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक (0, 1), $\left(0, \frac{17}{2}\right)$, (0, −3) असे असतात, हे ध्यानात घ्या.

X अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OX′ आहे व Y अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OY′ आहे.

i) X-अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

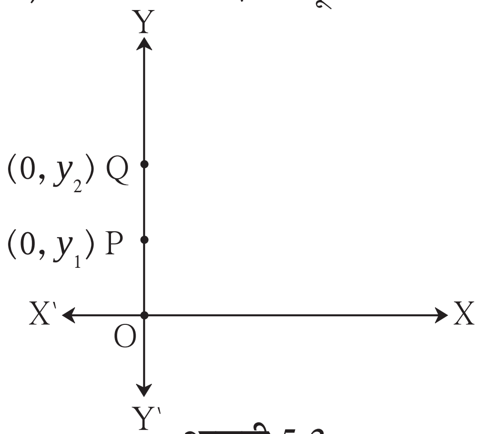


आकृती 5.2

वरील आकृतीत,
A(x_1, 0) आणि B(x_2, 0) हे दोन बिंदू X- अक्षावर असे आहेत की, $x_2 > x_1$

$\therefore$ d(A, B) = $x_2 - x_1$

ii) Y-अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

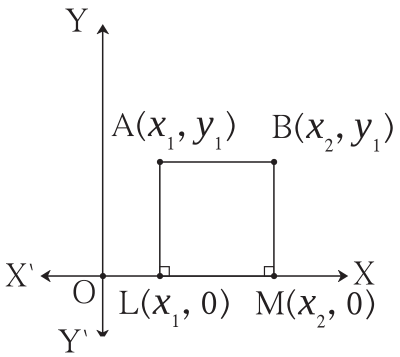


आकृती 5.3

वरील आकृतीत,
P(0, y_1) आणि Q(0, y_2) हे दोन बिंदू Y- अक्षावर असे आहेत की, $y_2 > y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

2) दोन बिंदूंना जोडणारा XY प्रतलातील रेषाखंड एखाद्या अक्षाला समांतर असेल तर त्या दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.



आकृती 5.4

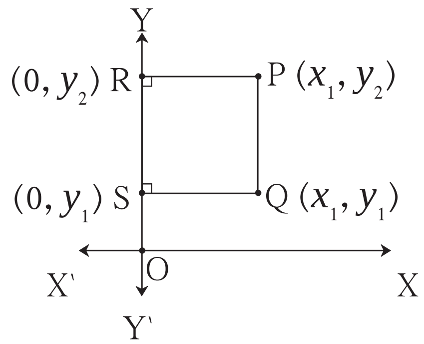
i) आकृतीत रेख AB हा X- अक्षाला समांतर आहे. म्हणून बिंदू A व बिंदू B चे y निर्देशक समान आहेत.
रेख AL आणि रेख BM हे X-अक्षावर लंब काढा.

$\therefore$ □ ABML हा आयत आहे.

$\therefore$ AB = LM

परंतु, LM = $x_2 - x_1$

$\therefore$ d(A,B) = $x_2 - x_1$



आकृती 5.5

ii) आकृतीत रेख PQ हा Y- अक्षाला समांतर आहे. म्हणून बिंदू P व बिंदू Q चे x निर्देशक समान आहेत.
रेख PR आणि रेख QS हे Y-अक्षावर लंब काढा.

$\therefore$ □ PQSR हा आयत आहे.

$\therefore$ PQ = RS

परंतु, RS = $y_2 - y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

कृती :

आकृतीमध्ये रेख AB || Y-अक्ष आणि रेख CB || X-अक्ष असून A, C बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत.

AC काढण्यासाठी खालील चौकटी भरा.

Δ ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे.

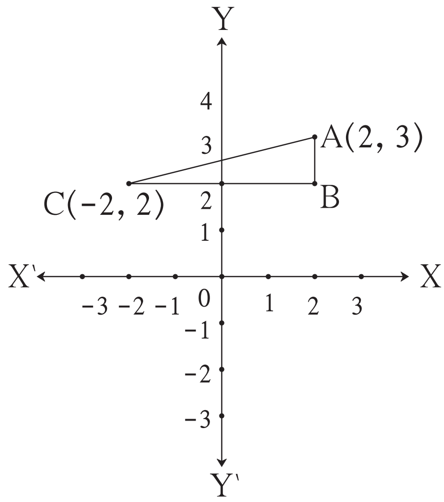
पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$(AB)^2 + (BC)^2 = \square$

AB, BC शोधण्यासाठी बिंदू B चे निर्देशक काढू.

CB || X- अक्ष $\therefore$ B चा y निर्देशक = $\square$

BA || Y- अक्ष $\therefore$ B चा x निर्देशक = $\square$



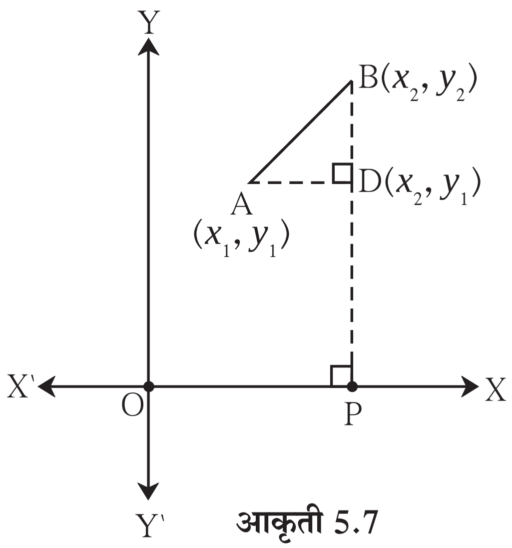
आकृती 5.6

AB = $\boxed{3} - \square = \square$ BC = $\square - \square = \boxed{4}$

$\therefore$ AC^2 = $\square + \square = \square$ $\therefore$ AC = $\boxed{\sqrt{17}}$

जाणून घेऊया.

अंतराचे सूत्र(Distance formula)



आकृती 5.7

आकृती 5.7 मध्ये, A(x_1, y_1) आणि B(x_2, y_2) हे XY प्रतलातील कोणतेही दोन बिंदू आहेत.

बिंदू B मधून BP हा X-अक्षावर लंब काढा तसेच बिंदू A मधून AD हा रेख BP वर लंब काढा.

रेख BP हा Y-अक्षाला समांतर आहे.

$\therefore$ बिंदू D चा x निर्देशक x_2 आहे.

रेख AD हा X-अक्षाला समांतर आहे.

$\therefore$ बिंदू D चा y निर्देशक y_1 आहे.

$\therefore$ AD = d(A, D) = $x_2 - x_1$,

BD = d(B, D) = $y_2 - y_1$

Δ ABD या काटकोन त्रिकोणात, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

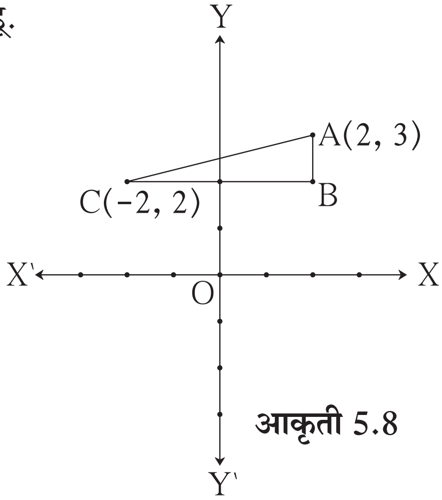
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या निष्कर्षाला अंतराचे सूत्र असे म्हणतात.

हे लक्षात घ्या की, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

मागील कृतीत आपण रेख AC ची लांबी काढण्यासाठी AB, BC या लांबी काढून पायथागोरसचे प्रमेय वापरले. आता अंतराचे सूत्र वापरून आपण त्याच रेषाखंडांच्या लांबी काढू.



आकृती 5.8

A(2, 3) आणि C(−2, 2) हे दिले आहे.

A(x_1, y_1) आणि C(x_2, y_2) मानू.

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (2-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+1}$$
$$= \sqrt{17}$$

रेख AB || Y−अक्ष आणि रेख BC || X−अक्ष.

∴ बिंदू B चे निर्देशक (2, 2) आहेत.

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0} = 4$$

आकृती 5.1 मधील P व Q या बिंदूतील अंतर (−1) − (−5) = 4; असे आपण काढले होते. त्याच बिंदूंचे निर्देशक प्रतलात (−1, 0) व (−5, 0) हे असणार. अंतराचे वरील सूत्र वापरून P व Q मधील अंतर तेवढेच येईल, हे पडताळून पाहा.

हे लक्षात ठेवूया.

- आरंभबिंदू O चे निर्देशक (0, 0) असतात. म्हणून बिंदू P चे निर्देशक (x, y) असतील तर d(O, P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) हे दोन बिंदू XY प्रतलावर असतील तर

  d(P, Q) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

  म्हणजेच, $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) P(−1, 1), Q(5, −7) या दोन बिंदूंतील अंतर काढा.

उकल : $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ मानू.

$x_1 = -1,\quad y_1 = 1,\quad x_2 = 5,\quad y_2 = -7$

अंतराचे सूत्रानुसार $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$

∴ बिंदू P आणि Q मधील अंतर 10

उदा. (2) A(−3, 2), B(1, −2) आणि C(9, −10) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल : जर d(A, B); d(B, C) आणि d(A, C) यांपैकी दोन अंतरांची बेरीज तिसऱ्या अंतराएवढी असेल, तरच बिंदू A, B, C एकरेषीय असतील.

∴ d(A, B), d(B, C) आणि d(A, C) काढू.

बिंदू A चे निर्देशक	बिंदू B चे निर्देशक	अंतराचे सूत्र
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2}$ .... (अंतराच्या सूत्रावरून)

$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ ....(II)

आणि $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) आणि (III) वरून

∴ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

∴ A, B, C हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

उदा. (3) P(6, −6), Q(3, −7) आणि R(3, 3) हे बिंदू एकरेषीय आहेत का ते ठरवा.

उकल : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (अंतराचे सूत्र वापरून)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(9)^2} = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) आणि (III) वरून $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ आणि $\sqrt{90}$ यांपैकी $\sqrt{100}$ ही सर्वांत मोठी संख्या आहे.

$(\sqrt{100})$ आणि $(\sqrt{10}+\sqrt{90})$ या संख्या समान आहेत का ते पाहू.

यासाठी $(\sqrt{100})^2$ आणि $(\sqrt{10}+\sqrt{90})^2$ यांची तुलना करा.

त्यावरून तुमच्या लक्षात येईल $(\sqrt{10}+\sqrt{90}) > (\sqrt{100})$ $\therefore PQ + PR \neq QR$

$\therefore$ P(6, −6), Q(3, −7) आणि R(3, 3) हे बिंदू एकरेषीय नाहीत.

उदा. (4) (1, 7), (4, 2), (−1, −1) आणि (−4, 4) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

उकल : जेव्हा चौकोनाच्या सर्व भुजा समान लांबीच्या आणि कर्ण समान लांबीचे असतात तेव्हा तो चौकोन चौरस असतो. $\therefore$ सर्व बाजूंच्या लांबी व कर्णांच्या लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

समजा, A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) आणि D(−4,4) हे दिलेले बिंदू आहेत.

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

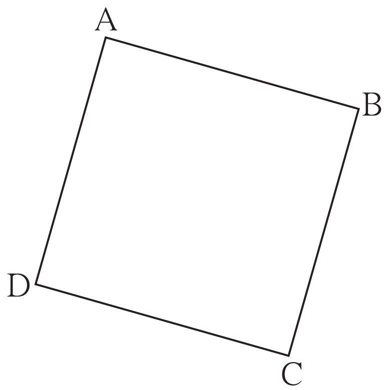
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



आकृती 5.9

$\therefore AB = BC = CD = DA$ आणि $AC = BD$

यावरून असे दिसते की, चौकोनाच्या चारही बाजूंची लांबी समान आहे तसेच दोन्ही कर्ण AC व BD यांची लांबी समान आहेत.

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) आणि (−4,4) या शिरोबिंदूंनी तयार झालेला चौकोन चौरस आहे.

उदा. (5) Y- अक्षावरील अशा बिंदूचे निर्देशक शोधा, की जो M (−5,−2)आणि N(3,2) पासून समान अंतरावर आहे.

उकल : समजा, Y- अक्षावरील बिंदू $P(0, y)$हा बिंदू M व N पासून समान अंतरावर आहे.

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) आणि N (3, 2) या बिंदूंपासून समान अंतरावर असणाऱ्या Y- अक्षावरील बिंदूचे निर्देशक (0, −2) आहेत.

उदा. (6) A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) हे Δ ABC चे शिरोबिंदू आहेत. Δ ABC च्या परिकेंद्राचे निर्देशक शोधा.

उकल : समजा, बिंदू $P(a, b)$ हा Δ ABC चे परिकेंद्र आहे. $\therefore$ P हा बिंदू A, B, C पासून समदूर आहे.

$$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2 \ldots\ldots\ldots. \text{(I)} \qquad \therefore PA^2 = PB^2$$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \ldots\ldots\ldots. \text{(II)}$$

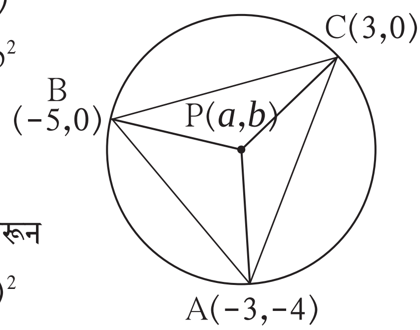
तसेच $PA^2 = PC^2$ .... (I) वरून

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \ldots\ldots\ldots. \text{(III)}$$



आकृती 5.10

समीकरण (II) आणि (III) सोडवून $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ परिकेंद्राचे निर्देशक $(-1, -\frac{1}{2})$ आहेत.

उदा. (7) बिंदू (x, y) हा $(7, 1)$ आणि $(3, 5)$ यांच्यापासून समदूर असेल तर $y = x-2$ दाखवा.

उकल : समजा, P (x, y) हा बिंदू A$(7, 1)$ आणि B$(3, 5)$ यांच्यापासून समदूर आहे.

$$\therefore AP = BP$$
$$\therefore AP^2 = BP^2$$
$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$
$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$
$$\therefore -8x + 8y = -16$$
$$\therefore x - y = 2$$
$$\therefore y = x - 2$$

उदा. (8) बिंदू A $(2,-2)$ आणि बिंदू B $(-1, y)$ यांतील अंतर 5 आहे, तर y ची किंमत काढा.

उकल : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... अंतराच्या सूत्रावरून

$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$

$\therefore 25 = 9 + (y+2)^2$

$\therefore 16 = (y+2)^2$

$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ किंवा $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ किंवा $y = -6$

$\therefore y$ ची किंमत 2 किंवा -6 आहे.

सरावसंच 5.1

1. खाली दिलेल्या बिंदूंच्या प्रत्येक जोडीतील अंतर काढा.

   (1) A(2, 3), B(4, 1) (2) P(−5, 7), Q(−1, 3) (3) R(0, −3), S$(0, \frac{5}{2})$

   (4) L(5, −8), M(−7, −3) (5) T(−3, 6), R(9, −10) (6) W$(\frac{-7}{2}, 4)$, X(11, 4)

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत हे ठरवा.

   (1) A(1, −3), B(2, −5), C(−4, 7) (2) L(−2, 3), M(1, −3), N(5, 4)

   (3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, −1) (4) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)

3. X− अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो बिंदू A(−3, 4) आणि B(1, −4) यांच्यापासून समदूर आहे.

4. P(−2, 2), Q(2, 2) आणि R(2, 7) हे काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, हे पडताळून पाहा.

5. P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) आणि S (6, −6) हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे हे दाखवा.

6. A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) आणि D(5, −4) हे ABCD या समभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

7. जर बिंदू L(x, 7) आणि M(1, 15) यातील अंतर 10 असेल, तर x ची किंमत काढा.

8. A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) हे समभुज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

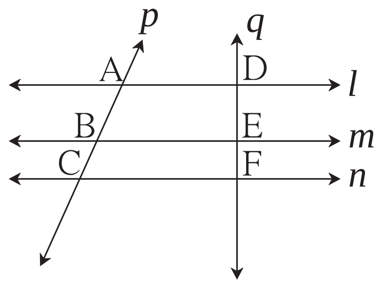
जरा आठवूया.

तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचा गुणधर्म :

आकृतीत रेषा l || रेषा m || रेषा n,

रेषा p व q या छेदिका आहेत.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



आकृती 5.11

जाणून घेऊया.

रेषाखंडांचे विभाजन (Division of a line segment)

आकृती 5.12

आकृतीत, AP = 6 आणि PB = 10.

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

हेच वेगळ्या शब्दांत 'बिंदू P हा रेख AB चे 3:5 या गुणोत्तरात विभाजन करतो', असे म्हणतात.

जेव्हा एखाद्या रेषाखंडावरील बिंदू त्याच रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करतो तेव्हा त्या विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक कसे काढतात ते पाहू.

जाणून घेऊया.

विभाजनाचे सूत्र (Section formula)

आकृती 5.13 मध्ये, XY प्रतलातील रेख AB वरील बिंदू P, रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

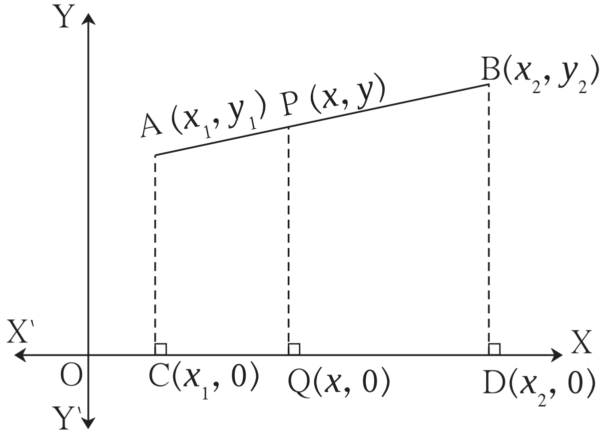
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ आणि $P(x, y)$ मानू.

रेख AC, रेख PQ आणि रेख BD हे X–अक्षावर लंब रेषाखंड काढले.

$\therefore$ $C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$ आणि $D(x_2, 0)$.

$\therefore$ $CQ = x - x_1$ आणि $QD = x_2 - x$ } .... (I)

तसेच रेख AC || रेख PQ || रेख BD.



आकृती 5.13

$\therefore$ तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांच्या गुणधर्माने, $\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$

आता, $CQ = x - x_1$ आणि $QD = x_2 - x$ .... (I) वरून

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

याचप्रमाणे बिंदू A, P आणि B मधून Y– अक्षावर लंब काढून वरील प्रमाणेच कृती करून आपल्याला $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$ मिळेल.

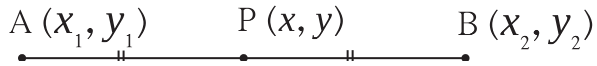
$\therefore$ बिंदू $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ असतात.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे सूत्र (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ हे दोन बिंदू असून बिंदू $P(x, y)$ हा रेख AB चा मध्यबिंदू असेल, तर

$m = n$ आता विभाजन सूत्रानुसार,

x व y च्या किमती लिहू.



आकृती 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \ m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \ m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ P या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हे आहेत. यालाच **मध्यबिंदूचे सूत्र** असे म्हणतात.

आपण मागील इयत्तेत दोन परिमेय संख्या a आणि b संख्यारेषेवर दाखवून, त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा $\frac{a+b}{2}$ हा मध्यबिंदू असतो हे दाखवले होते. तो निष्कर्ष म्हणजे आता मिळालेल्या सूत्राचा विशिष्ट प्रकार आहे. हे लक्षात घ्या.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) जर A(3,5) आणि B(7,9) असून बिंदू Q रेख AB चे 2:3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल, तर Q बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : दिलेल्या उदाहरणात $(x_1, y_1) = (3, 5)$

आणि $(x_2, y_2) = (7, 9)$ मानू.

तसेच, $m : n = 2:3$

रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

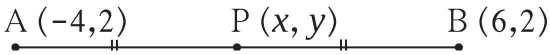
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ बिंदू Q चे निर्देशक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

उदा.(2) A(−4,2) B(6,2) या रेषाखंडांचा बिंदू P हा मध्यबिंदू आहे. तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल :



आकृती 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ आणि बिंदू P चे निर्देशक (x, y) मानू.

$\therefore$ मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ मध्यबिंदू P चे निर्देशक (1,2) येतील.

जरा आठवूया.

आपल्याला माहीत आहे की, त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात. संपातबिंदू (centroid) मध्यगेचे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

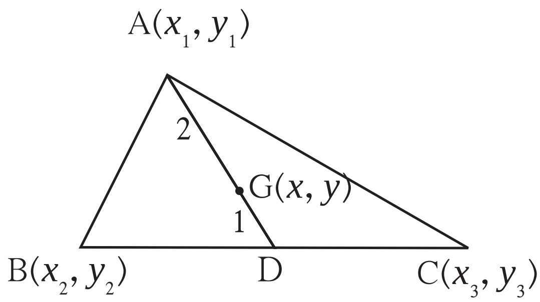
जाणून घेऊया.

मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र (Centroid formula)

त्रिकोणाच्या तिन्ही शिरोबिंदूंचे निर्देशक दिले असता विभाजन सूत्राचा वापर करून मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक कसे काढता येतात ते आपण पाहू.

समजा, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ हे Δ ABC चे शिरोबिंदू असून रेख AD ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. बिंदू $G(x, y)$ हा त्या त्रिकोणाचा मध्यगासंपातबिंदू आहे.

बिंदू D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.



आकृती 5.16

$\therefore$ बिंदू D चे निर्देशक $x = \frac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_3}{2}$ .... रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार

बिंदू G(x, y) हा Δ ABC चा मध्यगासंपातबिंदू आहे. $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ रेषाखंडाच्या विभाजनसूत्रानुसार,

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

म्हणजेच, शिरोबिंदू (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक

$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ असतात.

यालाच **मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र** म्हणतात.

हे लक्षात ठेवूया.

- विभाजनाचे सूत्र

  (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ असतात.

- मध्यबिंदूचे सूत्र

  (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ असतात.

- मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र

  (x_1, y_1), (x_2, y_2) आणि (x_3, y_3) हे त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे निर्देशक असतील तर मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ असतात.

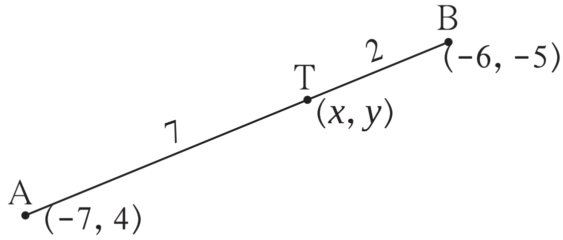
उदा. (1) A(−7,4) आणि B(−6,−5) असून बिंदू T हा रेख AB चे 7:2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो, तर T बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : समजा, T चे निर्देशक (x, y) आहेत.

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$



आकृती 5.17

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ T बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ येतील.

उदा. (2) बिंदू P(−4, 6) हा A(−6, 10) आणि B(r, s) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला 2:1 या गुणोत्तरात विभागतो, तर बिंदू B चे निर्देशक काढा.

उकल : रेषाखंड विभाजनाच्या सूत्रानुसार

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$$\therefore \quad -4 = \frac{2r-6}{3}$$

$$\therefore \quad -12 = 2r - 6$$

$$\therefore \quad 2r = -6$$

$$\therefore \quad r = -3$$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{2s+10}{3}$$

$$\therefore \quad 18 = 2s + 10$$

$$\therefore \quad 2s = 8$$

$$\therefore \quad s = 4$$

∴ बिंदू B चे निर्देशक (−3, 4) आहेत.

उदा. (3) A(15,5), B(9,20) आणि P(11,15) असून A−P−B. तर बिंदू P हा रेख AB चे कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो, ते काढा.

उकल : बिंदू P(11,15) रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करतो, असे मानू.

∴ विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$

$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$

$\therefore\ 2m = 4n$

$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ विभाजन गुणोत्तर 2 : 1 आहे.

> यاप्रमाणे y – निर्देशकांच्या किमती घालून येणारे गुणोत्तर किती येते ते काढा. तुमचा निष्कर्ष लिहा.

उदा. (4) बिंदू A (2,−2) आणि B(−7,4) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

(रेषाखंडावरील जे दोन बिंदू त्या रेषाखंडाचे तीन समान भाग करतात, त्या बिंदूंना त्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू म्हणतात.)

उकल : समजा, बिंदू P आणि Q हे बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू आहेत. म्हणजेच बिंदू P आणि Q मुळे रेख AB चे तीन समान भाग होतात.

AP = PQ = QB .... (I)

$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$ .... (I) वरून

बिंदू P रेख AB चे 1:2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

आकृती 5.18

P चा x निर्देशक $= \frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

P चा y निर्देशक $= \frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$

तसेच Q बिंदू रेख AB चे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो. म्हणजे $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

Q चा x निर्देशक $= \frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

Q चा y निर्देशक $= \frac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

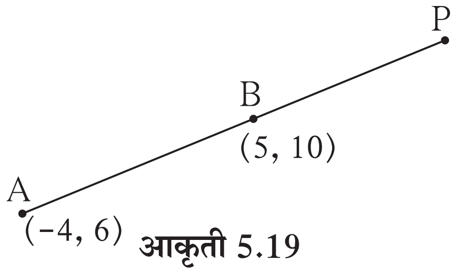
$\therefore$ रेषाखंडाच्या त्रिभाजक बिंदूंचे निर्देशक (−1, 0), (−4, 2) आहेत.

अधिक माहितीसाठी :

A आणि B या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे बाह्यविभाजन कसे करतात पाहा.

A(−4, 6), B(5, 10) असे बिंदू असतील तर AB रेषाखंडाचे 3:1 या गुणोत्तरामध्ये बाह्यविभाजन करणाऱ्या बिंदू P चे निर्देशक कसे काढता येतात ते पाहा.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ म्हणजे AP, PB पेक्षा मोठी असून A−B−P आहे.



आकृती 5.19

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ म्हणजेच AP = 3k, BP = k, तर AB = 2k

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$

आता बिंदू B हा रेषाखंड AP चे 2 : 1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

A व B चे निर्देशक दिले असता P चे निर्देशक काढायला आपण शिकलो आहोत.

सरावसंच 5.2

1. जर P बिंदू हा A(−1,7) आणि B(4,−3) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.
2. खालील प्रत्येक उदाहरणात रेख PQ चे a : b या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या A या बिंदूचे निर्देशक काढा.
   (1) P(−3, 7), Q(1, −4), a : b = 2 : 1
   (2) P(−2, −5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4
   (3) P(2, 6), Q(−4, 1), a : b = 1 : 2
3. P−T−Q असून, बिंदू T(−1, 6) हा बिंदू P(−3, 10) आणि बिंदू Q(6, −8) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो ?
4. रेख AB हा वर्तुळाचा व्यास असून बिंदू P हे केंद्र आहे. A(2, −3)आणि P (−2, 0) असल्यास B बिंदूचे निर्देशक काढा.
5. बिंदू A(8, 9) आणि B(1, 2) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे P(k, 7) हा बिंदू कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो ते काढा आणि k ची किंमत काढा.
6. (22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.
7. खाली त्रिकोणांचे शिरोबिंदू दिलेले आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक काढा.
   (1)(−7, 6), (2, −2), (8, 5)
   (2) (3, −5), (4, 3), (11, −4)
   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABC चा G हा मध्यगासंपात आहे. A, B व G यांचे निर्देशक अनुक्रमे (−14, −19), (3, 5) आणि (−4, −7) आहेत. तर C बिंदूचे निर्देशक काढा.

9. मध्यगासंपात G (1, 5) असलेल्या त्रिकोणाचे A (h, −6), B (2, 3) आणि C (−6, k) शिरोबिंदू आहेत, तर h आणि k ची किंमत काढा.

10. बिंदू A (2, 7) आणि B(−4, −8) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

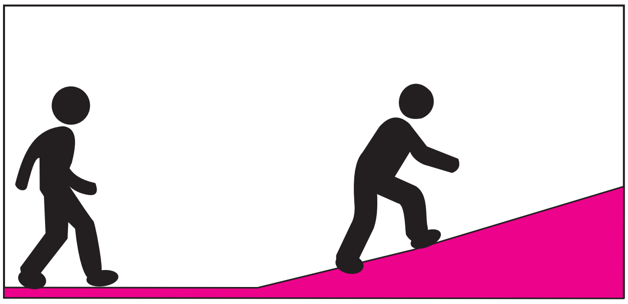
11. A (−14, −10), B(6, −2) असलेल्या रेख AB चे चार एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

12. A (20, 10), B(0, 20) असलेल्या रेख AB चे पाच एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

जाणून घेऊया.

रेषेचा चढ (Slope of a line)

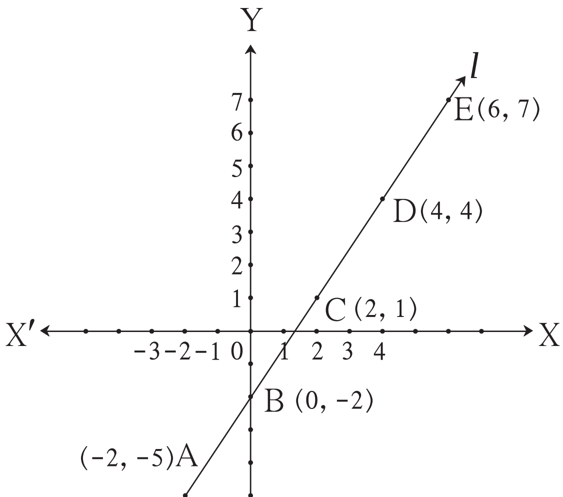
आपण सपाट जमिनीवर चालतो, तेव्हा श्रम करावे लागत नाहीत. चढावर चढताना थोडे श्रम करावे लागतात, माणसाला दम लागू शकतो. चढाच्या रस्त्यावरून जाताना गुरूत्वाकर्षण बलाच्या विरुद्ध काम करावे लागते, हे आपण विज्ञानात पाहिले आहे.



प्रतलीय निर्देशक भूमितीत रेषेचा चढ ही एक महत्त्वाची संकल्पना आहे. खाली दिलेल्या कृतीतून ही संकल्पना समजून घेऊ.

कृती I :

सोबतच्या आकृतीत A(−2, −5), B(0,−2), C(2,1), D(4,4), E(6,7) हे रेषा l चे बिंदू आहेत. या निर्देशकांचा वापर करून तयार केलेल्या पुढील सारणीचे निरीक्षण करा.



आकृती 5.20

अ. क्र.	पहिला बिंदू	दुसरा बिंदू	पहिल्या बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1)	दुसऱ्या बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

सारणीतील उरलेल्या चौकटी भरून सारणी पूर्ण करा. याप्रमाणे रेषा l वरील बिंदूंच्या आणखी काही जोड्या घ्या आणि प्रत्येक जोडीसाठी $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हे गुणोत्तर काढा.

या कृतीतून लक्षात येते की, l रेषेच्या (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या कोणत्याही दोन बिंदूंसाठी $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे.

रेषा l चे (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) हे कोणतेही दोन बिंदू असतील, तर $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ह्या स्थिर गुणोत्तराला रेषा l चा चढ म्हणतात.

रेषेचा चढ सामान्यपणे m या अक्षराने दाखवतात.

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

कृती II : आकृतीत रेषा l, t आणि n व त्यांवरील काही बिंदू दिले आहेत. त्यावरून त्या रेषांचे चढ काढा.

तुमच्या लक्षात येईल की,

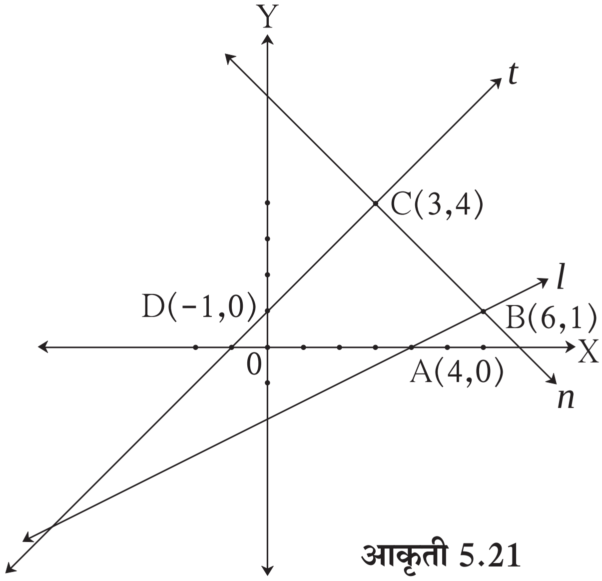
(1) रेषा l आणि रेषा t यांचे चढ धन आहेत.

(2) रेषा n चा चढ ऋण आहे.

(3) रेषा t चा चढ, रेषा l च्या चढापेक्षा जास्त आहे.

(4) X- अक्षाच्या धन दिशेशी लघुकोन करणाऱ्या l व t या रेषांचे चढ धन आहेत.

(5) X- अक्षाच्या धन दिशेशी विशालकोन करणाऱ्या n या रेषेचा चढ ऋण आहे.



आकृती 5.21

X-अक्ष, Y-अक्ष आणि अक्षांना समांतर रेषांचे चढ.

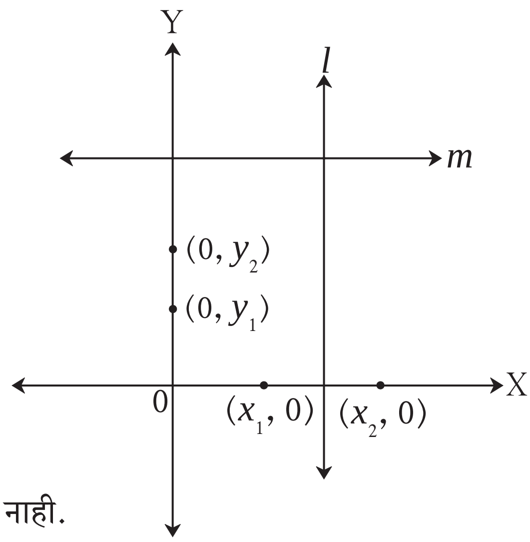
आकृती 5.22 मध्ये, $(x_1, 0)$ आणि $(x_2, 0)$ हे X- अक्षाचे दोन बिंदू आहेत.

$$\text{X- अक्षाचा चढ} = \frac{0-0}{x_2 - x_1} = 0$$

तसेच, $(0, y_1)$ आणि $(0, y_2)$ हे Y- अक्षाचे दोन बिंदू आहेत.

$$\text{Y- अक्षाचा चढ} = \frac{y_2 - y_1}{0-0} = \frac{y_2 - y_1}{0},$$

परंतु 0 ने भागता येत नसल्याने Y- अक्षाचा चढ ठरविता येत नाही.



आकृती 5.22

याप्रमाणेच रेषा m सारख्या X- अक्षाला समांतर असलेल्या कोणत्याही रेषेचा चढ काढून पाहा. तो शून्य येईल. तसेच, रेषा l सारख्या Y- अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचा चढ ठरविता येत नाही, असे दिसेल.

रेषेचा चढ – त्रिकोणमितीतील गुणोत्तर वापरून

आकृती 5.23 मध्ये, $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ हे रेषा l वरील दोन बिंदू आहेत.

रेषा l ही X अक्षाला T बिंदूत छेदते.

रेख QS $\perp$ X- अक्ष, रेख PR $\perp$ रेख QS $\therefore$ रेख PR $\parallel$ रेख TS .... संगत कोन कसोटी

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ आणि PR $= x_2 - x_1$

$\therefore \quad \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (I)

रेषा TQ ही X- अक्षाशी θ कोन करते.

$\therefore \quad \dfrac{QR}{PR} = \tan\theta$ .... (II)

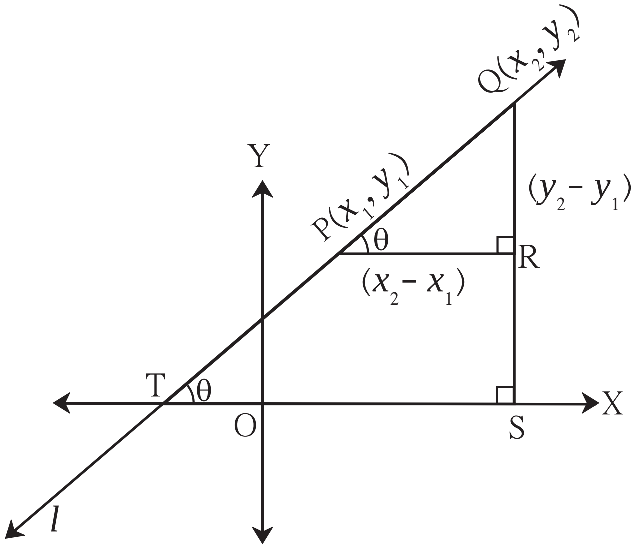
$\therefore$ (I) व (II) वरून, $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$

आता रेख PR || रेख TS, छेदिका रेषा l

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ .... संगतकोन

यावरून, रेषेने X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेल्या कोनाचे **टॅन** गुणोत्तर म्हणजे त्या रेषेचा चढ होय, अशीही चढाची व्याख्या करता येते.



आकृती 5.23

दोन रेषांचा चढ समान असतो तेव्हा त्या रेषा X- अक्षाच्या धन दिशेशी समान मापाचे कोन करतात.

$\therefore$ त्या दोन रेषा समांतर असतात.

समांतर रेषांचा चढ (Slope of parallel lines)

कृती :

आकृती 5.24 मध्ये रेषा l आणि रेषा t या दोन्ही रेषांनी X- अक्षाच्या धन दिशेशी केलेला कोन θ आहे.

$\therefore$ रेषा l || रेषा t .... संगत कोन कसोटी

रेषा l वरील बिंदू A(-3, 0) आणि बिंदू B(0, 3) विचारात घ्या. रेषा AB चा चढ काढा.

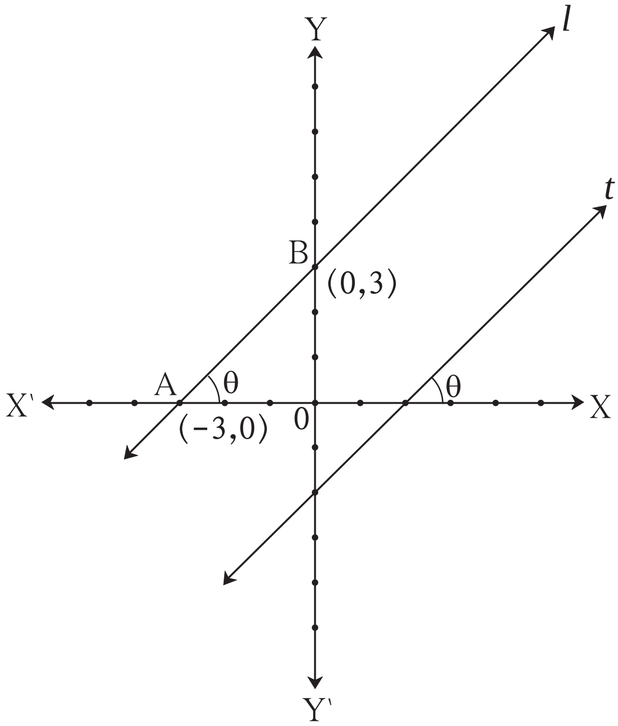
रेषा AB चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{\square - \square}{\square - \square} = \dfrac{\square}{\square}$

$= \square$

याचप्रमाणे रेषा t वरील सोयिस्कर बिंदू घेऊन तिचा चढ काढा.

यावरून समांतर रेषांचे चढ समान असतात याचा पडताळा तुम्ही घेऊ शकाल.



आकृती 5.24

या ठिकाणी $\theta = 45^\circ$ आहे.

चढ, $m = \tan\theta$ हे वापरूनही दोन्ही समांतर रेषांचे चढ समान येतात हे पडताळून पाहा.

याप्रमाणे $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ घेऊन समांतर रेषांचे चढ समान असतात याचा पडताळा घ्या.

हे लक्षात ठेवूया.

X- अक्षाचा किंवा X- अक्षाला समांतर रेषेचा चढ शून्य असतो.

Y- अक्षाचा किंवा Y- अक्षाला समांतर रेषेचा चढ ठरविता येत नाही.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) A (-3, 5), आणि B (4, -1) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उकल : समजा, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$\therefore$ रेषा AB चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-5}{4-(-3)} = \dfrac{-6}{7}$

उदा. (2) P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल : P(-2, 3), Q(1, 2) आणि R(4, 1) हे दिलेले बिंदू आहेत.

रेषा PQ चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-3}{1-(-2)} = -\dfrac{1}{3}$

रेषा QR चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-2}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$

रेषा PQ आणि रेषा QR चा चढ समान आहे.

पण बिंदू Q दोन्ही रेषांवर आहे.

$\therefore$ बिंदू P, Q, R हे एकरेषीय आहेत.

उदा. (3) जर P(k, 0) आणि Q(-3, -2),हे दोन बिंदू जोडणाऱ्या रेषेचा चढ $\dfrac{2}{7}$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : P(k, 0) आणि Q(-3, -2)

रेषा PQ चा चढ $= \dfrac{-2-0}{-3-k} = \dfrac{-2}{-3-k}$

रेषा PQ चा चढ $\dfrac{2}{7}$ दिला आहे.

$\therefore \dfrac{-2}{-3-k} = \dfrac{2}{7}$ $\qquad \therefore k = 4$

उदा. (4) A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) आणि D (7, 3) हे □ ABCD चे शिरोबिंदू असतील तर □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे हे दाखवा.

उकल : तुम्हास माहीत आहे की, रेषेचा चढ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

रेषा AB चा चढ = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

रेषा BC चा चढ = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

रेषा CD चा चढ = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

रेषा DA चा चढ = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

रेषा AB चा चढ = रेषा CD चा चढ .... (I) व (III) वरून

$\therefore$ रेषा AB || रेषा CD

रेषा BC चा चढ = रेषा DA चा चढ .... (II) व (IV) वरून

$\therefore$ रेषा BC || रेषा DA

म्हणजेच चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या परस्परांना समांतर आहेत.

$\therefore$ □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.

सरावसंच 5.3

1. रेषांनी X–अक्षाच्या धन दिशेशी केलेले कोन दिले आहेत, त्यावरून त्या रेषांचे चढ काढा.
   (1) 45° (2) 60° (3) 90°
2. खाली दिलेल्या बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषांचे चढ काढा.
   (1) A (2, 3) आणि B (4, 7) (2) P (–3, 1) आणि Q (5, –2)
   (3) C (5, –2) आणि D (7, 3) (4) L (–2, –3) आणि M (–6, –8)
   (5) E(–4, –2) आणि F (6, 3) (6) T (0, –3) आणि S (0, 4)
3. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, हे ठरवा.
   (1) A(–1, –1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(–2, –3), E(1, 0), F(2, 1)
   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, –5), Q(1, –3), R(–2, 3)
   (5) R(1, –4), S(–2, 2), T(–3, 4) (6) A(–4, 4), K(–2, $\frac{5}{2}$), N(4, –2)
4. A (1, –1),B (0, 4),C (–5, 3) हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, तर प्रत्येक बाजूचा चढ काढा.
5. A (–4, –7),B (–1, 2), C (8, 5) आणि D (5, –4) हे ABCD या समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

6. $R(1, -1)$ आणि $S(-2, k)$ असून RS या रेषेचा चढ -2 असेल तर k ची किंमत काढा.

7. $B(k, -5)$ आणि $C(1, 2)$ या रेषेचा चढ 7 असेल तर k ची किंमत काढा.

8. $P(2, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(3, 1)$ आणि $S(5, k)$ असून रेषा PQ ही रेषा RS ला समांतर आहे, तर k ची किंमत काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. योग्य पर्याय निवडून रिकाम्या जागा भरा.

(1) रेख AB, हा Y-अक्षाला समांतर असून A बिंदूचे निर्देशक (1,3) आहेत तर, B बिंदूचे निर्देशक .... असू शकतील.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,-3)

(2) खालीलपैकी .... हा बिंदू X- अक्षावर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे आहे.

(A)(-2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (-3,4) या बिंदूचे आरंभबिंदूपासून अंतर ...... आहे.

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)-5

(4) एका रेषेने X- अक्षाच्या धन दिशेशी 30° चा कोन केला आहे, म्हणून त्या रेषेचा चढ .... आहे.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, ते ठरवा

(1) A (0,2) , B (1,-0.5), C (2,-3)

(2) P (1, 2) , Q $(2, \frac{8}{5})$, R $(3, \frac{6}{5})$

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) आणि Q (12,20) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

4. A (3,8) आणि B (-9,3) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला Y- अक्ष कोणत्या गुणोत्तरात विभाजित करतो ?

5. X-अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो P(2,-5) आणि Q(-2,9) पासून समदूर असेल.

6. खालील बिंदूंतील अंतरे काढा.

(1) A $(a, 0)$, B $(0, a)$ (2) P (-6, -3), Q (-1, 9) (3) R $(-3a, a)$, S $(a, -2a)$

7. एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A (-3,1), B (0,-2) आणि C (1,3) आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या परिकेंद्राचे निर्देशक काढा.

8. खालील बिंदूंना जोडणारे रेषाखंड त्रिकोण तयार करू शकतील का? त्रिकोण तयार झाल्यास त्याचा बाजूंवरून होणारा प्रकार सांगा.

(1) L (6,4) , M (–5,–3) , N (–6,8)

(2) P (–2,–6) , Q (–4,–2), R (–5,0)

(3) A $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, B $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, C $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$

9. जर P (–12,–3) आणि Q (4, k) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ $\frac{1}{2}$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

10. A(4, 8) आणि B(5, 5) या बिंदूंना जोडणारी रेषा, C(2,4) आणि D(1,7) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला समांतर आहे हे दाखवा.

11. P(1,–2), Q(5,2), R(3,–1), S(–1,–5) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

12. जर P(2,1), Q(–1,3), R(–5,–3) आणि S(–2,–5) तर □ PQRS हा आयत आहे हे दाखवा.

13. A (–1, 1), B (5, –3) आणि C (3, 5) हे शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगांच्या लांबी काढा.

14★. जर D (–7, 6), E (8, 5)आणि F (2, –2) हे त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू असतील, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक काढा.

15. A(4, –1), B(6, 0), C(7, –2) आणि D(5, –3) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा

16. A(7, 1), B(3, 5) आणि C(2, 0) शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक आणि परिवर्तुळाची त्रिज्या काढा.

17. जर A(4,–3) आणि B(8,5), तर रेख AB चे 3:1 या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा.

18★. A(–4, –2), B(–3, –7) C(3, –2) आणि D(2, 3) हे बिंदू क्रमाने जोडले तर तयार होणाऱ्या ABCD या चौकोनाचा प्रकार लिहा.

19★. रेख AB वरील बिंदू P, Q, R व S यांच्यामुळे त्या रेषाखंडाचे पाच एकरूप भाग होतात.
जर A–P–Q – R–S–B आणि Q(12, 14), S(4, 18) ; तर A, P, R आणि B चे निर्देशक काढा.

20. P (6,–6), Q (3,–7) आणि R (3,3) यांतून जाणाऱ्या वर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक काढा.

21★. समांतरभुज चौकोनाच्या तीन शिरोबिंदूंचे निर्देशक A (5,6), B (1,–2) आणि C (3,–2) असतील तर चौथ्या बिंदूच्या निर्देशकांच्या शक्य त्या सर्व जोड्या काढा.

22. A (1,7), B (6,3) C (0,–3) आणि D (–3,3) हे शिरोबिंदू असलेला एक चौकोन आहे. त्या चौकोनाच्या प्रत्येक कर्णाचा चढ काढा.

❑❑❑

AKPEC7