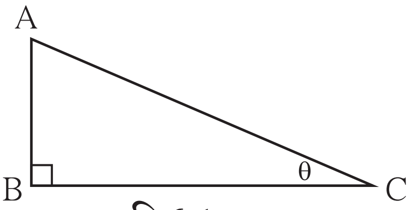
6 त्रिकोणमिति

आओ सीखें

- त्रिकोणमितीय अनुपात
- उन्नत कोण तथा अवनत कोण
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
- ऊँचाई तथा दूरी पर आधारित उदाहरण

थोड़ा याद करें

1. संलग्न आकृति के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।



आकृति 6.1

$\sin\theta = \dfrac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \dfrac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \dfrac{\square}{\square}$

2. नीचे दिए गए अनुपातों के बीच का संबंध लिखिए ।

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta\,\tan(90 - \theta) = \square$

3. नीचे दिया गया समीकरण पूर्ण कीजिए ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. नीचे दिए गए त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान लिखिए ।

(i) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

हमने नौवीं कक्षा में न्यूनकोण के कुछ त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन किया है । इस वर्ष न्यून कोण के ही कुछ और त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन करेंगे ।

आओ जानें

कोसेक, सेक और कॉट अनुपात (cosec, sec and cot ratios)

कोण के साईन अनुपात के व्युत्क्रम अनुपात को कोसिकेंट (cosecant) अनुपात कहते हैं ।

संक्षेप में इसे cosec लिखा जाता है । $\therefore\ \text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

इसी प्रकार कोसाइन और टँजेंट अनुपातों के व्युत्क्रम अनुपात को क्रमश: सिकेंट (secant) और कोटँजेंट (cotangent) अनुपात कहते हैं और इसे संक्षेप में क्रमश: sec और cot लिखते हैं ।

$\therefore\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ और $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

आकृति 6.2 में,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore\ \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

अर्थात, $\text{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

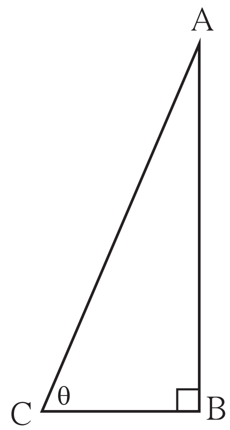
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

अर्थात, $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ यह आप जानते हैं ।

$$\therefore\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



आकृति 6.2

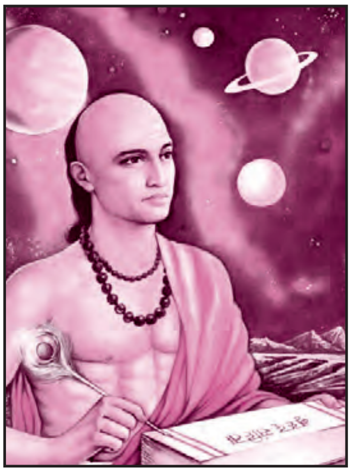
इसे ध्यान में रखें

त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंध

cosec, sec और cot इन अनुपातों की परिभाषा से,

- $\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta \quad \therefore \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

अधिक जानकारी हेतू



महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट का जन्म इ.स. 476 में कुसुमपुर नामक गाँव में हुआ था । यह गाँव बिहार में पटना शहर के पास है । उन्होंने अंकगणित, बीजगणित और भूमिति जैसी गणित की शाखाओं के लिए बहुत कार्य किया । उन्होंने 'आर्यभटीय' नामक ग्रंथ में अनेक गणितीय निष्कर्ष सूत्र के रूप में लिखकर रखे हैं । उदाहरणार्थ,

(1) अंकगणितीय श्रृंखला का n वाँ पद ज्ञात करने का और प्रथम n पदों के योगफल का सूत्र

(2) $\sqrt{2}$ का मान ज्ञात करने का सूत्र

(3) π का मान 3.1416 चार दशमलव स्थान तक का सही मान

खगोलशास्त्र के अध्ययन में उन्होंने त्रिकोणमिति का उपयोग किया और **ज्या अनुपात (sine ratio)** की संकल्पना का उपयोग पहली बार किया ।

उस समय के विश्व के गणितीय ज्ञान को ध्यान में रखें तो उनके कार्य श्रेष्ठ थे । इसलिए उनके ग्रंथ का प्रसार पूरे भारत में उसी प्रकार अरब देशों से होते हुए यूरोप तक हुआ ।

सभी निरीक्षकों का विचार था कि पृथ्वी स्थिर है और सूर्य, चंद्र तथा तारे पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। परंतु आर्यभट ने लिखा कि जिस प्रकार नाव से यात्रा करते समय तट के वृक्ष तथा वस्तुएँ विपरीत दिशा में जाती हुई प्रतीत होती हैं, उसी प्रकार पृथ्वी के लोगों को भी सूर्य, चंद्र, तारों इत्यादि की गति का आभास होता है । अर्थात पृथ्वी भ्रमण करती है। तब यह मान्य हुआ कि पृथ्वी अपने चारों ओर घूमती है । इसी कारण आकाश में ग्रह, तारों के घूमने का आभास होता है ।

19 अप्रैल 1975 को भारत ने अंतरिक्ष में अपना पहला उपग्रह अंतरिक्ष में प्रक्षेपित किया । इस उपग्रह को 'आर्यभट' नाम देकर देश ने इस महान गणितज्ञ को गौरवान्वित किया ।

★ $0°, 30°, 45°, 60°$ और $90°$ माप के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारिणी।

त्रिकोणमितीय अनुपात	कोणों के माप (θ)				
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	निश्चित नहीं कर सकते
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	निश्चित नहीं कर सकते	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	निश्चित नहीं कर सकते
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	निश्चित नहीं कर सकते	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

आओ जानें

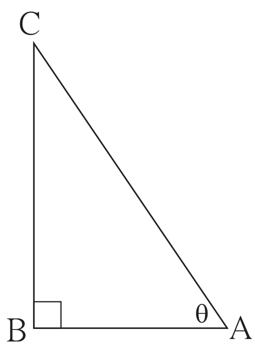
त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometrical identities)

संलग्न आकृति 6.3 में समकोण Δ ABC में, $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



आकृति 6.3

इसी प्रकार, पायथागोरस के प्रमेयानुसार ,

$BC^2 + AB^2 = AC^2 \;.\;.\;.\;.\;.(I)$

समीकरण (I) के दोनों पक्षों में AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \quad \frac{BC^2}{AC^2}+\frac{AB^2}{AC^2}=1$

$\therefore \quad \left(\frac{BC}{AC}\right)^2+\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ को $\sin^2\theta$ और $(\cos\theta)^2$ को $\cos^2\theta$ इस प्रकार लिखते हैं।]

$\mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ .... (II)

अब समीकरण (II) के दोनों पक्षों में $\sin^2\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\mathbf{1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta}$ .... (III)

उसी प्रकार, समीकरण (II) के दोनों पक्षों में $\cos^2\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$ .... (IV)

समीकरण (II), (III), तथा (IV) यह मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) यदि $\sin\theta = \frac{20}{29}$ हो तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : **विधि I**

हम जानते हैं कि

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$

$= \frac{441}{841}$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{21}{29}$

विधि II

$\sin\theta = \frac{20}{29}$

आकृति के अनुसार $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore$ AB = $20k$ तथा AC = $29k$

माना BC = x

पायथागोरस के प्रमेय से

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

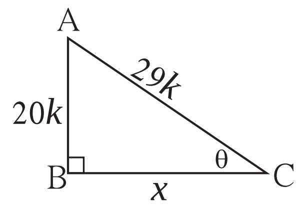
$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore \quad x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$



आकृति 6.4

उदा. (2) यदि $\sec\theta = \frac{25}{7}$ तो $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : **विधि I**

हम जानते हैं कि,

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1+\tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625-49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

विधि II

आकृति के अनुसार,

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

$$\therefore \quad PQ = 7k,\ PR = 25k$$

पायथागोरस के प्रमेय से,

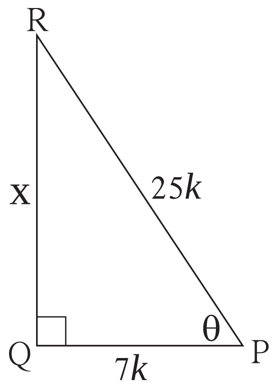
$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore \quad QR = 24k$$

अब, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



आकृति 6.5

उदा. (3) यदि $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ हो तो $\sec\theta$ और $\text{cosec}\,\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$$

हम जानते हैं कि,

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1+\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{5}{13}$$

अब, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{13}{12}$$

उदा. (4) यदि $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\dfrac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : **विधि I**

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{1}{2} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{1+2} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

विधि II

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

हम जानते हैं कि $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{1+2} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

उदा. (5) सिद्ध कीजिए कि, $\sec x + \tan x = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

हल : $\sec x + \tan x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

उदा. (6) नीचे दिए गए समीकरणों में θ का निरसन कीजिए।

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

हल :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$ .... (I)

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ .... (II)

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़नेपर

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{x+y}{2a}$ .... (III)

समीकरण (II) में से (I) को घटानेपर,

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{y-x}{2b}$ .... (IV)

अब, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

अथवा $\left(\dfrac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. यदि $\sin\theta = \dfrac{7}{25}$ तो $\cos\theta$ तथा $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ तो $\sec\theta$ तथा $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\cot\theta = \dfrac{40}{9}$ तो $\operatorname{cosec}\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ हो तो $\sec\theta$, $\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\tan\theta = 1$ तो $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. सिद्‌ध कीजिए।

   (1) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \sec\theta$

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) यदि $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ तो सिद्ध कीजिए कि $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

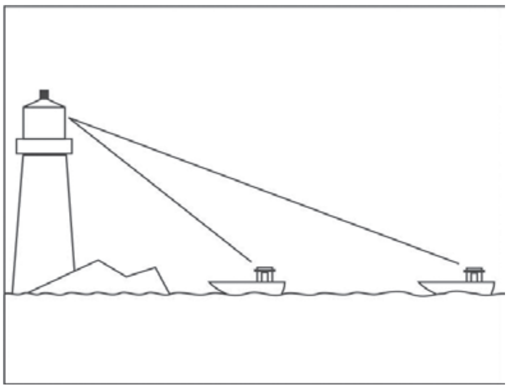
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

आओ जानें

त्रिकोणमिति का उपयोजन (Application of trigonometry)

कई बार हमें मीनार की, इमारत की या पेड़ की उँचाई उसी प्रकार जहाज की दीपस्तंभ से दूरी अथवा नदी के पाट की चौड़ाई इत्यादि ज्ञात करनी होती है । इन दूरियों का हम प्रत्यक्ष रूप से मापन नहीं कर सकते । किंतु त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से ऊँचाई तथा दूरी निश्चित कर सकते हैं ।



आकृति 6.6

ऊँचाई तथा दूरी निश्चित करने के लिए सर्वप्रथम दी गई जानकारी को दर्शाने वाली कच्ची आकृति (चित्र) तैयार करेंगे । वृक्ष (पेड़), पर्वत, मीनार आदि वस्तुएँ जमीन पर लंबवत हैं, इसे दर्शाने के लिए हम आकृति में लंब रेखाखंड का उपयोग करेंगे । हम निरीक्षक की ऊँचाई का विचार नहीं करेंगे । सामान्यत: हम मानते हैं कि निरीक्षक की दृष्टि क्षैतिज समांतर है ।

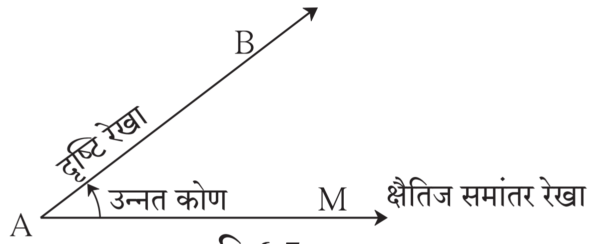
सर्व प्रथम हम कुछ संबंधित संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे ।

(i) दृष्टि रेखा (Line of vision) :

बिंदु 'A' पर खड़ा निरीक्षक बिंदु 'B' की ओर देखता है तब रेखा AB को दृष्टि रेखा कहते हैं ।

(ii) उन्नत कोण (Angle of elevation) :

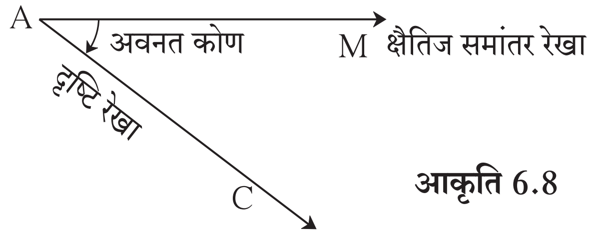
रेखा AM निरीक्षक की सामान्य दृष्टि रेखा है, जो क्षितिज के समांतर है। निरीक्षण किया जाने वाला बिंदु B, A से अधिक ऊँचाई पर है, तब रेखा AB यह दृष्टि रेखा, रेखा AM से जो कोण बनाती है उसे उन्नत कोण कहते हैं । आकृति में $\angle$ MAB उन्नत कोण है ।



आकृति 6.7

(iii) अवनत कोण (Angle of depression) :

यदि निरीक्षण किया जाने वाला बिंदु C क्षैतिज समांतर रेखा AM के नीचे हो तब रेखा AC यह दृष्टि रेखा, रेखा AM से अवनत कोण बनाती है । आकृति में $\angle$ MAC यह अवनत कोण है ।



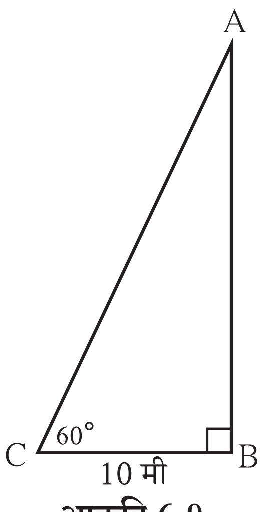
आकृति 6.8

जब हम क्षैतिज समांतर रेखा की ऊपरी दिशा में देखते हैं तब बनने वाला कोण उन्नत कोण होता है ।
जब हम क्षैतिज समांतर रेखा के नीचे की दिशा में देखते हैं तब बनने वाला कोण अवनत कोण होता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी पेड़ के तने से 10 मी की दूरी पर खड़ा निरीक्षक पेड़ की चोटी की ओर देखता है तब 60° माप का उन्नत कोण बनता है । उस पेड़ की ऊँचाई कितनी होगी ? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

हल : आकृति 6.9 में बिंदु C के पास निरीक्षक है और AB पेड़ है ।



आकृति 6.9

AB = h = पेड़ की ऊँचाई

निरीक्षक की पेड़ से दूरी BC = 10 मी

और उन्नत कोण (θ) = $\angle$ BCA= 60°

आकृति से, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) तथा (II) से

$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ मी

$\therefore$ पेड़ की ऊँचाई 17.3 मी है ।

उदा. (2) 40 मी ऊँची इमारत की छत से उस इमारत से कुछ मीटर की दूरी पर खड़े स्कूटर की ओर देखने पर 30° माप का अवनत कोण बनता है तो वह स्कूटर इमारत से कितनी दूरी पर है ?

($\sqrt{3}$ = 1.73)

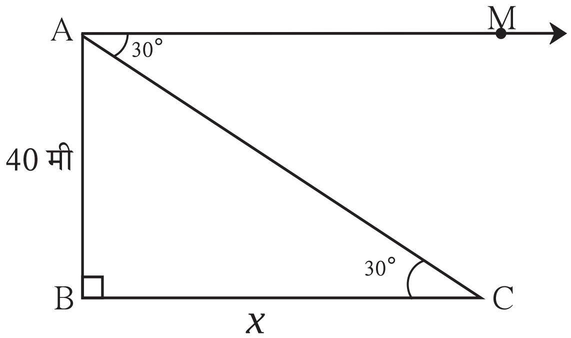
हल : आकृति 6.10 में रेख AB इमारत है । इमारत से 'x' मी की दूरी 'C' पर स्कूटर खड़ा है।

आकृति में A पर निरीक्षक खड़ा है ।

AM यह क्षैतिज समांतर रेखा है ।

$\angle$ MAC यह अवनत कोण है ।

ध्यान दें कि $\angle$ MAC तथा $\angle$ ACB एकांतर कोण सर्वांगसम है ।



आकृति 6.10

आकृति से, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{x}$

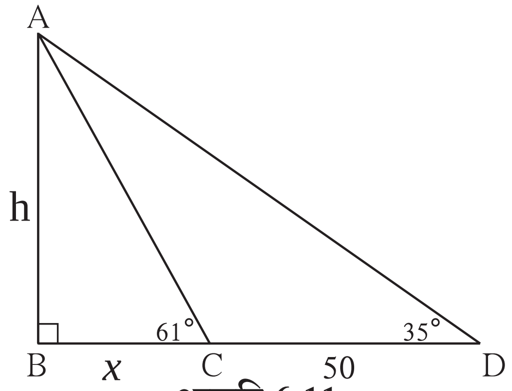
$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.20$ मी

$\therefore$ वह स्कूटर इमारत से 69.20 मी दूरी पर खड़ा है ।

उदा. (3) नदी के पाट की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए एक व्यक्ति एक किनारे से दूसरे किनारे पर स्थित मीनार की चोटी को देखता है । उस समय 61° माप का उन्नत कोण बनता है । उसी रेखा में नदी के उसी किनारे से 50 मी की दूरी पर पीछे जाकर मीनार की ऊपरी चोटी को देखने पर 35° माप का उन्नत कोण बनता हो तो नदी की चौड़ाई और मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए । ($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



आकृति 6.11

हल : रेख AB नदी के दूसरे किनारे की मीनार की ऊँचाई को दर्शाता है । 'A' मीनार की चोटी तथा रेख BC नदी की चौड़ाई दर्शाता है ।

माना कि मीनार की ऊँचाई h मी तथा नदी की चौड़ाई x मी है ।

आकृति से $\tan 61^\circ = \dfrac{h}{x}$

$\therefore \; 1.8 = \dfrac{h}{x}$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 से गुणा करनेपर

समकोण Δ ABD में,

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{x+50}$$

$$0.7 = \frac{h}{x+50}$$

$\therefore \quad h = 0.7\,(x + 50)$

$\therefore \quad 10h = 7\,(x + 50)$ .... (II)

[(I) तथा (II) से]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

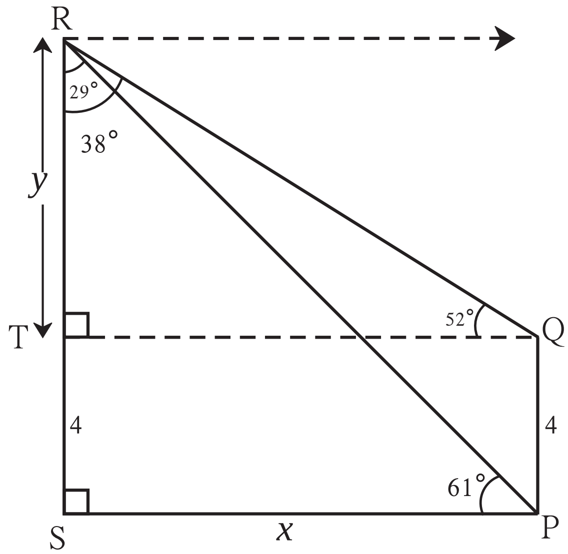
$\therefore \quad x = \frac{350}{11} = 31.82$

अब, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ मी.

$\therefore$ नदी के पाट की चौड़ाई = 31.82 मी मीनार की ऊँचाई = 57.28 मी

उदा. (4) रोशनी घर के दरवाजे पर खड़ी थी। उसने घर से कुछ ही दूरी पर स्थित एक पेड़ की चोटी पर बैठे एक गरुड़ को देखा, तब उसकी दृष्टि से 61° माप का उन्नत कोण बना था। उसे ठीक से देखने के लिए वह घर की 4 मीटर ऊँची छत पर गई। यदि वहाँ से गरुड़ को देखते समय 52° मापवाला उन्नत कोण बना तो गरुड़ जमीन से कितनी ऊँचाई पर था ?
(उत्तर पासवाले पूर्णांक तक ज्ञात कीजिए।)



आकृति 6.12

($\tan 61^\circ = 1.80$, $\tan 52^\circ = 1.28$, $\tan 29^\circ = 0.55$, $\tan 38^\circ = 0.78$)

हल : माना आकृति 6.12 में PQ घर और SR पेड़ है । गरुड़ R स्थान पर है ।

रेख QT $\perp$ रेख RS खींचा

$\therefore$ $\square$ TSPQ आयत है ।

माना SP = x, TR = y

अब, Δ RSP में, $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

उसी प्रकार, Δ RTQ में, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

उसी प्रकार, $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \dfrac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) तथा (II) से

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (पासवाले पूर्णांक तक)

$\therefore$ RS = $y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ गरुड़ जमीन से 14 मीटर की ऊँचाई पर था ।

उदा. (5) आँधी के कारण किसी पेड़ का सिरा टूटकर जमीन की ओर झुक गया तब झुके हुए सिरे द्‌वारा जमीन से 30° माप का कोण बनता है । पेड़ के सिरे तथा तने के बीच की दूरी 10 मी हो तो पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

हल : माना, आकृति 6.13 में पेड़ AB का शीर्ष बिंदु 'A' है । आँधी के कारण 'C' पर मुड़ने से पेड़ बिंदु D स्थान पर (जमीन पर) टिका हुआ है ।

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 मी, माना BC = x मी

और CA= CD = y मी

समकोण Δ CDB में,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

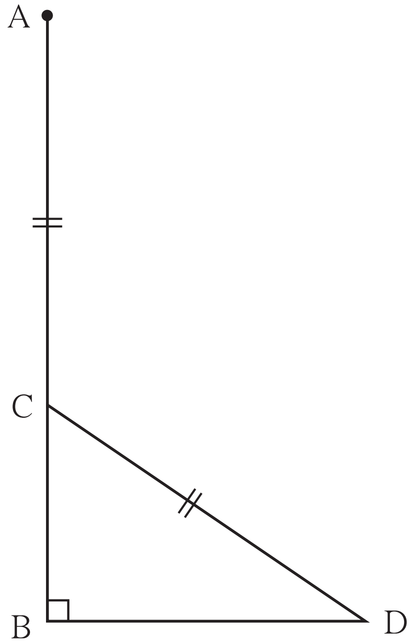
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

पेड़ की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मी है ।



आकृति 6.13

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. कोई व्यक्ति किसी गिरिजाघर से 80 मीटर दूरी पर खड़ा है । उस व्यक्ति द्‌वारा गिरिजाघर की छत की ओर देखने पर 45° माप का उन्नत कोण बनता हो तो, गिरिजाघर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
2. दीपस्तंभ से किसी जहाज की ओर देखते समय 60° माप का अवनत कोण बनता है । यदि दीपस्तंभ की ऊँचाई 90 मीटर हो तो वह जहाज दीपस्तंभ से कितनी दूरी पर होगा? ($\sqrt{3} = 1.73$)
3. 12 मीटर चौड़ाई वाले रास्ते के दोनों ओर आमने-सामने दो इमारतें हैं । उनमें से एक की ऊँचाई 10 मीटर है । उसके छत से दूसरे इमारत की छत की ओर देखते समय 60° माप का उन्नत कोण बनता हो तो, दूसरी इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?
4. 18 मीटर तथा 7 मीटर ऊँचाई वाले दो खंभे जमीन पर खड़े हैं । उनके ऊपरी सिरों को जोड़ने वाले तार की लंबाई 22 मीटर हो तो उस तार द्‌वारा क्षैतिज समांतर सतह से बने कोण का माप ज्ञात कीजिए ।
5. आँधी के कारण किसी पेड़ का सिरा टूटकर जमीन से 60° माप का कोण बनाता है । पेड़ का जमीन पर टिका हुआ सिरा तथा पेड़ के तने के बीच की दूरी 20 मीटर हो तो, पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
6. एक पतंग उड़ते समय जमीन से 60 मीटर की लंब ऊँचाई तक पहुँचती है । पतंग के धागे का एक सिरा जमीन पर बाँधने पर जमीन तथा धागे के बीच 60° माप का कोण बनता है । धागा एकदम सीधा होगा यह मानकर धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए । ($\sqrt{3} = 1.73$)

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) $\sin\theta \ \ \mathrm{cosec}\theta$ = कितना ?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) निम्नलिखित में से $\mathrm{cosec}45°$ का मान कौन – सा है ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = कितना ?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\mathrm{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) जब हम क्षैतिज समांतर रेखा के ऊपर की दिशा में देखते हैं । तब .... कोण बनता है ।

(A) उन्नत कोण (B) अवनत कोण (C) शून्य (D) रेखीय

2. यदि $\sin\theta = \frac{11}{61}$, तो सर्वसमिका का उपयोग कर $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

3. यदि $\tan\theta = 2$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

5. सिद्‌ध कीजिए ।

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \mathrm{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} + \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

6. एक लड़का किसी इमारत से 48 मीटर की दूरी पर खड़ा है। उस इमारत के ऊपरी सिरे की ओर देखते समय लड़के द्‌वारा 30° माप का उन्नत कोण बनता है तो उस इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?

7. दीपस्तंभ से किसी जहाज को देखते समय 30° माप का अवनत कोण बनता है। दीपस्तंभ की ऊँचाई 100 मी हो तो, दीपस्तंभ से जहाज की दूरी ज्ञात कीजिए।

8. 15 मी चौड़ाईवाले रास्ते की दोनों ओर आमने – सामने दो इमारते हैं। 12 मी ऊँचाईवाली पहली इमारत की छत से दूसरी इमारत की छत को देखने पर 30° माप का उन्नत कोण बनता है तो, दूसरी इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?

9. अग्निशामक दल के वाहन पर रखी गई सीढ़ी अधिक से अधिक 70° माप के कोण तक उठाई जा सकती है। उस समय सीढ़ी की अधिक से अधिक लंबाई 20 मी होती है। वाहन पर सीढ़ी का सिरा जमीन से 2 मी ऊँचाई पर हो तो, सीढ़ी का दूसरा सिरा जमीन से अधिक से अधिक कितनी ऊँचाई पर पहुँचाया जा सकता है? ($\sin 70^\circ \approx 0.94$)

10★. आकाश में उड़ते हुए हवाई जहाज चालक ने हवाई अड्डे पर हवाई जहाज को उतारते समय 20° का अवनत कोण बनाया। उस समय हवाई जहाज का औसत वेग 200 किमी प्रति घंटा था। 54 सेकंड में हवाई जहाज हवाई अड्डे पर उतरा। आकाश से जमीन पर उतरते समय हवाई जहाज जमीन से अधिक से अधिक कितनी उँचाई पर था? ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)

PSK481