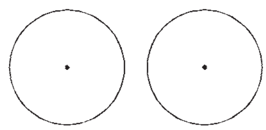
3 دائرہ Circle

آیئے سیکھیں

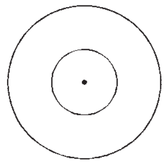
- ایک، دو، تین نقاط سے گذرنے والے دائرے
- قاطع خط اور مماس
- مس کرنے والے دائرے
- دائرہ کے قوس
- قوسی زاویہ اور مقطوعہ قوس
- مستقیم المحیط ذوار بعتہ الاضلاع
- مماس قاطع زاویے کا مسئلہ
- وتروں کے تقاطع کا مسئلہ

آیئے ذرا یاد کریں

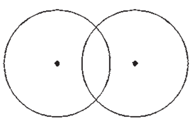
دائرہ کے تعلق سے اصطلاحات 'مرکز، نصف قطر، قطر، وتر، اندرون، بیرون' سے ہم بخوبی واقف ہیں۔
'متماثل دائرے، ہم مرکز دائرے اور قطع کرنے والے دائرے' ان اصطلاحوں کو یاد کیجیے۔



متماثل دائرے



ہم مرکز دائرے



متقاطع دائرے

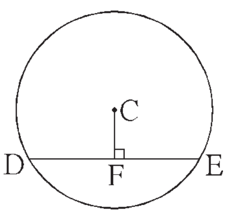
نویں جماعت میں مطالعہ کیے ہوئے وتروں کی خصوصیت ذیل کے عملی کام کی مدد سے یاد کیجیے۔

عملی کام (I) : بازو کی شکل 3.1 میں C مرکز والے دائرے کا وتر قطعہ DE ہے۔

قطعہ CF ⊥ وتر DE

اگر دائرے کا قطر 20 سم اور DE = 16 ہو تو CF = ?

اس سوال کو حل کرنے کے لیے استعمال کیے گئے مسئلے اور خصوصیت کو یاد کر کے لکھیے۔



شکل 3.1

(1) دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود ....

(2) ....

(3) ....

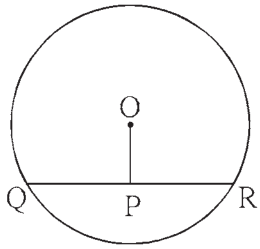
ان خصوصیت کا استعمال کر کے سوال حل کیجیے۔

عملی کام (II) : متصلہ شکل 3.2 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔

قطعہ QR وتر ہے۔نقطہ P وتر QR کا وسطی نقطہ ہے۔

اگر QR = 24 ، OP = 10 ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

اس سوال کو حل کرنے کے لیے استعمال میں آنے والے مسئلے لکھیے ۔



شکل 3.2

(1) ....

(2) ....

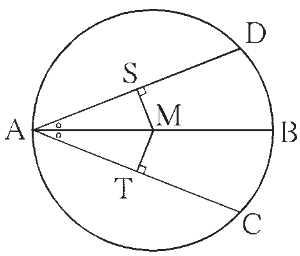
ان مسئلوں کا استعمال کر کے مثال حل کیجیے۔

عملی کام (III) : شکل 3.3 میں دائرے کا مرکز M ہے اور قطعہ AB قطر ہے۔

وتر AD ⊥ MS قطعہ، وتر AC ⊥ MT قطعہ،

∠ DAB ≅ ∠ CAB ہو تو ثابت کیجیے وتر AC ≅ وتر AD

اس سوال کو حل کرنے کے لیے درج ذیل میں سے کون سا مسئلہ استعمال کریں گے؟



شکل 3.3

(1) دائرے کے دو وتر، دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوں تو ان کی لمبائی مساوی ہوتی ہے۔

(2) ایک ہی دائرے کے متماثل وتر، دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

اس کے علاوہ مثلث کے متماثلث کی درج ذیل میں سے کون سی آزمائش استعمال ہوگی؟

(1) ضل زا ضل (2) زا ضل زا (3) ضل ضل ضل (4) زا زا ضل (5) وتر ضلع آزمائش

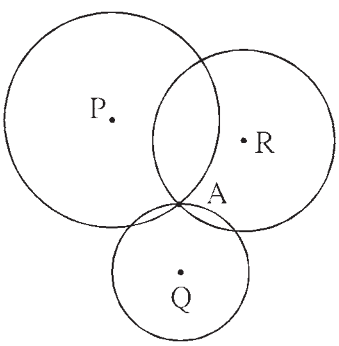
مناسب آزمائش اور مسئلہ کا استعمال کر کے ثبوت لکھیے ۔

آیئے سمجھ لیں

ایک، دو، تین نقاط سے گزرنے والے دائرے

متصلہ شکل 3.4 میں، ایک مستوی میں نقطہ A دکھایا گیا ہے۔ P، Q اور R مراکز کے تین دائرے نقطہ A سے گزرتے ہیں۔ کیا آپ کو ایسا محسوس ہوتا ہے کہ نقطہ A سے گزرنے والے اور کتنے دائرے ہو سکتے ہیں؟

آپ کا جواب بہت زیادہ یا 'بے شمار' اس طرح ہو تو صحیح ہے۔ایک ہی نقطہ سے گزرنے والے بے شمار دائرے ہوتے ہیں۔

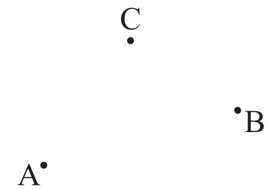


شکل 3.4

متصلہ شکل 3.5 میں A اور B متفرق نقاط سے گذرنے والے کتنے دائرے ہوں گے؟

A، B، C ان تینوں نقاط سے کتنے دائرے گذر سکتے ہیں؟

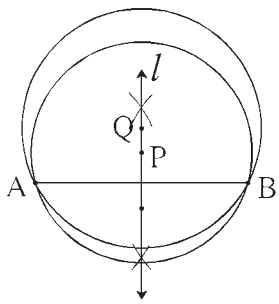
ذیل میں دیے ہوئے عملی کام میں کتنے جوابات حاصل ہوتے ہیں۔ آیئے دیکھتے ہیں۔



شکل 3.5

عملی کام (I) : نقطہ A اور نقطہ B کو ملانے والا قطعہ خط AB کھینچیے۔

اس قطعہ کا عمودی ناصف خط l کھینچیے۔ خط l پر نقطہ P مرکز ہے اور PA کو نصف قطر مان کر دائرہ بنائیے۔ دیکھیے کہ یہ دائرہ نقطہ B سے گذرتا ہے۔ اس کی وجہ معلوم کیجیے۔ (عمودی ناصف کی خصوصیت یاد کیجیے)



شکل 3.6

خط l پر ایک اور نقطہ Q لیجیے۔ Q کو مرکز اور QA کو نصف قطر مان کر بنایا گیا۔ کیا یہ دائرہ بھی نقطہ B سے گذرتا ہے؟ ذرا غور کیجیے۔

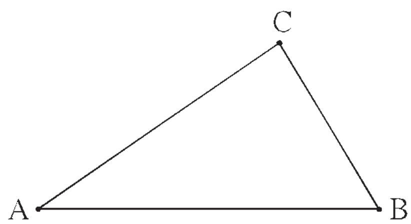
نقطہ A اور نقطہ B سے گذرنے والے اور کتنے دائرے آپ بنا سکتے ہیں؟ ان کے مراکز کہاں واقع ہوں گے؟

عملی کام (II) : غیر ہم خطی نقاط A، B، C لیجیے۔

ان تینوں نقاط سے گذرنے والا دائرہ بنانے کے لیے ہمیں کیا کرنا ہوگا؟

ان تینوں نقاط سے گذرنے والا دائرہ بنائیے۔

کیا ان تین نقاط سے گذرنے والے مزید دائرے بنائے جا سکتے ہیں؟ غور کیجیے۔



شکل 3.7

عملی کام (III) : تین ہم خطی نقاط D، E، F لیجیے۔ ان تینوں نقاط سے گذرنے والا دائرہ بنانے کی کوشش کیجیے۔ اس طرح ہمیں دائرہ بنانا ممکن ہے یا نہیں۔ اگر نہیں ہے تو وہ کیوں نہیں بنایا جا سکتا؟ غور کیجیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) ایک نقطہ سے بے شمار دائرے گذرتے ہیں۔

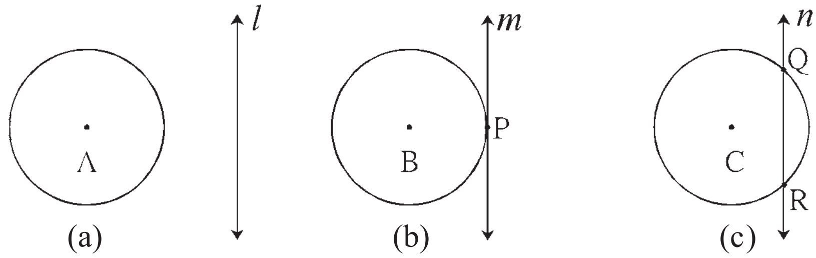
(2) دو مختلف نقاط سے بے شمار دائرے گذرتے ہیں۔

(3) تین غیر ہم خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گذرتا ہے۔

(4) تین ہم خطی نقاط سے ایک بھی دائرہ نہیں گذرتا۔

آئیے سمجھ لیں

قاطع خط اور مماس (Secant And Tangent)



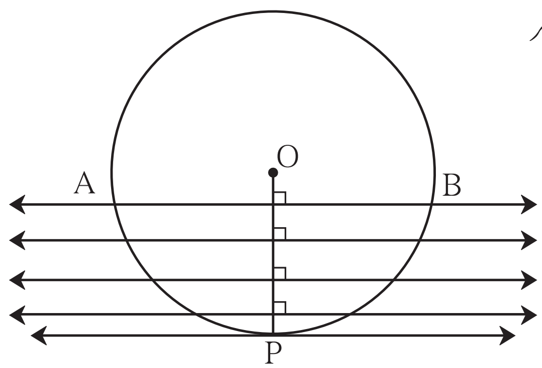
شکل 3.8

شکل 3.8 (a) میں خط l اور دائرہ میں ایک بھی مشترک نقطہ نہیں ہے۔

شکل 3.8 (b) میں خط m اور دائرہ میں نقطہ P ایک ہی مشترک نقطہ ہے۔ یہاں خط m دائرے کا مماس ہے اور نقطہ P مماسی نقطہ یا تماسی نقطہ کہلاتا ہے۔

شکل 3.8 (c) میں خط n اور دائرے میں، دو مشترک نقاط ہیں۔ نقاط Q اور R خط n اور دائرے کے نقطہ تقاطع ہیں اور خط n، قاطع خط ہے۔ دائرے کے مماس کی ایک اہم خصوصیت ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیجیے۔

عملی کام : مرکز 'O' والا ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ اس دائرے کا ایک نصف قطر قطعہ OP بنائیے۔ اس نصف قطر پر ایک عمودی خط کھینچیے۔ اس خط اور دائرے کے نقطہ تقاطع کو A اور B نام دیجیے۔ غور کیجیے کہ خط AB نقطہ O سے نقطہ P کی جانب اس طرح کھسکتا ہے کہ اس کی پہلی حالت، نئی حالت کے متوازی رہے۔ یعنی کھسکتا ہوا خط AB اور نصف قطر، ان کے درمیان کا زاویہ قائمہ زاویہ برقرار رہے گا۔ ایسا ہوتے وقت نقطہ A اور نقطہ B دائرے پر ایک دوسرے کے قریب آنے لگتے ہیں۔ اور آخر میں نقطہ P میں شامل ہو جاتے ہیں۔



شکل 3.9

اس حالت میں خط AB کی آخری حالت دائرے کا مماس ہوگا۔ البتہ نصف قطر OP اور خط AB کی نئی حالت کے درمیان کا زاویہ قائمہ زاویہ رہتا ہے۔

اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ دائرے کے کسی بھی نقطہ سے گذرنے والا مماس اس نقطہ کو مرکز سے جوڑنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کو 'مماس نصف قطر کا مسئلہ' کہتے ہیں۔

مماس – نصف قطر مسئلہ (Tangent–radius Theorem)

مسئلہ : ایک دائرے کے کسی بھی نقطہ سے گذرنے والا مماس، اس نقطہ کو مرکز سے جوڑنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ بالواسطہ طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

دیا ہوا ہے : 'O' مرکز والے دائرے کو خط l، نقطہ A پر مس کرتا ہے۔ قطعہ OA نصف قطر ہے۔

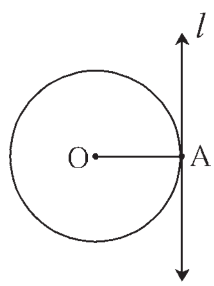
ثابت کرنا ہے : OA نصف قطر $\perp$ خط l

ثبوت : فرض کیجیے۔ خط l، خط OA پر عمود نہیں ہے۔

فرض کیجیے، نقطہ O سے گذرنے والے خط l پر دوسرا عمودی خط OB کھینچا گیا ہے۔

ظاہر ہے نقطہ B، نقطہ A سے متفرق ہونا چاہیے۔ (شکل 3.11 دیکھیے)

خط l پر نقطہ C، اس طرح لیجیے کہ A–B–C اور BA = BC



شکل 3.10

اب $\triangle$OBC اور $\triangle$OBA میں،

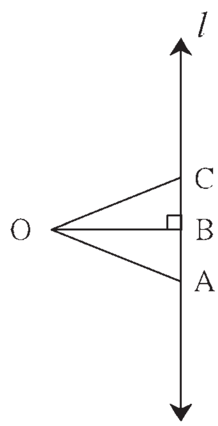
(عمل) ... قطعہ BA $\cong$ قطعہ BC

(ہر ایک قائمہ زاویہ) ... $\angle$OBA $\cong$ $\angle$OBC

(مشترک) ... قطعہ OB $\cong$ قطعہ OB

(ضل زاضل آزمائش) ... $\triangle$OBA $\cong$ $\triangle$OBC $\therefore$

$\therefore$ OC = OA



شکل 3.11

لیکن قطعہ OA، نصف قطر ہے۔

اس لیے OC قطعہ بھی نصف قطر ہوگا۔

$\therefore$ نقطہ C دائرے پر واقع ہوگا۔ یعنی خط l، دائرے کو نقاط A اور C دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔

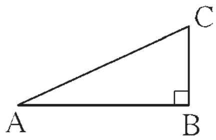
یہ بیان دیے ہوئے بیان سے متضاد ہے۔ کیونکہ خط l مماس ہے۔

لہٰذا خط l دائرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے)

خط l، نصف قطر OA پر عمود نہیں ہے، یہ غلط ہے۔

$\therefore$ OA نصف قطر $\perp$ خط l

آیئے ذرا یاد کریں



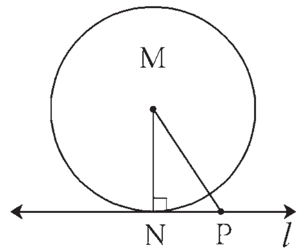
شکل 3.12

قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر، سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے، ہمارے سیکھے ہوئے
کن کن مسئلوں کے ذریعے ہم اسے ثابت کر سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

مماس- نصف قطر مسئلہ کا عکس (Converse of tangent radius theorem)

مسئلہ : دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے سے گذرنے والا اور اس نصف قطر پر عمودی خط، اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔



شکل 3.13

دیا ہوا ہے : خط MN، مرکز M والے دائرے کا نصف قطر ہے۔

نقطہ N سے گذرنے والا خط l نصف قطر MN پر عمود ہے۔

ثابت کرنا ہے : خط l اس دائرے کا مماس ہے۔

ثبوت : خط l پر نقطہ N کے علاوہ کوئی دوسرا ایک نقطہ P لیجیے۔

قطعہ MP کھینچیے۔

اب، $\triangle MNP$ میں $\angle N$ قائمہ زاویہ ہے۔

$\therefore$ قطعہ MP وتر ہے۔

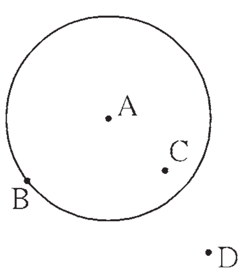
$\therefore$ قطعہ MP $>$ قطعہ MN

$\therefore$ نقطہ P کا دائرے پر واقع ہونا ممکن نہیں ہے۔ یعنی خط l پر نقطہ N کے علاوہ کوئی اور دوسرا نقطہ دائرے پر نہیں ہے۔

$\therefore$ خط l دائرے کو صرف نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔

$\therefore$ خط l اس دائرے کا مماس ہے۔

آیئے بحث کریں

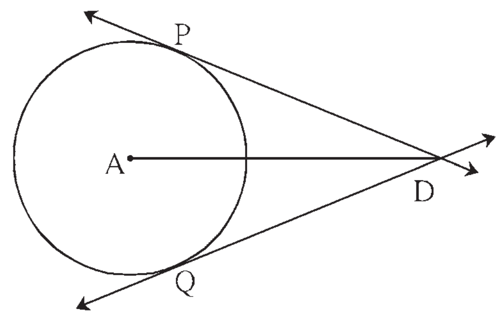


شکل 3.14

A مرکز والے دائرے پر نقطہ B دیا ہوا ہے۔ اس دائرے کا نقطہ B سے گذرنے والا مماس کھینچنا ہے۔
نقطہ B سے گذرنے والے بے شمار خطوط ہوتے ہیں۔ ان میں سے کون سا خط اس دائرے کا مماس ہوسکتا ہے؟ وہ کیسے معلوم کریں گے؟

کیا نقطہ B سے گذرنے والے ایک سے زیادہ مماس ہو سکتے ہیں؟

دائرے کے اندرون میں نقطہ C واقع ہے۔ کیا اس نقطہ سے اس دائرے پر مماس کھینچ سکتے ہیں؟



شکل 3.15

کیا دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ D سے، دائرے کا مماس گذر سکتا ہے؟ اگر ہے تو کتنے مماس گذر سکتے ہیں؟

بحث و مباحثہ سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ شکل 3.15 کے مطابق دائرے کے بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔

بازو کی شکل 3.15 میں خط DP اور خط DQ، دونوں مماس ہیں جو A مرکز والے دائرے کو نقطہ P اور Q پر مس کرتے ہیں۔

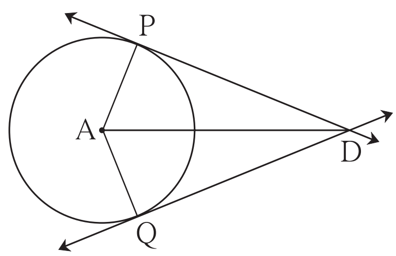
قطعہ DP اور قطعہ DQ کو مماسی قطعات کہتے ہیں۔

مماسی قطعات کا مسئلہ (Tangent seqment Theorem)

مسئلہ : دائرے کے بیرونی نقطہ سے، اس دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

مقابل کی شکل کی مدد سے 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' طے کیجیے۔

نصف قطر AP اور AQ کھینچ کر اس مسئلہ کا ثبوت درج ذیل خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کیجیے۔



شکل 3.16

ثبوت : △PAD اور △QAD میں،

ضلع PA ≅ .... (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

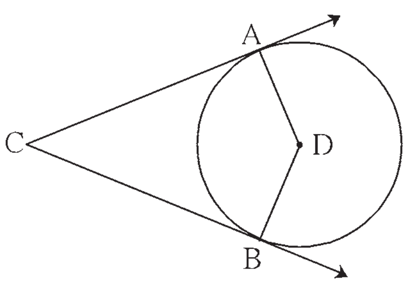
ضلع AD ≅ ضلع AD ... (..............................)

$\angle APD \cong \angle AQD = 90^\circ$ ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

$\therefore$ △PAD ≅ △QAD ... (..............................)

$\therefore$ ضلع DP ≅ ضلع DQ ... (..............................)

حل کردہ مثالیں



شکل 3.17

مثال (1) : دی ہوئی شکل 3.17 میں D مرکز والا دائرہ، ∠ACB کی ساقین کو نقطہ A اور نقطہ B پر مس کرتا ہے۔ اگر $\angle ACB = 52^\circ$ ہو تو ∠ADB کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : ذوار بعۃ الاضلاع کے چاروں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

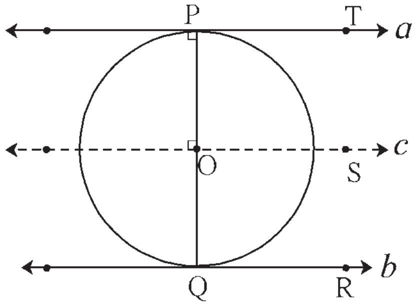
$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

مثال **(2)** : خط a اور خط b متوازی مماس، O مرکز والے دائرے کو بالترتیب نقطہ P اور نقطہ Q پر مس کرتے ہیں، تو ثابت کیجیے۔ قطعہ PQ دائرے کا قطر ہے۔



شکل **3.18**

ثبوت : نقطہ O سے گذرنے والا خط c اس طرح کھینچیے جو خط a کے متوازی ہو۔

خطوط a، c، b پر بالترتیب نقاط R، S، T شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق لیجیے۔

نصف قطر OP اور نصف قطر OQ کھینچیے۔

اب , $\angle OPT = 90°$ ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

(I) ... $\therefore \angle SOP = 90°$ ... (داخلہ زاویہ کی خصوصیت)

اب, خط $a \parallel$ خط c ... (عمل)

خط $a \parallel$ خط b ... (دیا ہوا ہے)

خط $b \parallel$ خط c ... (عبوری خاصیت)

$\angle OQR = 90°$ ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

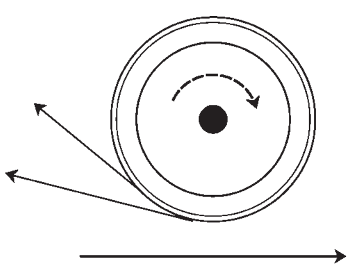
(II) ... $\therefore \angle SOQ = 90°$ ... (داخلہ زاویے کی خصوصیت)

$\therefore \angle SOP + \angle SOQ = 90° + 90° = 180°$ ... [بیان (I) اور (II) سے]

$\therefore$ شعاع OP اور شعاع OQ، مخالف شعاعیں ہیں۔

$\therefore$ نقاط P، O، Q ہم خطی نقاط ہیں۔

$\therefore$ خط PQ، دائرے کا قطر ہے۔



پہیے کے بڑھنے کی سمت

آپ نے دیکھا ہوگا کہ بارش کے موسم میں راستے پر تھوڑا پانی جمع ہو اور وہاں سے تیز رفتار موٹر سائیکل گذرتی ہے تب اس کے پچھلے پہیہ سے اُڑنے والے پانی کی دھار آپ نے دیکھی ہے۔ یہ دھار دائرہ کے مماس کی طرح دکھائی دیتی ہے۔ یہ دھار ویسی ہی کیوں ہوتی ہیں؟ اس کی معلومات اپنے سائنس کے ٹیچر سے حاصل کیجیے۔

چھری تیز کرنے کے دوران سان سے نکلنے والی چنگاریوں کا مشاہدہ کیجیے کیا وہ بھی مماس کی طرح دکھائی دیتی ہیں؟

اسے ذہن نشین کرلیں

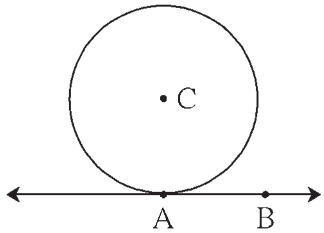
(1) مماس نصف قطر مسئلہ : دائرے کے کسی بھی نقطے سے گذرنے والا مماس اس نقطہ اور مرکزی نقطے کو ملانے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

(2) مماس نصف قطر مسئلہ کا عکس : دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے سے گذرنے والا اور اس نصف قطر پر عمودی خط، اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔

(3) دائرے کے بیرونی نقطے سے، اس دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 3.1

.1 متصلہ شکل 3.19 میں نقطہ C دائرے کا مرکز ہے۔دائرے کا نصف قطر 6 سم ہے۔خط AB دائرے کو نقطہ A پر مس کرتا ہے۔اس معلومات کی بنا پر درج ذیل سوالات کے جوابات لکھیے۔



شکل 3.19

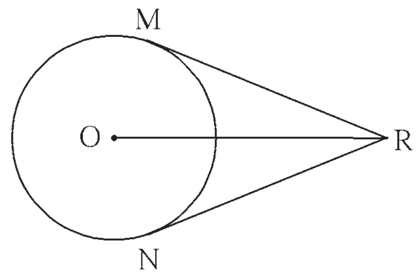
(1) $\angle CAB$ کی پیمائش کتنے درجے ہے؟ کیوں؟

(2) نقطہ C، خط AB سے کتنے فاصلے پر واقع ہے؟ کیوں؟

(3) اگر $d(A, B) = 6$ سم ہو تو $d(B, C)$ معلوم کیجیے۔

(4) $\angle ABC$ کی پیمائش کتنے درجے ہے؟ کیوں؟

.2 بازو کی شکل میں، O مرکز والے دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ R سے کھینچے گئے دائرے کے مماسی قطعات RM اور RN، بالترتیب M اور N نقاط پر مَس کرتے ہیں۔اگر OR = 10 سم اور دائرے کا نصف قطر 5 سم ہو تو –



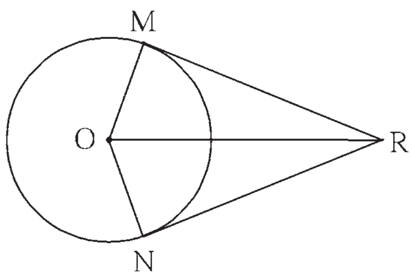
شکل 3.20

(1) ہر مماسی قطعات کی لمبائی کتنی ہے؟

(2) $\angle MRO$ کی پیمائش کتنی ہے؟

(3) $\angle MRN$ کی پیمائش کتنی ہے؟

.3 O مرکز والے دائرے کے مماسی قطعات RM اور RN ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\angle MRN$ اور $\angle MON$ ان دونوں زاویوں کا ناصف قطعہ OR ہے۔



شکل 3.21

.4 4.5 سم نصف قطر والے دائرے کے دو مماسی قطعات ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔تو بتایئے کہ ان دو مماسی قطعات کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟ وجہ بتایئے۔

ICT Tools or Links

کمپیوٹر میں جیوجیبرا سافٹ ویئر کی مدد سے دائرہ اور دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ سے مماسی قطعات کھینچ کر تصدیق کیجیے کہ یہ مماسی قطعات متماثل ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مس کرنے والے دائرے (Touching circles)

عملی کام (I) :

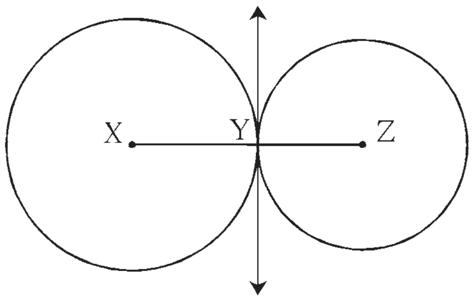
شکل 3.22 میں دکھائے ہوئے کے مطابق

X-Y-Z ہم خطی نقاط لیجیے۔

X کو مرکز مان کر XY نصف قطر والا دائرہ بنائیے۔

Z کو مرکز مان کر YZ نصف قطر کا دوسرا دائرہ بنائیے۔

آپ مشاہدہ کریں گے کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو صرف ایک نقطہ Y قطع کرتے ہیں۔



شکل 3.22

نقطہ Y سے، خط XZ پر عمود کھینچیے۔ اسے ذہن میں رکھیں کہ یہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔

عملی کام (II) :

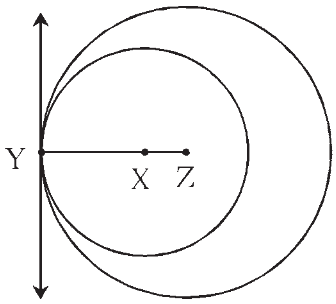
شکل 3.23 کے مطابق Y-X-Z ہم خطی نقاط لیجیے۔

Z کو مرکز مان کر ZY نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔

X کو مرکز مان کر XY نصف قطر کا دوسرا دائرہ بنائیے۔

دونوں دائرے صرف Y نقطے پر قطع کرتے ہیں۔ مشاہدہ کیجیے۔

نقطہ Y سے قطعہ YZ پر عمود کھینچیے۔ اسے ذہن نشین رکھیے کہ یہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔



شکل 3.23

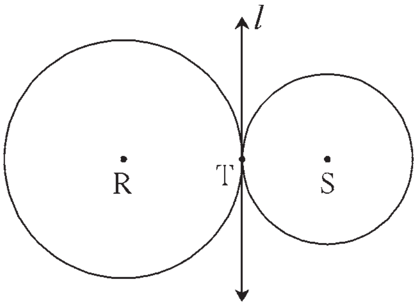
مذکورہ بالا عملی کام سے آپ یہ سمجھ چکے ہوں گے کہ دونوں شکلوں کے دائرے ایک ہی مستوی میں واقع ہیں۔ اور ایک دوسرے کو صرف ایک ہی نقطے پر قطع کرتے ہیں۔ ایسے دائروں کو ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائرے یا مماسی دائرے کہتے ہیں۔

مس کرنے والے دائروں کی تعریف ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

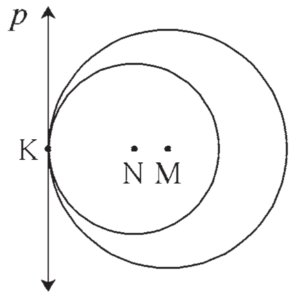
ایک ہی مستوی میں واقع دو دائرے اسی مستوی کے ایک ہی خط کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہوں تو انھیں مس کرنے والے دائرے کہتے ہیں۔

وہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہوتا ہے۔

دونوں دائرے اور خط میں واقع مشترک نقطہ کو مشترک تماسی نقطہ کہتے ہیں۔



شکل 3.24



شکل 3.25

شکل 3.24 میں، مرکز R اور S والے دو دائرے خط l کو صرف ایک نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔ اس لیے وہ دونوں مس کرنے والے دائرے ہیں اور خط l ان کا مشترک مماس ہے۔ اس شکل کے دائرے بیرونی طور پر مس کرنے والے دائرے ہیں۔

شکل 3.25 میں دائرے اندرونی طور پر مس کرنے والے ہیں۔ خط p، ان کا مشترک مماس ہے۔

غور کیجیے

(1) شکل 3.24 کے مطابق ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کو بیرونی طور پر مس کرنے والے دائرے کیوں کہتے ہیں؟

(2) شکل 3.25 کے مطابق ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کو اندرونی طور پر مس کرنے والے دائرے کیوں کہتے ہیں؟

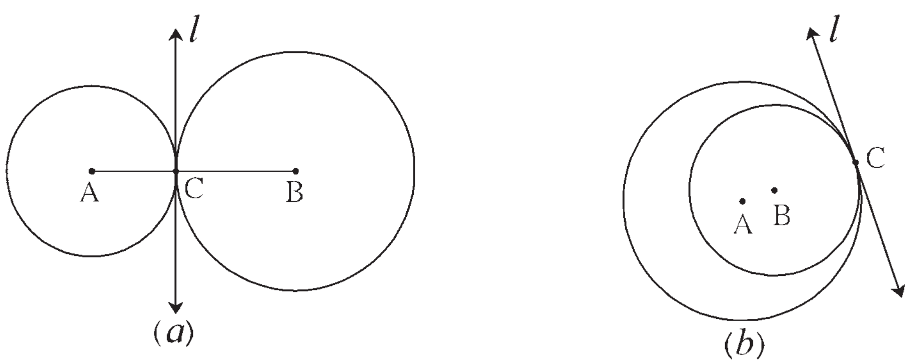
(3) شکل 3.26 میں مرکز A اور B والے دائرے کے نصف قطر بالترتیب 3 سم اور 4 سم ہوں تو

(i) شکل 3.26 (a) میں d (A, B) کتنا ہوگا؟

(ii) شکل 3.26 (b) میں d (A, B) کتنا ہوگا؟

مس کرنے والے دائروں کا مسئلہ (Theorem Of Touching Circles)

مسئلہ : ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کا تماسی نقطہ ان دائروں کے مراکز کو جوڑنے والے خط پر واقع ہوتا ہے۔



شکل 3.26

دیا ہوا ہے : A اور B ایک دوسرے کو مس کرنے والے دو دائروں کے مراکز ہیں۔ ان کا تماسی نقطہ C ہے۔

ثابت کرنا ہے : نقطہ C خط AB پر واقع ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے، خط l مس کرنے والے دونوں دائروں کے نقطہ C سے گذرنے والا مشترک مماس ہے۔ قطعہ AC $\perp$ خط l،

قطعہ BC $\perp$ خط l

$\therefore$ خط AC اور خط BC، خط l پر عمود ہیں۔

$\therefore$ نقطہ C سے خط l پر ایک ہی عمود کھینچ سکتے ہیں۔ C, A, B ہم خطی ہیں۔

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کا مشترک نقطہ (تماسی نقطہ)، ان دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط پر ہوتا ہے۔

(2) بیرونی طور پر مس کرنے والے دائروں کے مراکز کے درمیان فاصلہ، ان دائروں کے نصف قطروں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(3) اندرونی طور پر مس کرنے والے دائروں کے مراکز کے درمیان فاصلہ، ان دائروں کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔

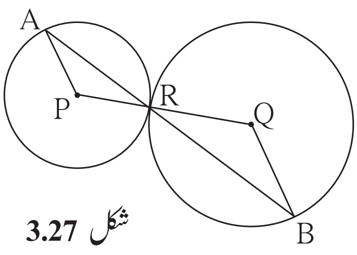
مشقی سیٹ 3.2

1. ایک دوسرے کو اندرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 3.5 سم اور 4.8 سم ہیں۔ تب ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

2. بیرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 5.5 سم اور 4.2 سم ہیں۔ تب ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

3. اگر دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 4 سم اور 2.8 سم کے (i) بیرونی طور پر مس کرنے والے (ii) اندرونی طور پر مس کرنے والے دائرے بنایئے۔

4. شکل 3.27 میں P اور Q مرکز والے دائرے ایک دوسرے کو نقطہ R پر مس کرتے ہیں۔ نقطہ R سے گذرنے والا خط اس دائرے کو بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ تو



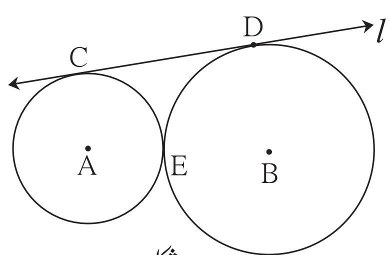
شکل 3.27

(1) قطعہ BQ $\parallel$ قطعہ AP ثابت کیجیے۔

(2) ثابت کیجیے $\Delta APR \sim \Delta RQB$

(3) اگر $\angle PAR$ کی پیمائش $35°$ ہو تو $\angle RQB$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

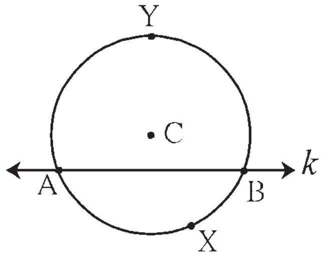
5. شکل 3.28 میں، مرکز A اور B والے دو دائرے ہیں جو ایک دوسرے کو نقطہ E پر مس کرتے ہیں۔ خط l ان کا مشترک مماس، انھیں نقاط C اور D پر مس کرتا ہے۔ اگر دائروں کے نصف قطر بالترتیب 4 سم اور 6 سم ہوں تو قطعہ CD کی لمبائی کتنی ہوگی؟



شکل 3.28

آیئے ذرا یاد کریں

دائرہ کا قوس (Arc of a Circle) :

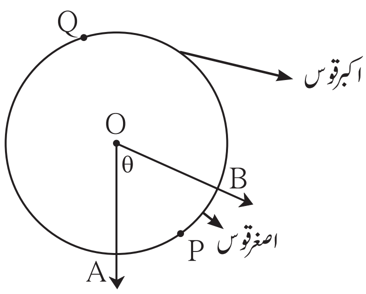


شکل **3.29**

قاطع خط کی وجہ سے دائرہ دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ان میں سے کوئی ایک حصہ اور قاطع خط کے دائرے پر واقع دو نقاط سے مل کر حاصل ہونے والی شکل کو دائرہ کا قوس کہتے ہیں۔
دائرہ اور قاطع خط کے نقطہ تقاطع کو قوس کے اختتامی نقاط یا قوسین کے سرے کہتے ہیں۔
شکل 3.29 میں قاطع خط k کی وجہ سے، C مرکز والے دائرے کے AYB اور AXB، دو قوس بنے ہوئے ہیں۔

قاطع خط کے جس سمت میں دائرے کا مرکز ہوتا ہے۔اس جانب کے قوس کو اکبر قوس کہتے ہیں۔اور مخالف سمت کے قوس کو اصغر قوس کہتے ہیں۔شکل 3.29 میں قوس AYB اکبر قوس اور قوس AXB اصغر قوس ہے۔کسی بھی قوس کا نام تین حروف استعمال کر کے لکھنے پر ہمیں واضح طور پر سمجھ میں آتا ہے لیکن کچھ شک نہ ہو تو اصغر قوس کا نام اختتامی نقاط کے حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔مثلاً شکل 3.29 میں قوس AXB کو قوس AB بھی لکھتے ہیں۔
ہم اصغر قوس کا نام لکھنے کے لیے یہی طریقہ استعمال کریں گے۔

مرکزی زاویہ (Central Angle)



شکل **3.30**

جس زاویے کا راسی نقطہ دائرے کے مرکز پر واقع ہو۔اس زاویہ کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔
شکل 3.30 میں 'O' مرکز والے دائرے کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے۔
قاطع خط کی طرح مرکزی زاویہ کی وجہ سے بھی دائرہ دو قوسوں میں تقسیم ہوتا ہے۔

قوس کی پیائش (Measure of an arc)

کبھی کبھار دو قوسوں کا موازنہ کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔اس لیے قوس کی پیائش کی تعریف اگلے صفحہ کے مطابق طے کی گئی ہے۔

(1) اصغر قوس کی پیائش، اس کے نظیری مرکزی زاویہ کی پیائش کے مساوی ہوتی ہے۔شکل 3.30 میں مرکزی $\angle AOB$ کی پیائش θ ہے اس لیے اصغر قوس APB کی پیائش بھی θ ہی ہے۔

(2) نظیری اصغر قوس کی پیمائش – 360° = اکبر قوس کی پیمائش →

(شکل 3.30 میں) ... $360° - \theta°$ = قوس APB کی پیمائش – 360 = اکبر قوس AQB کی پیمائش

(3) نصف دائرہ کے قوس کی پیمائش، یعنی نصف دائرے کی پیمائش 180° ہوتی ہے۔

(4) مکمل دائرے کی پیمائش 360° ہوتی ہے۔

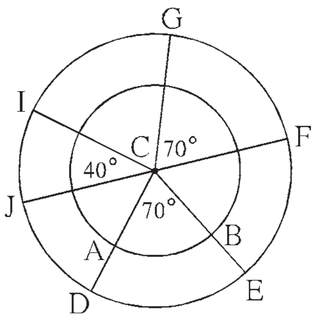
آیئے سمجھ لیں

قوسین کی متماثلت (Congruence of arcs)

جب دو ہم مستوی شکلیں ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں، تب ایسا کہا جاتا ہے کہ وہ شکلیں ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں۔ یہ ہمیں معلوم ہے کہ متماثلت کے اس تصور کی مدد سے مساوی پیمائش کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دو قوسین کی پیمائش مساوی ہو تو کیا وہ دونوں قوس متماثل ہو سکتے ہیں؟

اس سوال کا جواب درج ذیل عملی کام کے ذریعے معلوم کیجیے۔



شکل 3.31

عملی کام : شکل 3.31 کے مطابق C مرکز والے دو دائرے بنایئے۔ ∠DCE اور ∠FCG مساوی پیمائشوں کے دو زاویے بنایئے۔ ان زاویوں کی پیمائشوں کے علاوہ مختلف پیمائش کا زاویہ ICJ بنایئے۔

∠DCE کی ساقین، اندرونی دائرے کو قطع کرنے کی وجہ سے حاصل ہونے والے قوس کا نام AB دیجیے۔

قوس کی پیمائش کی تعریف کی بنا پر قوس AB اور قوس DE کی پیمائش مساوی ہے، کیا یہ آپ کو سمجھ میں آ گیا؟

کیا یہ قوس ایک دوسرے کو مکمل طور پر منطبق ہوتے ہیں؟ یقینی طور منطبق نہیں ہوتے۔

اب C – DE، C – FG اور C – IJ ان قوسی تراشوں کو کاٹ کر جدا کیجیے۔ انھیں ایک دوسرے سے جوڑ کر DE ، FG اور IJ ان میں سے کون سے قوس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں؟ دیکھیے۔

اس عملی کام سے دو قوسوں کو متماثل ہونے کے لیے ان کی پیمائش مساوی ہونا کافی نہیں، یہ بات ذہن نشین کیجیے۔

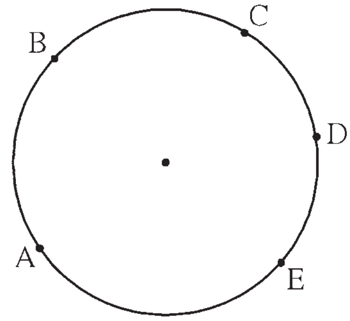
دو قوسوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی شرط کا مکمل ہونا ضروری ہے کیا ایسا آپ کو محسوس ہوتا ہے؟

اوپر کے عملی کام سے یہ بات ذہن میں آتی ہے کہ،

دو قوس کے نصف قطر اور ان کی پیمائش متماثل ہوں تو وہ دو قوسین ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

قوس DE اور قوس GF متماثل ہیں۔ اسے 'قوس GF ≅ قوس DE' سے ظاہر کرتے ہیں۔

قوسین کے پیمائشوں کے مجموعے کی خصوصیت (Property of sum of measures of arcs)



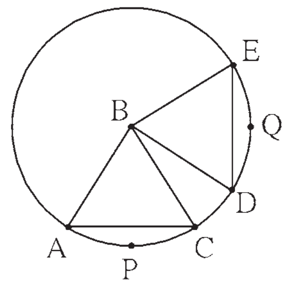
شکل 3.32

شکل 3.32 میں A، B، C، D اور E ایک ہی دائرے پر واقع نقاط ہیں۔ ان نقاط کی وجہ سے کئی قوس بن گئے ہیں۔ ان میں سے قوس ABC اور قوس CDE دونوں میں صرف ایک نقطہ C مشترک ہے۔ اس لیے قوس ABC اور قوس CDE کی پیمائش کا مجموعہ قوس ACE کی پیمائش کے مساوی ہے۔

m(قوس ABC) + m (قوس CDE) = m(قوس ACE)

لیکن قوس ABC اور قوس BCE میں ایک سے زائد نقاط [قوس BC کے تمام نقاط] مشترک ہیں۔ اس لیے قوس ABC اور قوس BCE کی پیمائشوں کا مجموعہ قوس ABE کی پیمائش کے مساوی نہیں ہے۔

مسئلہ : ایک ہی دائرے کے (یا متماثل دائروں کے) متماثل قوسین کے نظیری وتر متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 3.33

دیا ہوا ہے : B مرکز والے دائرے میں قوس DQE ≅ قوس APC

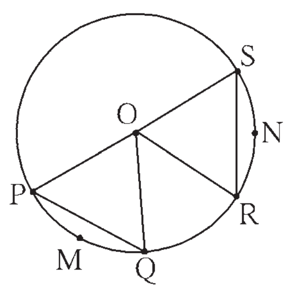
ثابت کرنا ہے : وتر DE ≅ وتر AC

ثبوت : (خالی جگہ پر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کیجیے)

△ABC اور △DBE میں،

ضلع DB ≅ ضلع AB	... (..........................)
ضلع .... ≅ ضلع	... (..........................)
∠ABC ≅ ∠DBE	... (متماثل قوسین کی تعریف)
∴ △ABC ≅ △DBE	... (..........................)
∴ وتر DE ≅ وتر AC	... (..........................)

مسئلہ : ایک دائرے کے (یا متماثل دائروں کے) متماثل وتروں کے نظیری قوسین متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 3.34

دیا ہوا ہے : قطعہ PQ اور قطعہ RS یہ O مرکز والے دائرے کے متماثل وتر ہیں۔

ثابت کرنا ہے : قوس RNS ≅ قوس PMQ

ذیل کی باتوں پر غور کرتے ہوئے ثبوت لکھیے۔

دو قوسین متماثل ہونے کے لیے ان کے نصف قطر اور پیمائش مساوی ہونا ضروری ہے۔

قوس PMQ اور قوس RNS صرف ایک ہی دائرے کے قوسین ہیں۔

اس لیے ان کے نصف قطر مساوی ہیں۔

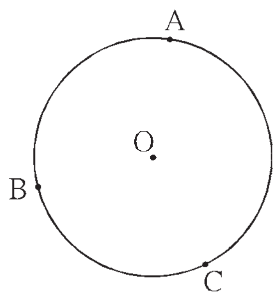
ان قوسین کی پیمائش یعنی ان کے نظیری مرکزی زاویوں کی پیمائش ہوتی ہے۔ یہ مرکزی زاویہ حاصل کرنے کے لیے نصف قطر OR, OQ, OP اور OS کا کھینچنا ضروری ہے۔ ان کو کھینچنے پر حاصل ہونے والے △OPQ اور △ORS کیا متماثل ہوں گے؟

اوپر کے دونوں مسئلے آپ متماثل دائروں کے لیے ثابت کیجیے۔

غور کیجیے

- اوپر کے دو مسئلوں میں سے پہلے مسئلہ میں قوس APC اور قوس DQE، یہ دونوں اصغر قوس متماثل فرض کیے گئے ہیں۔ ان کے نظیری اکبر قوس متماثل فرض کر کے کیا اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں؟
- دوسرے مسئلہ میں کیا متماثل وتروں کے نظیری اکبر قوس بھی متماثل ہو سکتے ہیں؟ وتر PQ اور وتر RS جب قطر ہوں، تب کیا یہ مسئلہ درست ہوگا؟

حل کردہ مثالیں



شکل 3.35

مثال (1) : 'O' مرکز والے دائرے پر A، B، C یہ تین نقاط واقع ہیں۔

(i) ان تین نقاط کی وجہ سے بننے والے تمام قوسوں کے نام لکھیے۔

(ii) جب قوس BC اور قوس AB کی پیمائش بالترتیب 110° اور 125° ہو تب بقیہ تمام قوسوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : (i) قوسوں کے نام۔

قوس AB، قوس BC، قوس AC، قوس ABC، قوس ACB، قوس BAC

(ii) قوس BC کی پیمائش + قوس AB کی پیمائش = قوس ABC کی پیمائش

$= 125° + 110° = 235°$

قوس ABC کی پیمائش − 360° = قوس AC کی پیمائش

$= 360° - 235° = 125°$

اسی طرح،

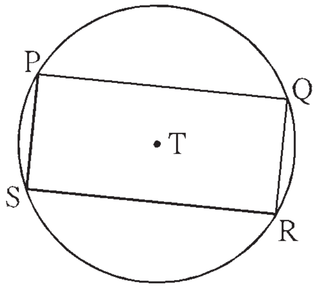
قوس ACB کی پیمائش $= 360° - 125° = 235°$

اور

قوس BAC کی پیمائش $= 360° - 110° = 250°$

مثال **(2)** : شکل 3.36 میں T مرکزوالے دائرے میں مستطیل PQRS حائط ہے تو دکھائیے کہ

(i) SR قوس ≅ PQ قوس (ii) PQR قوس ≅ SPQ قوس



شکل 3.36

حل : (i) □PQRS ایک مستطیل ہے۔

(مستطیل کے مقابل کے اضلاع) ... SR وتر ≅ PQ وتر ∴

(متماثل وتر کے نظیری قوس) ... SR قوس ≅ PQ قوس ∴

(ii) (مستطیل کے مقابل کے اضلاع) ... QR وتر ≅ PS وتر ∴

(متماثل وتر کے نظیری قوس) ... QR قوس ≅ SP قوس ∴

قوس SP اور قوس QR کی پیائش مساوی ہے۔

قوس PQ اور قوس QR کی پیائشوں کا مجموعہ = قوس SP اور قوس QR کی پیائشوں کا مجموعہ

∴ قوس PQR کی پیائش = قوس SPQ کی پیائش

∴ قوس PQR ≅ قوس SPQ

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) جس زاویے کا راس، دائرے کے مرکز پر ہو اس زاویے کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

(2) قوس کے پیائش کی تعریف (i) اصغر قوس کی پیائش، اس کے نظیری مرکزی زاویے کی پیائش کے مساوی ہوتی ہے۔

(ii) نظیری اصغر قوس کی پیائش − 360° = اکبر قوس کی پیائش → (iii) نصف دائرے کے قوس کی پیائش 180° ہوتی ہے۔

(3) دو قوسین کے نصف قطر اور پیائش مساوی ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں۔

(4) ایک ہی دائرے کے قوس ABC اور قوس CDE میں جب C صرف ایک ہی نقطہ مشترک ہو تب،

m(قوس ABC) + m(قوس CDE) = m(قوس ACE)

(5) ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) کے متماثل قوسین کے نظیری وتر، متماثل ہوتے ہیں۔

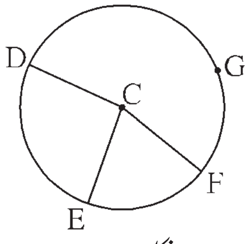
(6) ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) کے متماثل وتروں کے نظیری قوس، متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 3.3

.1 شکل 3.37 میں،

C مرکز والے دائرے پر E,D,G اور F نقاط واقع ہیں۔

∠ECF کی پیائش 70° اور قوس DGF کی پیائش 200° ہو تو قوس DE اور قوس DEF کی پیائش معلوم کیجیے۔

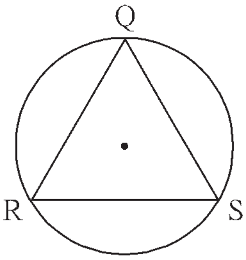


شکل 3.37

*2. شکل 3.38 میں △QRS متساوی الاضلاع مثلث ہے۔ تو دکھائیے کہ

(1) قوس QR ≅ قوس QS ≅ قوس RS

(2) قوس QRS کی پیمائش 240° ہے۔

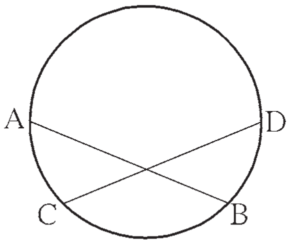


شکل 3.38

3. شکل 3.39 میں وتر CD ≅ وتر AB

تو ثابت کیجیے کہ

قوس BD ≅ قوس AC



شکل 3.39

آیئے سمجھ لیں

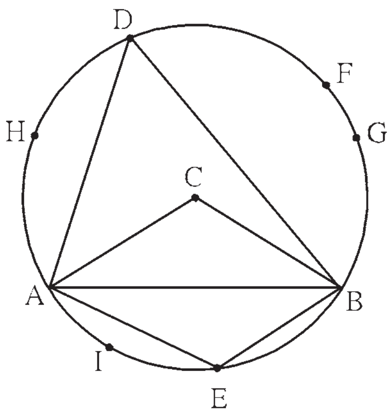
دائرے اور نقطہ، دائرہ اور خط (مماس) ان کے ایک دوسرے سے تعلق کی کچھ خصوصیات کا ہم نے مطالعہ کر چکے ہیں۔ اب دائرے اور زاویہ کے درمیان تعلق کی کچھ خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔ ان میں سے کچھ خصوصیات پہلے ہم عملی کام کے ذریعے معلوم کریں گے۔

عملی کام (I) :

'C' مرکز والا ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ شکل 3.40 کے مطابق وتر AB کھینچیے۔ مرکزی زاویہ ACB کھینچیے۔ وتر AB سے بنے ہوئے اکبر قوس پر نقطہ D اور اصغر قوس پر نقطہ E لیجیے۔

(1) ∠ADB اور ∠ACB کی پیمائش کیجیے۔ ان کی پیمائشوں کا موازنہ کیجیے۔

(2) ∠ADB اور ∠AEB کی پیمائش کیجیے۔ ان کی پیمائشوں کی جمع کر کے دیکھیے۔



شکل 3.40

(3) قوس ADB پر H,G,F اس طرح کچھ نقاط لیجیے۔ ∠AFB، ∠AGB ، ∠AHB ، .... ان کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔
ان پیمائشوں کا ∠ADB کی پیمائش سے اور ایک دوسرے سے بھی موازنہ کیجیے۔

(4) قوس AEB پر ایک اور نقطہ I لیجیے۔ ∠AIB کی پیمائش کیجیے اور اس پیمائش کا ∠AEB کی پیمائش سے موازنہ کیجیے۔

اس عملی کام سے آپ کو درج ذیل مشاہدات حاصل ہوں گے۔

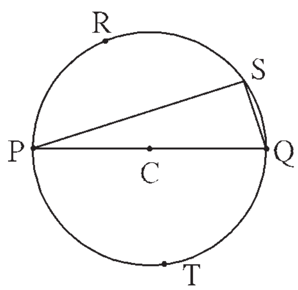
(1) ∠ACB کی پیمائش ∠ADB کی پیمائش کے دگنا ہے۔

(2) ∠ADB اور ∠AEB کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہے۔

(3) ∠AHB، ∠ADB، ∠AFB، ∠AGB ان تمام کی پیمائشیں مساوی ہیں۔

(4) ∠AEB اور ∠AIB کی پیمائشیں مساوی ہیں۔

عملی کام (II) :

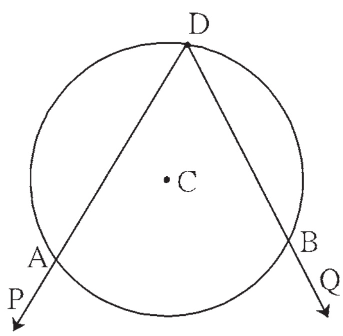


شکل 3.41

شکل 3.41 کے مطابق 'C' کو مرکز مان کر ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ قطعہ PQ اس کا کوئی ایک قطر کھینچیے۔ اس قطر سے بنے ہوئے دونوں نصف دائروں پر نقاط T,S,R لیجیے۔ ∠PRQ، ∠PSQ، ∠PTQ کی پیمائش کیجیے۔ ان میں سے ہر ایک زاویہ، قائمہ زاویہ ہے۔ مشاہدہ کیجیے۔

اوپر کے عملی کام سے آپ کو دکھائی دینے والی خصوصیت یعنی دائرے اور زاویے سے متعلق مسئلہ ہے۔ اس مسئلہ کا ثبوت کا اب ہم مطالعہ کریں گے۔ اس سے پہلے ہمیں بعض اصطلاحات کا تعارف حاصل کریں گے۔

قوسی زاویہ (Inscribed Angle)



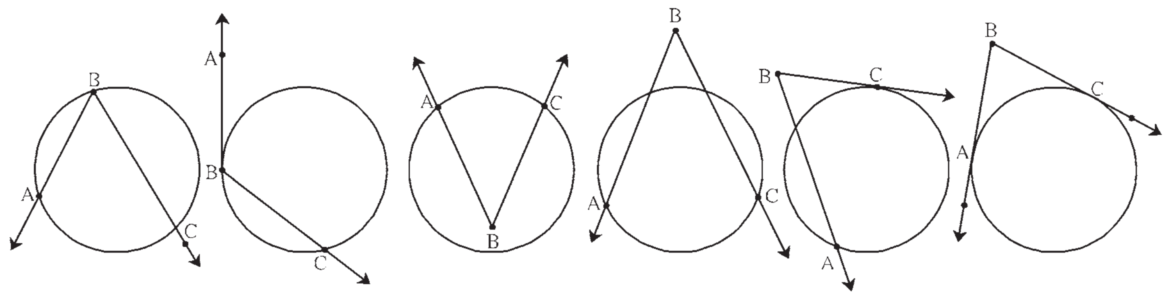
شکل 3.42

شکل 3.42 میں دائرے کا مرکز 'C' ہے۔ ∠PDQ کا راس D، دائرے پر واقع ہے۔ زاویے کی ساقین DP اور DQ دائرے کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ ایسے زاویے کو دائرے کا قوسی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل 3.42 میں ∠ADB، قوس ADB کا قوسی زاویہ ہے اور قوس ADB میں حائط ہے۔

مقطوعہ قوس (Intercepted Arc)

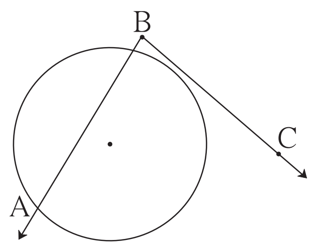
ذیل کی شکل 3.43 میں (i) سے (vi) ان تمام اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 3.43

ہر شکل میں ABC∠ کے اندرونی حصہ میں شامل قوس کو ABC∠ کا مقطوعہ قوس کہتے ہیں۔مقطوعہ قوس کے اختتامی نقاط، دائرہ اور زاویہ کے نقطہ تقاطع ہوتے ہیں۔زاویے کے ہر ساق پر قوس کا ایک اختتامی نقطہ ہونا ضروری ہے۔

شکل 3.43 میں (i)، (ii) اور (iii) ان اشکال میں زاویوں کا صرف ایک ہی مقطوعہ قوس ہے۔لیکن (iv)، (v) اور (vi) میں ہر زاویہ کے دو مقطوعہ قوسین ہیں۔



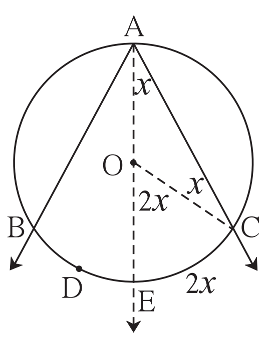
شکل 3.44

جبکہ شکل (ii) اور (v) میں زاویہ کی ایک ساق اور (vi) میں زاویہ کی دونوں ساقین دائرے کو مس کرتے ہیں،اسے بھی ذہن نشین رکھیے۔

شکل 3.44 میں قوس، مقطوعہ نہیں ہے۔کیونکہ زاویے کی ساق BC پر قوس کا ایک بھی اختتامی نقطہ واقع نہیں ہے۔

قوسی زاویے کا مسئلہ (Inscribed angle Theorem)

مسئلہ : دائرے میں قوسی زاویے کی پیمائش،اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔



شکل 3.45

دیا ہوا ہے : دائرے کا مرکز 'O' ہے۔

BAC∠، قوس BAC کا قوسی زاویہ ہے۔

اس زاویے کی وجہ سے قوس BDC مقطوعہ قوس بن گیا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m($قوس BDC$)$

عمل : شعاع AO کھینچیے جو دائرہ کو نقطہ E پر قطع کرتی ہے۔نصف قطر OC کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle AOC$ میں،

(ایک ہی دائرے کے نصف قطر) ... ضلع $OA \cong$ ضلع OC

(متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ... $\therefore \angle OAC \cong \angle OCA$

... (I) (فرض کیجیے) ... $\angle OAC \cong \angle OCA = x$

(مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ... اب، $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

لیکن، $\angle EOC$ مرکزی زاویہ ہے۔

... (II) (قوس کی پیمائش کی تعریف) ... $\therefore m($قوس $EC) = 2x^\circ$

$\therefore$ بیان (I) اور (II) کی رو سے،

... (III) $\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2} m($قوس $EC)$

اسی طرح، نصف قطر OB کھینچیے۔

... (IV) ... (یہ ثابت کر سکتے ہیں) ... $\angle EAB = \frac{1}{2} m($قوس $BE)$

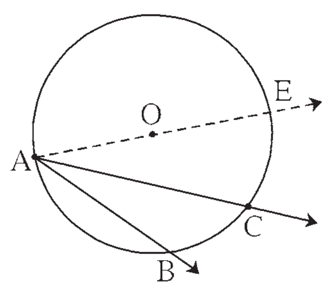
[(III) اور (IV) کی بنا پر] ... $\therefore \angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2} m($قوس $EC) + \frac{1}{2} m($قوس $BE)$

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} [m($قوس $EC) + m($قوس $BE)]$

... (V) $= \frac{1}{2} [m($قوس $BEC)] = \frac{1}{2} [m($قوس $BDC)]$

ذہن نشین رکھیں کہ دائرے کا قوسی زاویے اور مرکزی زاویے کے تعلق سے تین امکانات ہوتے ہیں۔ کسی دائرے کا مرکز زاویے کی ساق پر واقع ہو، زاویے کے اندرون میں واقع ہو، یا بیرون میں۔ ان میں سے پہلے دو امکانات (III) اور (V) میں ثابت ہو چکے ہیں۔ اب تیسرے امکان کے متعلق غور کیجیے۔

شکل 3.46 میں



شکل 3.46

$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

[(III) کی بنا پر] ... $= \frac{1}{2} m($قوس $BCE) - \frac{1}{2} m($قوس $CE)$

$= \frac{1}{2} [m($قوس $BCE) - m($قوس $CE)]$

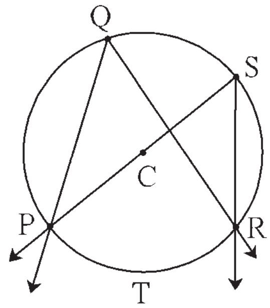
... (VI) $= \frac{1}{2} [m($قوس $BC)]$

اس مسئلہ کا بیان ذیل کے مطابق بھی لکھ سکتے ہیں۔

دائرے کے قوس سے، دائرے کے کسی بھی نقطے پر بننے والے محاذی زاویے **(subtended angle)** کی پیمائش، اسی قوس کے مرکز پر بننے والے محاذی زاویے کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔

اس مسئلہ کو آگے کی مطابق ضمنی مسئلوں کے بیانات کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

قوسی زاویہ کے مسئلہ کے ضمنی مسئلے (Corollaries of inscribed angle theorem)



شکل 3.47

(1) ایک ہی قوس میں بننے والے تمام قوسی زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

شکل 3.47 کی مدد سے 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' لکھیے۔

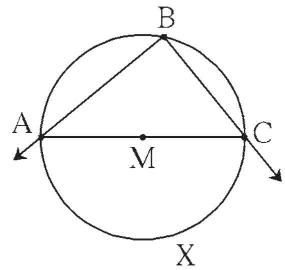
مندرجہ ذیل سوالات پر غور کیجیے اور ثبوت لکھیے۔

(1) ∠PQR کا کون سا قوس، مقطوعہ قوس ہے؟

(2) ∠PSR کا کون سا قوس، مقطوعہ قوس ہے؟

(3) قوسی زاویے کی پیمائش اور اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش میں کیا تعلق ہوتا ہے؟

(2) نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔



شکل 3.48

شکل 3.48 کی مدد سے اس مسئلہ کا 'دیا ہوا ہے'، 'ثابت کرنا ہے' اور 'ثبوت' لکھیے۔

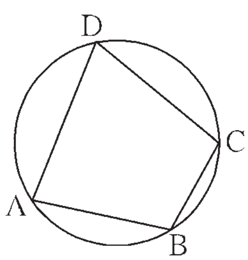
مستقیم المحیط ذوار بعۃ الاضلاع (Cyclic quadrilateral)

ذوار بعۃ الاضلاع کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوں تب اس ذوار بعۃ الاضلاع کو مستقیم المحیط ذوار بعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔

مستقیم المحیط ذوار بعۃ الاضلاع کا مسئلہ (Theorem of cyclic quadrilateral)

مسئلہ : مستقیم المحیط ذوار بعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کا ثبوت مندرجہ ذیل خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کر کے لکھیے۔



شکل 3.49

دیا ہوا ہے : ☐ ______ مستقیم المحیط ذوار بعۃ الاضلاع ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle B + \angle D =$ ______

______ $+ \angle C = 180$

ثبوت : ∠ADC، قوسی زاویہ ہے، اور اس کا مقطوعہ قوس ABC ہے۔

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ ______ ... (I)

اسی طرح ______ قوسی زاویہ ہے۔ اور اس کا مقطوعہ قوس ADC ہے۔

$\therefore$ $\square = \frac{1}{2}$ m(قوس ADC) ... (II)

$\therefore$ $\angle ADC + \square = \frac{1}{2}\ \square + \frac{1}{2}$ m(قوس ADC) ... [بیان (I) اور (II) کی بناپر]

$= \frac{1}{2}\ [\square$ + m(قوس ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ ... (قوس ABC اور قوس ADC مل کرمکمل دائرہ بنتا ہے)

$= \square$

اسی طرح، $\angle A + \angle C = \square$ بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کے مسئلہ کا ضمنی مسئلہ (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کا خارجہ زاویہ، اس کے متصلہ زاویے کے مقابل کے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کا ثبوت آپ لکھیے۔

غور کیجیے

مذکورہ بالا مسئلہ میں $\angle B + \angle D = 180^\circ$، اسے ثابت کرنے پر بقیہ مقابل کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ بھی 180° ہے۔

کیا یہ دوسرے طریقے سے ثابت کیا جاسکتا ہے؟

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کے مسئلہ کا عکس (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

مسئلہ : ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوں، تب وہ ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔

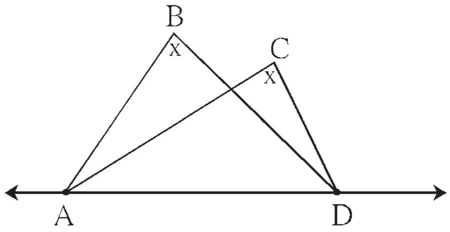
یہ مسئلہ بالواسطہ طریقے سے ثابت کر سکتے ہیں۔ آپ کوشش کیجیے۔

مذکورہ بالا مسئلہ کے عکس سے ہمیں اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے جب متمم ہوں تب ہم جانتے ہیں کہ وہ ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔ ہر مثلث کا ایک حائط دائرہ ہوتا ہے۔ لیکن ہر ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط نہیں ہوتا۔ آپ مشاہدہ کیجیے۔

کون سی شرط پوری ہوجائے تب ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔ یعنی ذو اربعۃ الاضلاع کے تمام راسی نقاط دائرے پر واقع ہوں، یہ بات ہمیں اوپر کے مسئلہ سے سمجھ میں آتی ہے۔

ایک اور مختلف حالت میں چار غیر ہم خطی نقاط مستقیم المحیط ہوتے ہیں۔ یہ آگے کے مسئلے میں بتایا گیا ہے۔

مسئلہ : کسی خط پر واقع کوئی دو متفرق نقاط، اسی خط کے ایک ہی جانب واقع دو متفرق نقاط پر متماثل زاویے بناتے ہوں تب وہ چار نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔



شکل 3.50

دیا ہوا ہے : نقطہ B اور C خط AD کے ایک ہی جانب واقع ہو۔

$\angle ABD \cong \angle ACD$

ثابت کرنا ہے : نقاط A، B، C اور D ایک ہی دائرے پر واقع ہیں۔

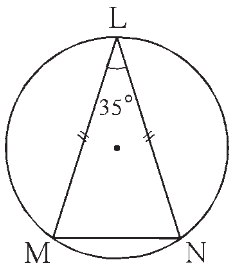
(یعنی $\square$ABCD مستقیم المحیط ذوار بعۃ الاضلاع ہے) اس مسئلہ کا بھی ہم بالواسطہ ثبوت لکھ سکتے ہیں۔

غور کیجیے

مذکورہ بالا مسئلہ کس مسئلہ کا عکس ہے؟

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : شکل 3.51 میں وتر LN $\cong$ وتر LM اور $\angle L = 35°$ ہو تو



شکل 3.51

(i) $m($قوس MN$) = ?$

(ii) $m($قوس LN$) = ?$

حل : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\, m($قوس MN$)$ ... (قوسی زاویے کا مسئلہ)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\, m($قوس MN$)$

$\therefore\ 2 \times 35 = m($قوس MN$) = 70°$

(ii) $m($قوس MLN$) = 360° - m($قوس MN$)$ ... (قوس کی پیمائش کی تعریف)

$= 360° - 70° = 290°$

اب , وتر LM $\cong$ وتر LN

$\therefore$ قوس LM $\cong$ قوس LN

لیکن , $m($قوس LM$) + m($قوس LN$) = m($قوس MLN$) = 290°$ ... (قوسین کے جمع کی خصوصیت)

$m($قوس LM$) = m($قوس LN$) = \frac{290°}{2} = 145°$

یا (ii) وتر LM $\cong$ وتر LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ)

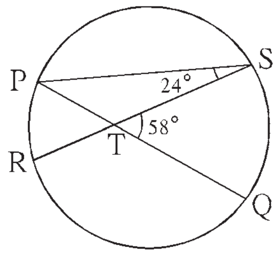
$\therefore\ 2\angle M = 180° - 35° = 145°$

$\therefore\ \angle M = \frac{145°}{2}$

اب ، m(قوس LN) $= 2 \times \angle M$ ... (قوس زاویے کا مسئلہ)

$= 2 \times \frac{145^\circ}{2} = 145^\circ$

مثال (2) : شکل 3.52 میں وتر PQ اور وتر RS، ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔



شکل 3.52

(i) اگر $\angle STQ = 58^\circ$ اور $\angle PSR = 24^\circ$ ہوتو m(قوس SQ) معلوم کیجیے۔

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}\,[m(\text{قوس PR}) + m(\text{قوس SQ})]$ اس کی تصدیق کیجیے۔

(iii) وتر PQ اور وتر RS میں زاویے کی پیائش کوئی بھی ہو تب بھی ثابت کیجیے کہ

$\angle STQ = \frac{1}{2}\,[m(\text{قوس PR}) + m(\text{قوس SQ})]$

(iv) اس مثال میں ثابت ہونے والی خصوصیت کو الفاظ میں لکھیے۔

حل : (مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ...

(i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$

m(قوس QS) $= 2\,\angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(قوس PR) $= 2\,\angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

اب ، $\frac{1}{2}\,[m(\text{قوس PR}) + m(\text{قوس SQ})] = \frac{1}{2}\,[48 + 68]$

$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$

$= \angle STQ$

(iii) اس خصوصیت کے ثبوت کے لیے خالی چوکون پر کر کے مکمل کیجیے۔

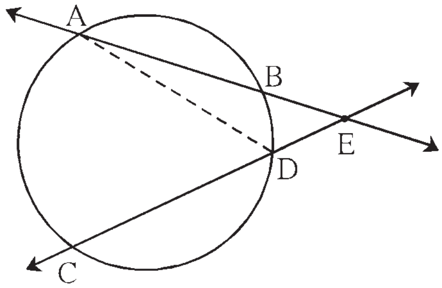
$\angle STQ = \angle SPQ + \square$ ... (مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ)

$= \frac{1}{2}\,m(\text{قوس SQ}) + \square$ ... (قوس زاویے کا مسئلہ)

$= \frac{1}{2}\,[\square + \square]$

(iv) دائرے کے وتر ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں قطع کرتے ہوں تب ان وتروں میں بننے والے زاویے کی پیائش اس زاویے کے مقطوعہ قوس اور اس کے مخالف زاویہ کا مقطوعہ قوس کی پیائشوں کے مجموعہ کے نصف ہوتی ہے۔

مثال (3) : ثابت کیجیے کہ دائرے کے وتروں کو شامل کرنے والے خطوط دائرے کے بیرون میں قطع کرتے ہوں تو ان خطوط کے درمیان کا زاویہ، اس زاویہ کے مقطوعہ قوسین کی پیمائش کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔



شکل 3.53

دیا ہوا ہے : دائرے کے وتر AB اور وتر CD، دائرے کے بیرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle AEC = \frac{1}{2}\,[m(\text{قوس AC}) - m(\text{قوس BD})]$

عمل : قطعہ AD کھینچیے۔

ثبوت : اس خصوصیت کا ثبوت اوپر کی دی ہوئی مثال (2) میں دیے ہوئے ثبوت کے مطابق دے سکتے ہیں۔
اس کے لیے △AED کے داخلہ زاویے اور اس کے خارجہ زاویے وغیرہ پر غور کیجیے اور ثبوت لکھیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) دائرے کے قوسی زاویے کی پیمائش، اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش کے نصف ہوتی ہے۔

(2) دائرے کے ایک ہی قوس پر بننے والے قوسی زاویوں کی پیمائشیں متماثل ہوتی ہے۔

(3) نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

(4) ذوار بعتہ الاضلاع کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوں تو اس ذوار بعتہ الاضلاع کو مستقیم المحیط ذوار بعتہ الاضلاع کہتے ہیں۔

(5) مستقیم المحیط ذوار بعتہ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوتے ہیں۔

(6) مستقیم المحیط ذوار بعتہ الاضلاع کا خارجہ زاویہ اس کے متصلہ زاویے کے مقابل کے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

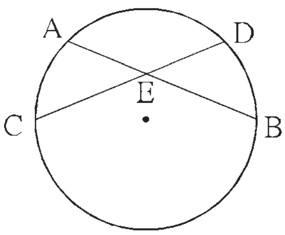
(7) ذوار بعتہ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوں تو وہ ذوار بعتہ الاضلاع مستقیم المحیط ذوار بعتہ الاضلاع ہوتا ہے۔

(8) کسی خط پر واقع کوئی دو متفرق نقاط، اس خط کے ایک ہی جانب واقع دو متفرق نقاط پر متماثل زاویے بناتے ہوں تب وہ چار نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

(9) مقابل کی شکل 3.54 میں،

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}\,[m(\text{قوس AC}) + m(\text{قوس DB})]$

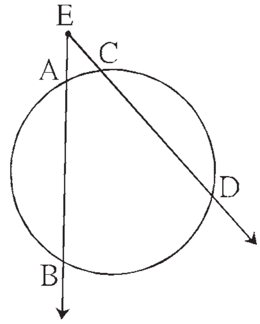
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}\,[m(\text{قوس AD}) + m(\text{قوس CB})]$



شکل 3.54

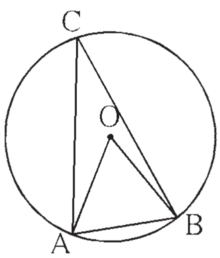
(10) مقابل کی شکل 3.55 میں

$\angle BED = \frac{1}{2}$ [m(قوس BD) − m(قوس AC)]



شکل 3.55

مشقی سیٹ 3.4

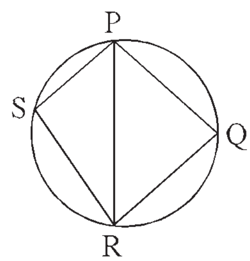


شکل 3.56

1. شکل 3.56 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔ دائرے کے وتر AB کی لمبائی نصف قطر کے مساوی ہے تو۔

(1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$

(3) قوس AB اور (4) قوس ACB کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.57

2. شکل 3.57 میں □PQRS مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہے۔

ضلع PQ ≅ ضلع RQ، $\angle PSR = 110°$ ہو تو

(i) $\angle PQR = ?$

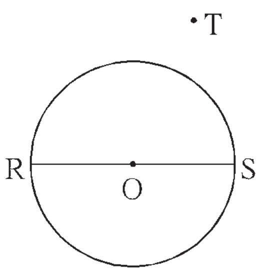
(ii) m(قوس PQR) = ?

(iii) m(قوس QR) = ?

(iv) $\angle PRQ = ?$

3. مستقیم المحیط □MRPN میں،

$\angle R = (5x - 13)°$ اور $\angle N = (4x + 4)°$ ہو تو $\angle R$ اور $\angle N$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.58

4. شکل 3.58 میں قطعہ RS، 'O' مرکز والے دائرے کا قطر ہے۔ نقطہ T دائرے کے بیرون میں واقع کوئی نقطہ ہے۔

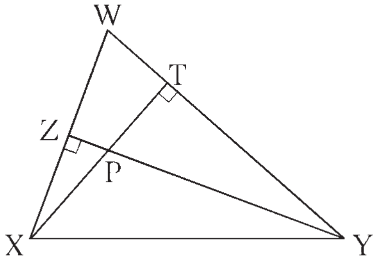
تو ثابت کیجیے کہ $\angle RTS$ حادہ زاویہ ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ ہر مستطیل مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہوتا ہے۔

.6 شکل 3.59 میں $\triangle WXY$ کے ارتفاع، قطعہ YZ اور قطعہ XT نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔تو ثابت کیجیے۔

(1) $\square$WZPT مستقیم المحیط ہے۔

(2) نقاط Y,T,Z,X ایک ہی دائرے پر واقع ہیں۔



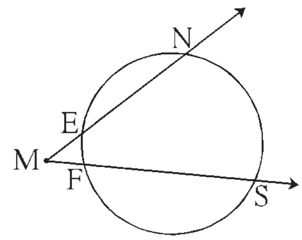
شکل 3.59

.7 شکل 3.60 میں،

$m($قوس NS$) = 125°$

$m($قوس EF$) = 37°$ ہوتو

$\angle NMS$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



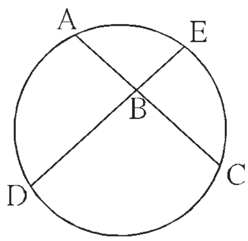
شکل 3.60

.8 شکل 3.61 میں،

وتر AC اور وتر DE ایک دوسرے کو نقطہ B پر قطع کرتے ہیں۔

اگر $\angle ABE = 108°$ اور $m($قوس AE$) = 95°$ ہوتو،

$m($قوس DC$)$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



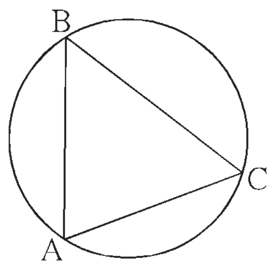
شکل 3.61

عملی کام :

ایک بڑا دائرہ بنایئے۔شکل 3.62 کے مطابق اس دائرے کا ایک وتر قطعہ AC کھینچیے۔

اس دائرے پر کوئی نقطہ B لیجیے۔ $\angle ABC$ قوسی زاویہ ہے۔

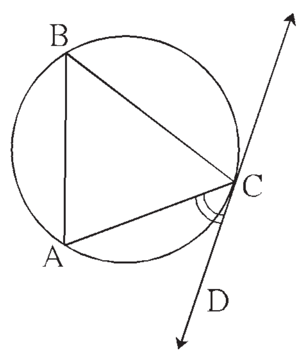
$\angle ABC$ کی پیمائش کیجیے۔اوراندراج کیجیے۔



شکل 3.62

اب شکل 3.63 کے مطابق اسی دائرے پر خط CD مماس کھینچیے۔

$\angle ACD$ کی پیمائش کیجیے۔



شکل 3.63

$\angle ACD$ کی پیمائش، $\angle ABC$ کی پیمائش کے مساوی ہے۔اس بات کا آپ کو مشاہدہ ہوتا ہے۔

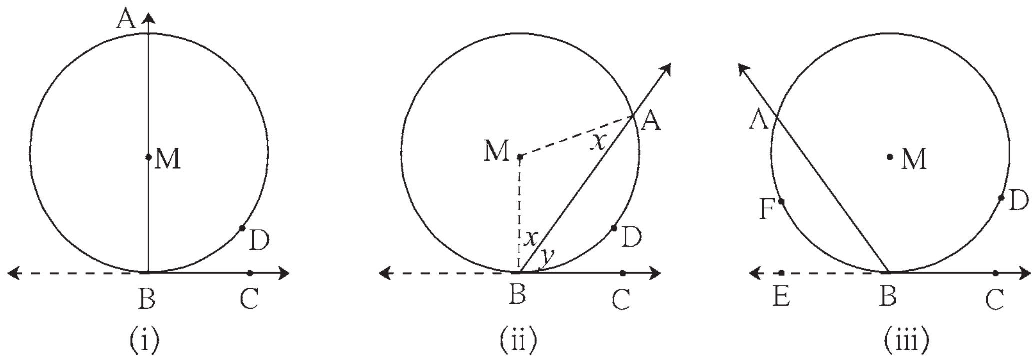
$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m($قوس $AC)$ یہ آپ جانتے ہیں۔

اس بنا پر $\angle ACD$ کی پیمائش بھی (قوس AC) کی پیمائش کے نصف ہوتی ہے۔ایسا ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

دائرہ کے مماس کی یہ ایک اہم خصوصیت ہے۔اسے ہم اب ثابت کریں گے۔

مماس قاطع کے زاویہ کا مسئلہ (Theorem of angle between tangent and secant)

مسئلہ : اگر کسی زاویہ کا راس دائرے پر ہو، اس کی ایک ساق دائرے کو مس کرتی ہو اور دوسری دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرتی ہو، تب اس زاویے کی مقطوعہ قوس کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔

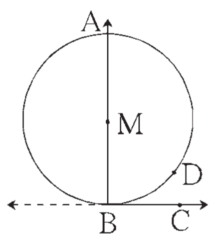


شکل **3.64**

دیا ہوا ہے : $\angle ABC$ کا راسی نقطہ، M مرکز والے دائرے پر واقع ہے۔اس کی ساق BC دائرے کو مس کرتی ہے اور ساق BA دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتی ہے۔ $\angle ABC$ کا مقطوعہ قوس، قوس ADB ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC = \frac{1}{2}\ m($قوس$ADB)$

ثبوت : اس مسئلہ کا ثبوت، تین امکانات کا خیال کرتے ہوئے دینا ہوگا۔



شکل **3.64 (i)**

(1) شکل 3.64 (i) کے مطابق، دائرے کا مرکز M یہ $\angle ABC$ کی ایک ساق پر واقع ہو تو۔

$\angle ABC = \angle MBC = 90°$ ... (مماس کا مسئلہ) ... (I)

قوس ADB، نصف دائرہ ہے۔

$\therefore\ m($قوس $ADB) = 180°$ ... (قوس کی پیمائش کی تعریف) ... (II)

$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m($قوس$ADB)$ ... [(I) اور (II) کی بنا پر]

(2) شکل 3.64 (ii) کے مطابق، دائرے کا مرکز M یہ $\angle ABC$ کے بیرون میں واقع ہے۔نصف قطر MA اور نصف قطر MB بنائیے۔

اب , $\angle MBA = \angle MAB$ ... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ)

اسی طرح , $\angle MBC = 90°$ ... (مماس کا مسئلہ) ... (I)

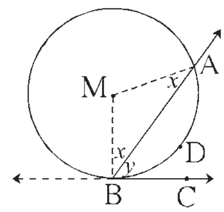
فرض کیجیے : $\angle MBA = \angle MAB = x, \ \angle ABC = y$

$$\angle AMB = 180 - (x + x) = 180 - 2x$$

$$\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC = x + y$$

$$\therefore \ x + y = 90^\circ \quad , \quad \therefore \ 2x + 2y = 180^\circ$$

$\triangle AMB$ میں،



شکل 3.64 (ii)

$$2x + \angle AMB = 180^\circ$$

$$\therefore \ 2x + 2y = 2x + \angle AMB$$

$$\therefore \ 2y = \angle AMB$$

$$\therefore \ y = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{1}{2} \ m(\text{قوس } ADB)$$

(3) تیسری امکانی حالت کے لیے مندرجہ ذیل ثبوت شکل 3.64 (iii) کی مدد سے خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کیجیے۔

شعاع $\square$ یہ شعاع BC کی مخالف شعاع کھینچیے۔

اب ، $\angle ABE = \frac{1}{2} \ m(\square)$ ... [(II) میں ثابت کیا گیا]

$180 - \square = \angle ABE$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

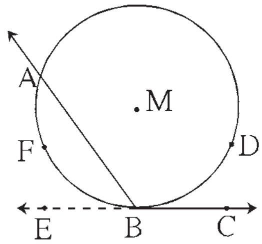
$\therefore \ 180 - \square = \frac{1}{2} \ m(\text{قوس } AFB)$

$= \frac{1}{2} \ [360 - m(\square)]$

$\therefore \ 180 - \angle ABC = 180 - \frac{1}{2} \ m(\text{قوس } ADB)$

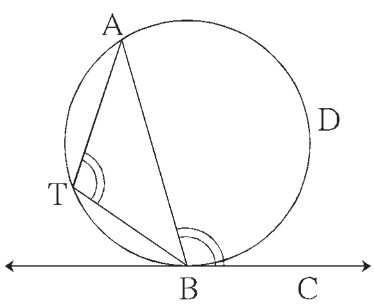
$\therefore \ -\angle ABC = - \frac{1}{2} \ m(\square)$

$\therefore \ \angle ABC = \frac{1}{2} \ m(\text{قوس } ADB)$



شکل 3.64 (iii)

مماس قاطع کے زاویے کے مسئلے کے لیے متبادل بیان :



شکل 3.65

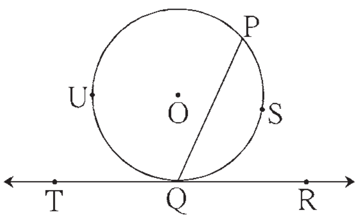
شکل 3.65 میں AB قاطع خط ہے اور BC مماس ہے۔ قوس ADB، $\angle ABC$ کا مقطوعہ قوس ہے۔ وتر AB دائرے کو دو قوسین میں تقسیم کرتا ہے۔ دونوں قوسین ایک دوسرے کے مخالف قوس ہیں۔ اب قوس ADB کے مخالف قوس پر نقطہ T لیجیے۔ اوپر دیے ہوئے مسئلے کی بنا پر،

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \ m \ (\text{قوس } ADB) = \angle ATB$$

$\therefore$ دائرے کا مماس اور نقطہ تماس سے کھینچا ہوا وتر ان سے بننے والا زاویہ اس زاویے کے مقطوعہ قوس کے مخالف قوس میں بننے والے قوسی زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

مماس قاطع زاویے کے مسئلہ کا عکس

دائرے کے وتر کے ایک اختتامی نقطے سے گذرنے والا خط کھینچنے پر اس خط کا اس وتر سے بنائے ہوئے زاویے کی پیمائش، اس زاویے کے مقطوعہ قوس کے پیمائش کا نصف ہوتو، وہ خط اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔



شکل 3.66

شکل 3.66 میں،

اگر $\angle PQR = \frac{1}{2}\, m($قوس$\ PSQ)$ ہوتو

[یا $\angle PQT = \frac{1}{2}\, m($قوس$\ PUQ)$]

خط TR یہ دائرے کا مماس ہے۔ اس مسئلے کے عکس کا استعمال دائرے کا مماس کھینچنے کے لیے ہندسی عمل میں کیا جاتا ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دیا جا سکتا ہے۔

وتروں کے داخلی تقاطع کا مسئلہ (Theorem of internal division of chords)

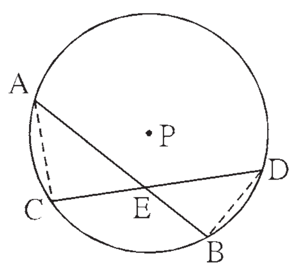
ایک ہی دائرے کے دو وتر جب دائرے کے اندرون میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب ایک وتر کے بنے ہوئے دو حصوں کا حاصل ضرب، دوسرے وتر کے بنے ہوئے دو حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : P مرکز والے دائرے کے وتر AB اور CD ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $AE \times EB = CE \times ED$

عمل : قطعہ AC اور قطعہ DB کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle CAE$ اور $\triangle BDE$ میں،



شکل 3.67

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ... (متقابلہ زاویے)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ... (ایک ہی قوس کے قوسی زاویے)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ... (زازا آزمائش مشابہت)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

غور کیجیے

شکل 3.67 میں قطعہ AC اور قطعہ DB کھینچ کر ہم نے مسئلہ ثابت کیا اس کی بجائے قطعہ AD اور قطعہ CB کھینچ کر کیا یہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں؟

مزید معلومات کے لیے :

شکل 3.67 میں وتر AB کے نقطہ E کی وجہ سے دو حصے AE اور EB بنے ہیں۔قطعہ AE اورقطعہ EB کو مستطیل کے متصل اضلاع مان کر ایک مستطیل بنایا جائے۔تب AE × EB مستطیل کا رقبہ ہوگا۔اسی طرح CE × ED، وتر CD کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ ہوگا۔

ہم $AE \times EB = CE \times ED$ ثابت کر چکے ہیں۔

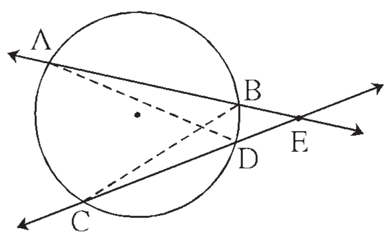
اس لیے یہ مسئلہ مختلف الفاظ میں ذیل کے مطابق بیان کیا جا سکتا ہے۔

ایک ہی دائرے کے دو وتر، دائرے کے اندرون میں قطع کرتے ہوں تو، ایک وتر کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ، دوسرے وتر کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کے رقبے کے مساوی ہوتا ہے۔

وتروں کے بیرونی تقاطع کا مسئلہ (Theorem of external division of chords)

ایک ہی دائرے کے وتر AB اور وتر CD کو شامل کرنے والے قاطع خط ایک دوسرے کو دائرے کے بیرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہوں تو $AE \times EB = CE \times ED$

اوپر دیے ہوئے مسئلے کا بیان اور شکل کی مدد سے ''دیا ہوا ہے'' اور ''ثابت کرنا ہے'' لکھیے۔



شکل 3.68

عمل : قطعہ AD اور قطعہ BC کھینچیے۔

خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔

ثبوت : △ADE اور △CBE میں،

$\angle AED \cong$ ☐ ... (مشترک زاویہ)

$\angle DAE \cong \angle BCE$ ... (☐)

$\therefore \Delta ADE \cong$ ☐ ... (☐)

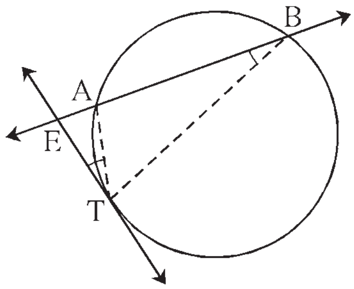
$\therefore \frac{AE}{\square} = \frac{\square}{\square}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore \square = CE \times ED$

مماس قاطع قطعۂ خط کا مسئلہ (Tangent Secant Segment Theorem)

دائرے کے بیرونی نقطہ E سے دائرے کا قاطع خط دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے اور اسی نقطے سے گذرنے والا مماس، دائرے کو T پر مس کرتا ہے تو $EA \times EB = ET^2$

اس مسئلہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے دیا ہوا ہے اور ثابت کرنا ہے لکھیے۔



شکل 3.69

عمل : قطعہ TA اور قطعہ TB کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle EAT$ اور $\triangle ETB$ میں،

(مشترک زاویے) ... $\angle AET \cong \angle TEB$

(مماس قاطع مسئلہ) ... $\angle ETA \cong \angle EBT$

(زازا مشابہت) ... $\therefore \triangle EAT \sim \triangle ETB$

(مشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... $\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$

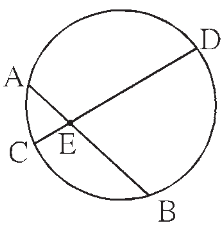
$\therefore EA \times EB = ET^2$

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) شکل 3.70 کے مطابق،

$AE \times EB = CE \times ED$

اس خصوصیت کو وتروں کے داخلی طور پر قطع کرنے کا مسئلہ کہتے ہیں۔

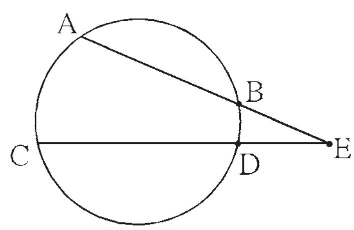


شکل 3.70

(2) شکل 3.71 کے مطابق،

$AE \times EB = CE \times ED$

اس خصوصیت کو وتروں کے بیرونی طور پر قطع کرنے کا مسئلہ کہتے ہیں۔

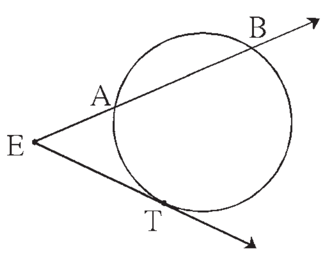


شکل 3.71

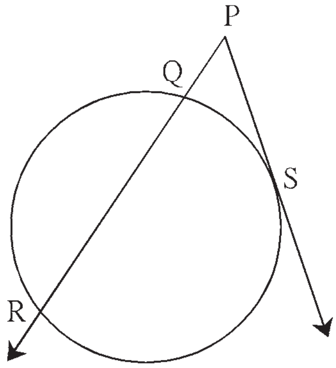
(3) شکل 3.72 کے مطابق،

$EA \times EB = ET^2$

اس خصوصیت کو مماس قاطع خط کا مسئلہ کہتے ہیں۔



شکل 3.72



شکل 3.73

مثال (1) : شکل 3.73 میں قطعہ PS مماس ہے۔خط PR دائرے کا قاطع ہے

اگر PQ = 3.6 ، QR = 6.4 تو PS معلوم کیجیے۔

حل : (مماس قاطع مسئلہ) ...

$PS^2 = PQ \times PR$

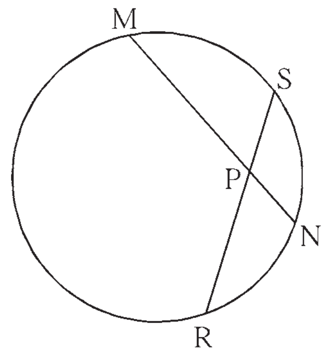
$= PQ \times (PQ + QR)$

$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

$\therefore\ PS = 6$



شکل 3.74

مثال (2) : شکل 3.74 میں وتر MN اور وتر RS ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

اگر PR = 6 ، PS = 4 ، MN = 11 ہو تو PN معلوم کیجیے۔

حل : وتروں کے اندرونی طور پر قطع کرنے کے مسئلے کے ذریعے

$PN \times PM = PR \times PS$ ... (I)

فرض کریں $PN = x$ اس لیے، $PM = 11 - x$

بیان (I) میں یہ قیمت رکھنے پر،

$x(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$

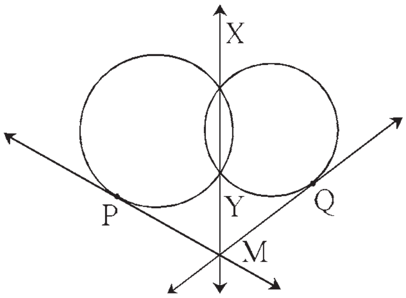
$\therefore\ (x - 3)(x - 8) = 0$

$\therefore\ x - 3 = 0$ یا $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ یا $x = 8$

$\therefore\ PN = 3$ یا $PN = 8$

مثال (3) : شکل 3.75 میں دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط X اور Y پر قطع کرتے ہیں۔



شکل 3.75

خط XY پر واقع نقطہ M سے کھینچا گیا مماس دائروں کو نقاط P اور Q پر مس کرتا ہے تو ثابت کیجیے کہ قطعہ PM $\cong$ قطعہ QM

ثبوت : خالی جگہیں پر کر کے ثبوت لکھیے۔

خط MX دونوں دائروں کا مشترک .... ہے۔

$\therefore$ $PM^2 = MY \times MX$ ... (......................) ... (I)

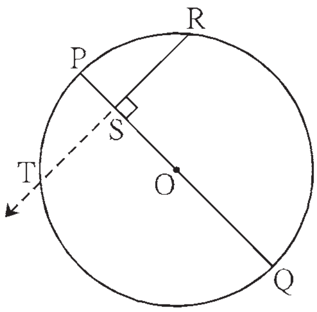
اسی طرح , ... = ... $\times$ .... (مماس قاطع خط مسئلہ) ... (II)

$\therefore$ [بیان (I) اور (II) سے] ... QM^2 = ...

$\therefore$ PM = QM

$\therefore$ قطعہ PM $\cong$ قطعہ QM

مثال (4) : شکل 3.76 میں قطعہ PQ , O مرکز والے دائرے کا قطر ہے۔



شکل 3.76

نقطہ R دائرے پر واقع کوئی نقطہ ہے۔

قطعہ PQ $\perp$ قطعہ RS تو ثابت کیجیے کہ قطعہ PS اور قطعہ SQ کا ہندسی وسط SR ہے۔

{یعنی $SR^2 = PS \times SQ$}

حل : مندرجہ ذیل مرحلوں کی مدد سے ثبوت لکھیے۔

(1) شعاع RS کھینچیے۔ وہ دائرے کو جس نقطے پر قطع کرتی ہے اسے T نام دیجیے۔

(2) RS = TS دکھائیے۔

(3) وتروں کے اندرون میں قطع کرنے والے مسئلے کا استعمال کر کے مساوات لکھیے۔

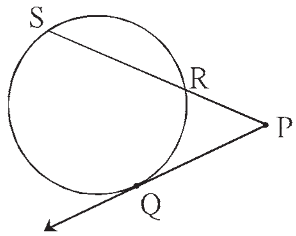
(4) RS = TS کا استعمال کر کے ثابت کیجیے۔

غور کیجیے

(1) مندرجہ بالا شکل 3.76 میں قطعہ PR اور قطعہ RQ بنانے پر △PRQ کس قسم کا مثلث ہوگا؟

(2) مندرجہ بالا مثال (4) میں ثابت کی گئی خصوصیت کو کیا آپ کسی دوسرے طریقے سے ثابت کر سکتے ہیں؟

مشقی سیٹ 3.5

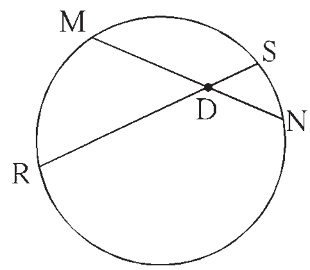


شکل 3.77

.1 شکل 3.77 میں نقطہ Q تماسی نقطہ ہے اگر

$PR = 8, \; PQ = 12$ تو

PS = کتنا ?   RS = کتنا ?



شکل 3.78

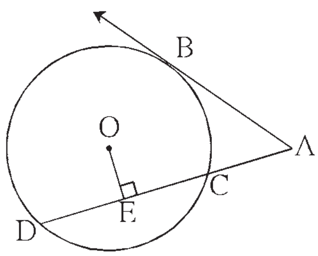
.2 شکل 3.78 میں وتر MN اور وتر RS ایک دوسرے کو نقطہ D پر قطع کرتے ہیں۔

(1) اگر $MD = 8, \; DS = 4, \; RD = 15$ تو

DN = کتنا ?

(2) اگر $DN = 8, \; MD = 9, \; RS = 18$ تو

DS = کتنا ?



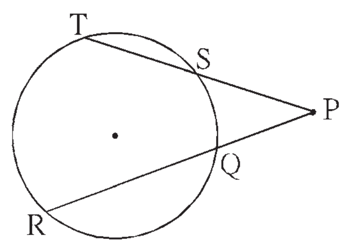
شکل 3.79

.3 شکل 3.79 میں نقطہ B تماسی نقطہ ہے اور O دائرے کا مرکز ہے۔

خط AD $\perp$ قطعہ OE

$AC = 8, \; AB = 12$ ہو تو

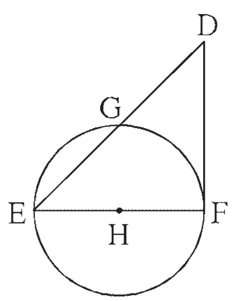
(1) AD (2) DC اور (3) DE معلوم کیجیے۔



شکل 3.80

.4 شکل 3.80 میں اگر $PS = 8, \; QR = 10, \; PQ = 6$ ہو تو

TS = کتنا ?



شکل 3.81

.5 شکل 3.81 میں قطعہ EF قطر ہے اور قطعہ DF مماس ہے۔

دائرے کا نصف قطر r ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$DE \times GE = 4r^2$$

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے :

(1) دو دائرے جن کے نصف قطر بالترتیب 5.5 سم اور 3.3 سم ہیں۔ وہ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ کتنے سم ہے؟

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 یا 2.2

(2) دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان میں سے ہر دائرہ دوسرے دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے۔ اگر ان مرکزوں کے درمیان فاصلہ 12 سم ہو تو ہر دائرے کا نصف قطر کتنا سم ہے؟

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) بتایا نہیں جاسکتا

(3) ایک دائرہ ایک متوازی الاضلاع کے تمام ضلعوں کو مس کرتا ہے تو وہ متوازی الاضلاع .... ہونا چاہیے۔ اس بیان کی خالی جگہ مناسب لفظ لکھیے۔

(A) مستطیل (B) معین (C) مربع (D) ذوزنقہ

(4) ایک دائرے کے مرکز سے 12.5 سم فاصلے پر واقع ایک نقطے سے دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعہ کی لمبائی 12 سم ہے تو اس دائرے کا قطر کتنے سم کا ہے۔

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں پر زیادہ سے زیادہ کتنے مشترک مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

(A) ایک (B) دو (C) تین (D) چار

(6) 'O' مرکز والے دائرے کے قوس ACB میں $\angle ACB$ قوسی زاویہ بنایا گیا ہے۔ اگر $\angle ACB = 65°$ ہو تو $m($قوس ACB$) =$ کتنا ?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) ایک دائرے کے وتر AB اور وتر CD ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $CE = 8, EB = 10, AE = 5.6$ تو $ED = ?$

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) مستقیم المحیط □ABCD میں، $\angle A$ کی پیائش کا دُگنا $\angle C$ کی پیائش کے تین گنا کے مساوی ہے تو $\angle C$ کی پیائش کتنی ہے؟

(A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

(9)* ایک دائرے پر نقاط C, B, A اس طرح واقع ہیں کہ $m($قوس AB$) = m($قوس BC$) = 120°$ دونوں قوسین میں B کے سوا ایک بھی نقطہ مشترک نہیں ہے۔ تو △ABC کس قسم کا مثلث ہے؟

(A) متساوی الاضلاع مثلث (B) منفرجۃ الزاویہ مثلث (C) قائمۃ الزاویہ مثلث (D) متساوی الساقین مثلث

(10) قطعہ XZ قطر والے دائرے کے اندرون میں ایک نقطہ Y ہے۔تو ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے۔

(i) $\angle XYZ$ کا حادہ زاویہ ہونا، ناممکن ہے۔

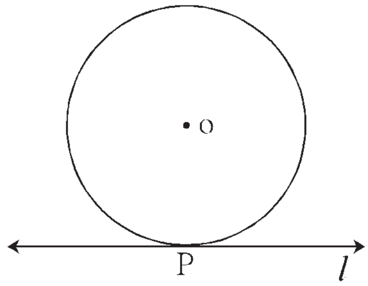
(ii) $\angle XYZ$ کا قائمہ زاویہ ہونا، ناممکن ہے۔

(iii) $\angle XYZ$ منفرجہ زاویہ ہے۔

(iv) $\angle XYZ$ کی پیمائش سے متعلق متعین بیان نہیں دیا جا سکتا۔

(A) صرف ایک (B) صرف دو (C) صرف تین (D) سب

.2 ’**O**‘ مرکز والے دائرے کو خط ***l*** نقطہ **P** پر مس کرتا ہے۔ اگر دائرے کا نصف قطر **9** سم ہو تب ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



شکل **3.82**

(1) ? کتنا = d(O ,P) اور کیوں؟

(2) اگر سم 8 = d(O,Q) ہو تو نقطہ Q کا مقام کہاں ہے؟

(3) سم 15 = d(O,R) ہو تو نقطہ R خط l کے کتنے مقام پر ہو سکتا ہے؟

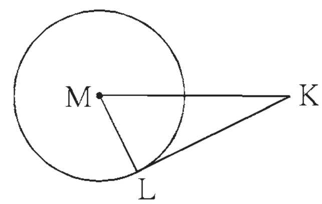
وہ نقطہ P سے کتنے فاصلے پر ہوگا؟

.3 متصلہ شکل میں، نقطہ M دائرے کا مرکز ہے۔ اور قطعہ KL مماس ہے۔

اگر $MK = 12$, $KL = 6\sqrt{3}$ ہو تو

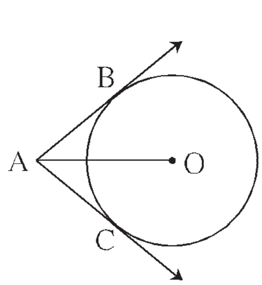
(1) دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

(2) $\angle K$ اور $\angle M$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل **3.83**

.4 شکل 3.84 میں نقطہ O دائرے کا مرکز ہے اور قطعہ AB اور قطعہ AC مماسی قطعات ہیں اگر دائرے کا نصف قطر r اور $l(AB) = r$ ہو تو دکھائیے کہ $\square$ABOC مربع ہے۔

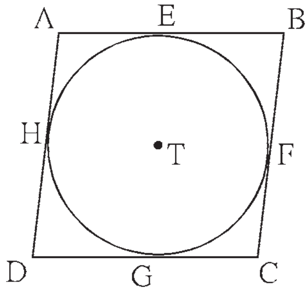


شکل **3.84**

5. شکل 3.85 میں ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔ یہ T مرکز والے دائرے کے گرد حائط ہے۔ (یعنی اس ذوار بعتہ الاضلاع کے ضلعے دائرے کو مس کرتے ہیں۔)

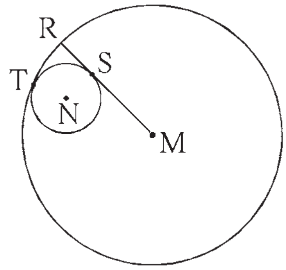
نقاط G, F, E اور H تماسی نقاط ہیں۔

اگر AE = 4.5 اور EB = 5.5 ہوتو AD معلوم کیجیے۔



شکل **3.85**

6. شکل 3.86 میں N مرکز والا دائرہ M مرکز والے دائرے کو نقطہ T پر اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ بڑے دائرے کا نصف قطر چھوٹے دائرے کے نقطہ S پر مس کرتا ہے۔ اگر بڑے اور چھوٹے دائروں کے نصف قطر بالترتیب 9 سم اور 2.5 سم ہوتو ذیل کے سوالوں کے جواب معلوم کیجیے اور ان پر سے MS : SR نسبت معلوم کیجیے۔



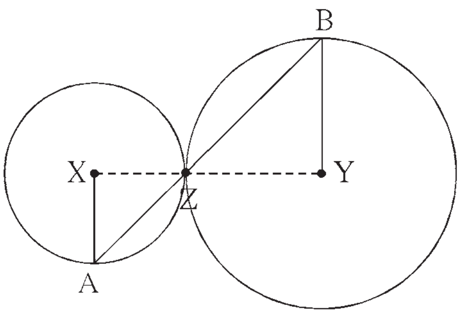
شکل **3.86**

(1) MT = ?　　(2) MN = ?　　(3) ∠NSM = ?

7. متصلہ شکل میں X اور Y مرکز والے دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ Z پر مس کرتے ہیں۔

نقطہ Z سے گذرنے والا قاطع خط ان دائروں کو بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ نصف قطر XA || نصف قطر YB

نیچے دیے ہوئے ثبوت میں خالی جگہوں کو پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل **3.87**

عمل : قطعہ XZ اور .... کھینچیے۔

ثبوت : مس کرنے والے دائروں کے مسئلہ کی بناء پر نقاط Y, Z, X .... ہیں۔

∠XZA ≅ ....　　　　... (∵ متقابلہ زاویہ)

∠XZA = ∠BZY = a　　　　... (فرض کیجیے) ... (I)

اب , قطعہ XA ≅ قطعہ XZ　　　　... (∵ ....)

∴ ∠XAZ = ... = a　　... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ... (II)

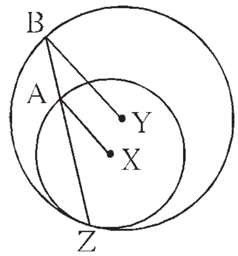
اسی طرح, قطعہ YB ≅ .... (.....................)

∴ ∠BZY = ... = a ... (.................) ... (III)

∴ (I), (II) اور (III) سے،

∠XAZ = ...

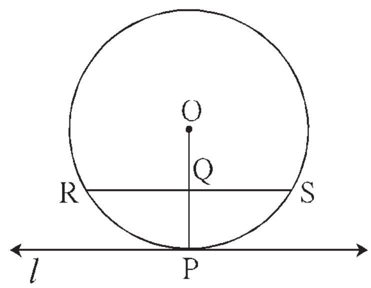
∴ نصف قطر XA ∥ نصف قطر YB (∵ ....)



شکل 3.88

8. شکل 3.88 میں X اور Y مرکز والے دو دائرے اندرونی طور پر نقطہ Z پر مس کرتے ہیں۔قطعہ BZ بڑے دائرے کا وتر ہے اور چھوٹے دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔تو

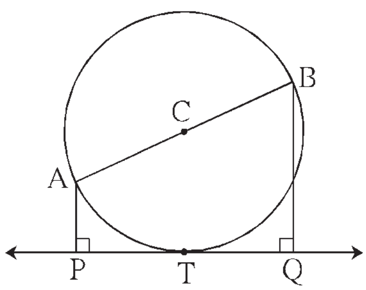
ثابت کیجیے کہ قطعہ BY ∥ قطعہ AX



شکل 3.89

9. بازو میں دی ہوئی شکل میں 'O' مرکز والے دائرے کو خط l نقطہ P پر مس کرتا ہے۔نقطہ Q نصف قطر OP کا وسطی نقطہ ہے۔نقطہ Q کو شامل کرنے والا وتر RS ہے اسی طرح کہ خط l ∥ وتر RS

اگر RS = 12 سم ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔



شکل 3.90

10. شکل 3.90 میں C مرکز والے دائرے کا قطر قطعہ AB ہے۔

دائرہ کا مماس PQ دائرے کو نقطہ T پر مس کرتا ہے۔

خط PQ ⊥ قطعہ AP اور خط PQ ⊥ قطعہ BQ

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ CQ ≅ قطعہ CP

11. 3 سم نصف قطر والے تین دائرے کھینچیے جن کے مرکز A, B اور C ہیں۔اس طرح کہ ہر دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

***12.** ثابت کیجیے کہ دائرے کے کوئی بھی تین نقاط ہم خطی نہیں ہوتے۔

.13 شکل 3.91 میں خط PR دائرے کے نقطے Q پر مس کرتا ہے۔اس شکل کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

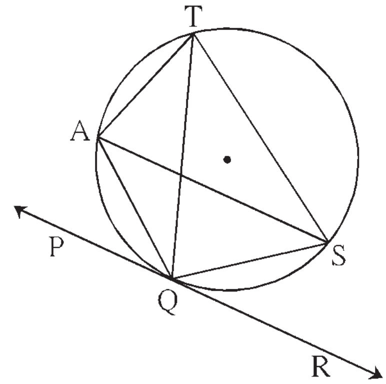
(1) $\angle TAQ$ اور $\angle TSQ$ کی پیمائشوں کی جمع کیجیے۔

(2) $\angle AQP$ کے متماثل زاویہ کون سا ہے؟

(3) $\angle QTS$ کے متماثل زاویہ کون سا ہے؟

(4) اگر $\angle TAS = 65°$ ہوتو $\angle TQS$ اور m(قوس TS) معلوم کیجیے۔

(5) اگر $\angle AQP = 42°$ اور $\angle SQR = 58°$ تو $\angle ATS$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



شکل **3.91**

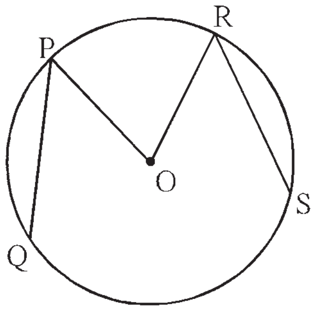
.14 متصلہ شکل میں O مرکز والے دائرے کے قطعہ PQ اور قطعہ RS متماثل وتر ہیں۔

اگر $\angle POR = 70°$ اور m(قوس RS) $= 80°$ ہوتو

(1) m(قوس PR) = ?

(2) m(قوس QS) = ?

(3) m(قوس QSR) = ?



شکل **3.92**

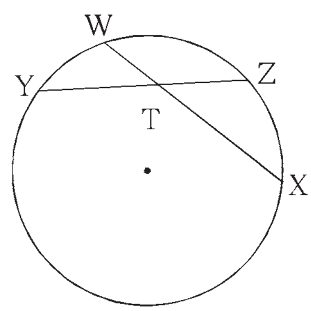
.15 شکل 3.93 میں m(قوس WY) $= 44°$،

m(قوس ZX) $= 68°$ ہوتو

(1) $\angle ZTX$ کی پیمائش طے کیجیے۔

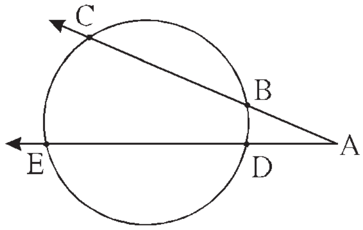
(2) $WT = 4.8$, $TX = 8.0$, $YT = 6.4$ ہوتو $TZ = ?$

(3) $WX = 25$, $YT = 8$, $YZ = 26$ ہوتو $WT = ?$



شکل **3.93**

16. شکل 3.94 میں،



شکل **3.94**

(1) m(قوس BD) = 23°, m(قوس CE) = 54°

ہوتو ∠CAE = ?

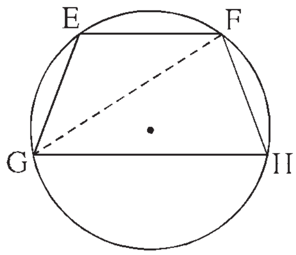
(2) AE = 12.0, BC = 5.4, AB = 4.2

ہوتو AD = ?

(3) AD = 5.4, AC = 9.0, AB = 3.6

ہوتو AE = ?

17. بازو میں دی ہوئی شکل 3.95 میں وتر GH || وتر EF،



شکل **3.95**

تو ثابت کیجیے کہ وتر FH ≅ وتر EG

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہوں کو پر کر کے ثبوت مکمل کر کے لکھیے۔

ثبوت : قطعہ GF کھینچیے۔

(I) ... ∠EFG = ∠FGH ... (☐)

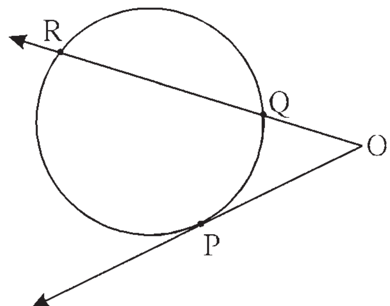
(II) ... ∠EFG = ☐ ... (قوسی زاویے کا مسئلہ)

(III) ... ∠FGH = ☐ ... (قوسی زاویے کا مسئلہ)

[(I), (II) اور (III) سے} ... ∴ m(قوس EG) = ☐

... (☐) ∴ وتر EG ≅ وتر FH

18. بازو کی شکل 3.96 میں نقطہ P تماسی نقطہ ہے۔



شکل **3.96**

(1) ∠POR = 36° , m(قوس PR) = 140°

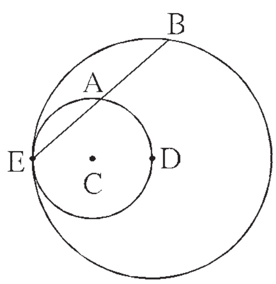
تو m(قوس PQ) = ?

(2) OQ = 3.2, OP = 7.2 ہوتو OR = ? اور QR = ?

(3) OR = 16.2, OP = 7.2 ہوتو QR = ?

19. متصلہ شکل 3.97 میں C مرکز والا دائرہ، D مرکز والے دائرے کو اندرونی طور پر نقطہ E پر مس کرتا ہے۔

نقطہ D اندرونی دائرے پر واقع ہے۔ بیرونی دائرہ کا وتر EB، اندرونی دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ قطعہ AB ≅ قطعہ EA



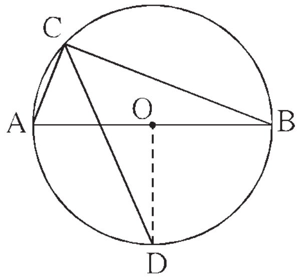
شکل **3.97**

.20 شکل 3.98 میں O مرکز والے دائرے کا قطر قطعہ AB ہے۔

قوسی زاویہ ACB کا ناصف دائرے کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ BD ≅ قطعہ AD

نیچے دیے ہوئے ثبوت میں خالی جگہوں کو پر کر کے اسے مکمل کیجیے اور لکھیے۔



شکل 3.98

ثبوت : قطعہ OD کھینچیے۔

$\angle ACB$ = ____ ... (نصف دائرہ میں قوسی زاویہ ہے)

$\angle DCB$ = ____ ... ($\angle C$ کا ناصف قطعہ AD ہے)

m(قوس DB) = ____ ... (قوسی زاویہ کا مسئلہ)

$\angle DOB$ = ____ ... (قوس کی پیمائش کی تعریف) ... (I)

قطعہ OB ≅ قطعہ OA ... (____) ... (II)

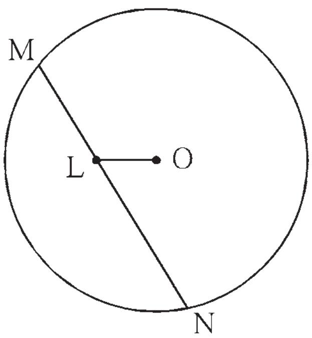
∴ خط OD ، قطعہ AB پر ____ ہے۔ {(I), (II) اور (III) سے}

قطعہ BD ≅ قطعہ AD

.21 متصلہ شکل میں، O مرکز والے دائرے کا وتر قطعہ MN ہے۔

MN = 25، وتر MN پر نقطہ L اس طرح ہے کہ

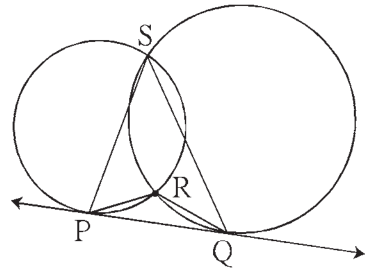
ML = 9 اور $d(O, L) = 5$ ہو تو اس دائرے کا نصف قطر کتنا ہوگا؟



شکل 3.99

.22* شکل 3.100 میں دو دائرے ایک دوسرے کو نقطہ S اور R پر قطع کرتے ہیں۔ خط PQ ان کا مشترک مماس ہے۔ جو انھیں نقطہ P اور نقطہ Q پر مس کرتا ہے۔

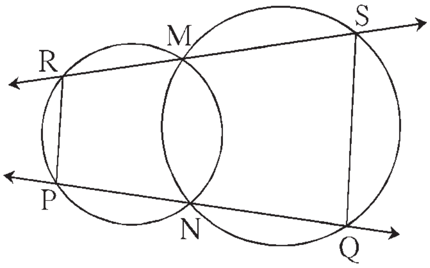
تو ثابت کیجیے کہ $\angle PRQ + \angle PSQ = 180°$



شکل 3.100

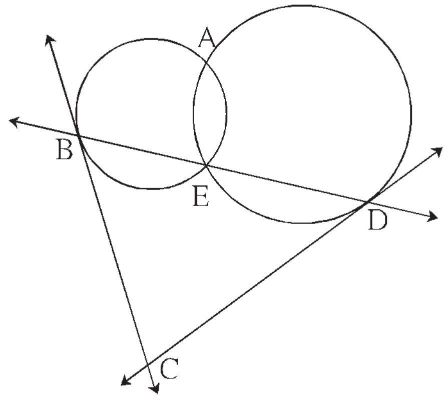
.23 شکل 3.101 دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط M اور N پر قطع کرتے ہیں۔نقطہ M اور N سے کھینچے گئے قاطع نقاط R اور S اور نقاط P اور Q پر دونوں دائروں کو قطع کرتے ہیں۔

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ QS || قطعہ PR



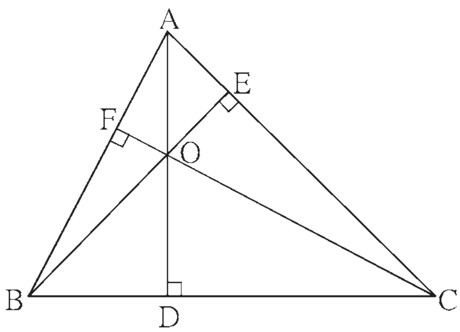
شکل **3.101**

***24.** دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور E پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ E سے گزرنے والا مشترک قاطع خط دائروں کو نقاط B اور D پر قطع کرتا ہے۔نقاط B اور D پر بنائے گئے مماس ایک دوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتے ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ □ABCD مستقیم الحیط ہے۔



شکل **3.102**

***25.** △ABC میں، ضلع BC ⊥ قطعہ AD، ضلع AC ⊥ قطعہ BE، ضلع AB ⊥ قطعہ CF اور نقطہ O ارتفاعی مرکز ہے۔تو ثابت کیجیے کہ △DEF کا داخلی مرکز نقطہ O ہے۔



شکل **3.103**

ICT Tools or Links

Geogebra کی مدد سے مختلف دائرے بنائیے۔

ان میں وتر اور مماس کھینچ کر خصوصیت کی جانچ کیجیے۔