5 संभाव्यता

आओ सीखें

- संभाव्यता : परिचय
- नमूना अवकाश व घटना
- यादृच्छिक प्रयोग व फल
- घटना की संभाव्यता

आओ चर्चा करें

अध्यापक : विद्यार्थी दोस्तों, अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या के बराबर पर्चियाँ इस बक्से में रखी गई हैं । प्रत्येक विद्यार्थी को एक पर्ची उठानी होगी, पर्चियों पर भिन्न- भिन्न वनस्पतियों के नाम लिखे गए हैं। किन्हीं भी दो पर्चियों पर एक ही वनस्पति का नाम नहीं दिखेगा । तुलसी नामवाली पर्ची किसे मिलेगी इसे देखेंगे । सभी अपनी उपस्थिति क्रमांक के अनुसार खड़े हो जाइए । अंतिम पर्ची उठाने तक किसी को भी पर्ची नहीं खोलना है ।

अरुणा : महोदय, कतार में मैं प्रथम हूँ किंतु मैं सबसे पहले पर्ची नहीं उठाऊँगी क्योंकि, सभी पर्चियों में से वह पर्ची मुझे ही मिलेगी जिसकी संभावना बहुत कम है ।

जरीना : महोदय, मैं सबसे अंत में हूँ परंतु मैं अंतिम पर्ची नहीं उठाऊँगी क्योंकि, तुलसी नामवाली पर्ची संभवत: मेरे उठाने के पहले ही निकाल ली गई होगी ।

संक्षेप में प्रथम और अंतिम के विद्यार्थियों को ऐसा लगता है कि उन्हें तुलसी नामवाली पर्ची मिलने की संभावना बहुत कम है । ऊपरोक्त चर्चा में संभावना के कम या अधिक होने पर विचार हुआ है ।

हम दैनिक जीवन में निम्नलिखित शब्दों का उपयोग करते हैं ।

- संभवत:
- अधिकतर
- असंभव
- निश्चित
- पास-दूर
- 50 - 50

भविष्य में संभावना संबंधी निम्नलिखित कथन देखिए ।

- आज से वर्षा होने की आशा अधिक है ।
- महँगाई बढ़ने की संभावना अधिक है ।
- भारत को आगामी क्रिकेट स्पर्धा में हराना असंभव है ।
- निश्चित ही मुझे प्रथम श्रेणी मिलेगी ।
- बच्चों को समय पर पोलिओ की खुराक दी तो उन्हें पोलिओ होने की संभावना नहीं होती ।

संलग्न चित्र में क्रिकेट के खिलाड़ी सिक्का उछालते हैं ।

इनमे कौन-कौन-सी संभावनाएँ हैं ?

☐ या ☐

अर्थात, सिक्का उछालने के ☐ परिणाम प्राप्त होते हैं ।

कृति 1 एक सिक्का कक्षा में प्रत्येक छात्र एक बार उछालकर देखें । आपने क्या देखा ?

(अध्यापक बोर्ड पर निम्नलिखित सारिणी बनाते हैं और उसे भरते हैं ।)

संभावना	चित (H)	पट (T)
विद्यार्थी संख्या	. . .	. . .

कृति 2 अब प्रत्येक उस सिक्के को दो बार उछालकर देखें । कौन-कौन-सी संभावना है ?

संभावना	HH	HT	TH	TT
विद्यार्थी संख्या				

कृति 3 किसी एक पाँसे को एक ही बार फेंकने पर ऊपरी पृष्ठभाग के लिए कौन-कौन-सी संभावनाएँ हैं इसका विचार कीजिए ।

प्रत्येक संभावना अर्थात पाँसा फेंकने का एक-एक संभाव्य परिणाम है ।

आओ जानें

यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment)

जिस प्रयोग में सभी संभाव्य परिणाम पहले से ही ज्ञात होते हैं, किंतु उनमें से किसी भी परिणाम की निश्चितता का अनुमान नहीं लगा सकते तथा सभी परिणामों के सत्य होने की संभावना समान होती है, ऐसे प्रयोग को 'यादृच्छिक प्रयोग' कहते हैं ।

उदा. सिक्के उछालना, पाँसा फेंकना, 1 से 50 अंक लिखे गए कार्ड के समूह में से एक कार्ड निकालना, खेलने के ताश के पत्तों का अच्छे तरीके से फेंट कर पत्तों में से एक पत्ता निकालना आदि ।

फल (Outcome)

यादृच्छिक प्रयोग के परिणाम को ‘फल’ कहते हैं ।

उदा. (i) एक सिक्का उछालना इस यादृच्छिक प्रयोग के दो ही ‘फल’ हैं ।

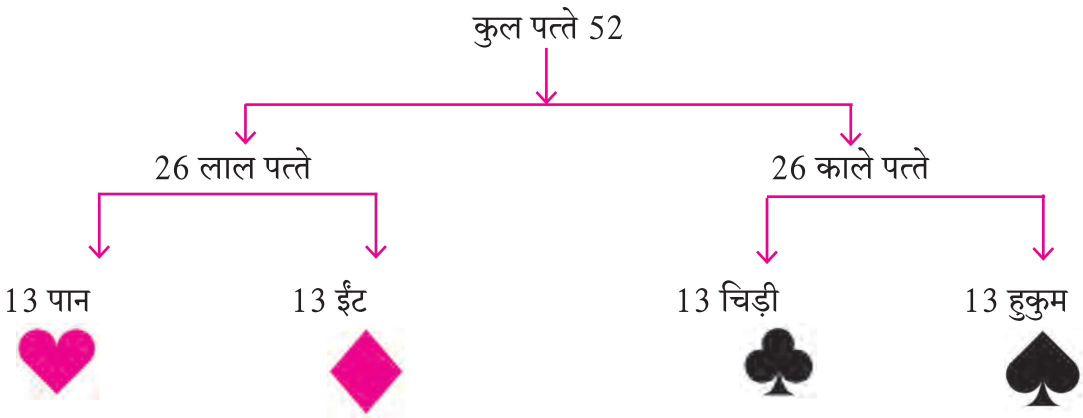
चित (H) या पट (T)

(ii) एक पाँसा फेंकना इस यादृच्छिक प्रयोग में 6 पृष्ठभागों पर रहने वाले बिंदुओं की संख्या से 6 फल संभव हैं ।

1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6

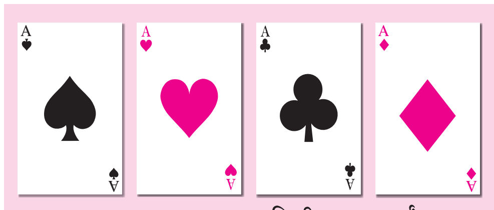
(iii) 1 से 50 अंक लिखे गए कार्ड की गड्डी में से 1 कार्ड निकालना इस प्रयोग में 50 फल संभव हैं ।

(iv) खेल के पत्तों को अच्छी तरह से फेंटकर ताश के पत्तों की गड्डी में से एक ताश का पत्ता खींचना इस यादृच्छिक प्रयोग में 52 पत्ते होते हैं, जिसे निम्नलिखित प्रकार से दर्शाया गया है ।



पत्तों के पैकेट में ईंट, पान, चिड़ी और हुकुम ऐसे चार समूह होते हैं । प्रत्येक समूह में राजा (k), रानी (Q), गुलाम (J) तथा 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 और इक्का ऐसे 13 पत्ते होते हैं ।

राजा, रानी, गुलाम इन्हें अंकित पत्ते (face cards) कहते हैं । प्रत्येक पैकेट में राजा के चित्रवाले चार, रानी के चित्र वाले चार, और गुलाम के चित्रों के चार ऐसे 12 चित्रयुक्त पत्ते होते हैं ।



हुकुम का इक्का   पान का इक्का   चिड़ी का इक्का   ईंट का इक्का

समान संभाव्यता फल (Equally Likely outcomes) :

यदि हमने एक पाँसा फेंका तो पाँसे के ऊपरी पृष्ठभाग पर 1, 2, 3, 4, 5, 6, इनमें से एक संख्या मिलने की संभावना समान होती है । अर्थात, 1 से 6 में से कोई भी एक संख्या ऊपरी पृष्ठभाग पर मिल सकती है । तथापि यदि पाँसा ऐसा हो जिसमें ऊपरी पृष्ठभाग पर कोई विशिष्ट अंक बार-बार आता है, तो पाँसा असंतुलित (biased) होता है । इस स्थिति में फल समान संभाव्य नहीं होते ।

इसमें आगे यादृच्छिक प्रयोग में उपयोग किए गए मुद्दे संतुलित (fair या unbiased) हैं, ऐसा हम मानने वाले हैं ।

दिए गए फलों में से कोई भी फल प्राधान्य क्रम से न मिले या सभी फलों की संभावना समान हो तो उस फल को समसंभाव्यता फल कहते है । उदा. यदि हमने एक सिक्का उछाला तो चित या पट प्राप्त होने की समान संभावना है । वैसे ही 1 से 6 अंक विभिन्न पृष्ठों पर हों ऐसा पाँसा फेकने पर उनमें से कोई भी एक अंक ऊपरी पृष्ठ पर प्राप्त होने की संभावना की जाँच करें । यहाँ सभी फल समान संभावना वाले हैं ।

प्रश्नसंग्रह 5.1

(1) निम्नलिखित प्रत्येक कथनों में कितनी संभावना (possibility)है ?

(i) वनिता को महाराष्ट्र के निम्नलिखित स्थलों की जानकारी है । उनमें से एक स्थान पर वह मई महीने की छुट्टी में जानेवाली है ।

अजंता, महाबलेश्वर, लोणार झील, ताडोबा अभयारण्य, आंबोली, रायगढ़, माथेरान, आनंदवन.

(ii) सप्ताह के एक दिन का यादृच्छिक पद्धति से चुनाव करना है ।

(iii) दिए गए चित्र में ताश के पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक पद्धति से चुनना है ।

(iv) प्रत्येक कार्ड पर एक संख्या 10 से 20 तक की इस प्रकार से लिखी गई है । उनमें से एक कार्ड यादृच्छिक पद्धति से चुनना है ।

थोड़ा सोचें

निम्नलिखित प्रयोगों में से कौन-से प्रयोगों में अपेक्षित फल मिलने की संभावना अधिक है ?

(1) 1 पाँसा फेंकने पर 1 मिलना ।

(2) एक सिक्का उछालने पर चित मिलना ।

आओ जानें

नमूना अवकाश (Sample Space)

यादृच्छिक प्रयोग में सभी संभाव्य फलों के समूह को नमूना अवकाश कहते हैं ।

नमूना अवकाश 'S' या 'Ω' (यह ग्रीक अक्षर में होने के कारण उच्चारण ओमेगा है ।) इस चिह्न को समूह के रूप में दर्शाया जाता है । नमूना अवकाश के प्रत्येक घटक को 'नमूना घटक' कहते हैं । नमूना अवकाश 'S' में कुल घटकों की संख्या n(S) से दर्शाई जाती है । यदि n(S) सांत हो तो उसे सांत नमूना अवकाश कहते हैं । सांत नमूना अवकाश के कुछ उदाहरण आगे तालिका में दर्शाए गए हैं ।

अ. क्र.	यादृच्छिक प्रयोग	नमूना अवकाश	घटनाओं के नमूना बिंदुओं की संख्या
1	एक सिक्का उछाला गया।	S = {H, T}	n(S) = 2
2	दो सिक्के उछाले गए।	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) =
3	तीन सिक्के उछाले गए।	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	एक पाँसा फेंका गया।	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) =
5	दो पाँसे फेंके गए।	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 से 25 संख्यावाले कार्डों की गड्डी में से एक कार्ड निकाला गया।	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) =
7	अच्छी तरीके से फेंटे हुए ताश की 52 पत्तों की गड्डी में से ताश का एक पत्ता खींचना।	ईंट : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा हुकुम : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा पान : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा चिड़ी : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा	n(S) = 52

इसे ध्यान में रखें

(i) एक सिक्का दो बार उछालना या दो सिक्के एक ही बार उछालना इन दोनों यादृच्छिक प्रयोग में नमूना अवकाश समान होता है। यह तीन सिक्कों के संदर्भ में भी सत्य होता है।

(ii) 'एक पाँसा दो बार फेंकना या दो पाँसे एक ही बार फेंकना' इन दोनों के लिए नमूना अवकाश समान होता है।

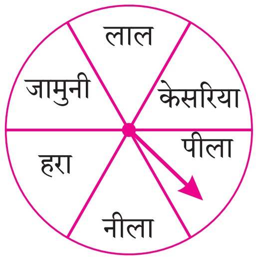
प्रश्नसंग्रह 5.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रयोग में, नमूना अवकाश S, तथा उनके नमूना घटकों की संख्या n(S) लिखिए।

(i) एक पाँसा तथा एक सिक्का एक ही समय में फेंकना।

(ii) 2, 3, 5 इन अंकों से अंकों की पुनरावृत्ति न करते हुए दो अंकोंवाली संख्या बनाना।

2. छह रंगोंवाली फिरकी को घुमाने पर उसका तीर कौन–से रंग पर स्थिर होगा देखें ।



MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

3. वर्ष 2019 के मार्च महिने में 5 के गुने में आनेवाली तारीखों का वार मिलना ।(संलग्न कॅलेंडर को देखें ।)

(4) दो लड़के (B_1, B_2) तथा दो लड़कियाँ (G_1, G_2) इनमें से दो लोगों की एक रास्ता सुरक्षा समिति बनाना है । नमूना अवकाश लिखने के लिए निम्नलिखित कृति पूरी कीजिए ।

(1) दो लड़कों की समिति = ☐ (2) दो लड़कियों की समिति = ☐

(3) एक लड़का और एक लड़की लेकर बनने वाली समिति = B_1G_1 ☐ ☐ ☐

(4) ∴ नमूना अवकाश = {..., ..., ..., ..., ..., ...}

आओ जानें

घटना (Event)

विशिष्ट शर्तों को पूरा करने वाले फल को अपेक्षित फल (favourable outcome) कहते हैं ।

नमूना अवकाश दिया गया हो तो अपेक्षित फल के समुच्चय को ‘घटना’ कहते हैं । घटना यह नमूना अवकाश का उपसमुच्चय होता है ।

घटना को अंग्रेजी के बड़े अक्षरों A, B, C, D..... द्वारा दर्शाते हैं ।

उदा. दो सिक्के एक साथ उछाले गए, माना कि घटना A कम से कम एक पट मिलने की है ।

यहाँ अपेक्षित फल निम्न प्रकार से हैं ।

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

घटना A में घटकों की संख्या n(A) से दर्शाई जाती है । यहाँ n(A) = 3

अधिक जानकारी के लिए **घटनाओं के प्रकार**

(i) निश्चित घटना (Certain event)
(ii) असंभव घटना (Impossible event)
(iii) एक घटक वाली घटना (Simple event)
(iv) पूरक घटना (Complement of an event)
(v) परस्पर असमावेशी घटना (Mutually exclusive event)
(vi) सर्वसमावेशी (परिपूर्ण) घटना (Exhaustive event)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) दो सिक्के एक साथ उछाले गए इस प्रयोग के लिए नमूना अवकाश 'S' लिखिए । उनके नमूना घटकों की संख्या n(S) लिखिए । इस प्रयोग से संबंधित निम्नलिखित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखकर नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) घटना A के लिए शर्त, कम से कम एक 'चित' मिलने की है ।

(ii) घटना B के लिए शर्त, एकही 'चित' मिलने की है ।

(iii) घटना C के लिए शर्त, अधिक-से-अधिक एक 'पट' मिलने की है ।

(iv) घटना D के लिए शर्त, 'चित' न मिलने की है ।

हल : जब दो सिक्के एक साथ उछाले गए तब,

S = {HH, HT, TH, TT}   n(S) = 4

(i) घटना A के लिए शर्त, कम-से-कम एक 'चित' मिलने की है ।

A = {HH, HT, TH}   n(A) = 3

(ii) घटना B के लिए शर्त, एक ही 'चित' मिलने की है ।

B = { HT, TH}   n(B) = 2

(iii) घटना C के लिए शर्त, अधिक-से-अधिक एक 'पट' मिलने की है ।

C = {HH, HT, TH}   n(C) = 3

(iv) घटना D के लिए शर्त, 'चित' न मिलने की है ।

D = {TT}   n(D) = 1

उदा. (2) किसी थैली में 1 से 50 अंक लिखे हुए 50 कार्ड हैं । इनमें से यादृच्छिक पद्धति से कोई भी एक पत्ता (कार्ड) निकाला गया हो तो नमूना अवकाश S लिखिए ।

घटना A, B तथा नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) घटना A के लिए शर्त इस प्रकार है कि, कार्ड पर होने वाली संख्या 6 से विभाज्य है ।

(ii) घटना B के लिए शर्त इस प्रकार है कि, कार्ड पर होने वाली संख्या पूर्ण वर्ग है ।

हल : नमूना अवकाश, S = {1, 2, 3, . . . 49, 50}   n(S) = 50

(i) घटना A के लिए शर्त इस प्रकार है कि, कार्ड पर होने वाली संख्या 6 से विभाज्य है ।

A = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48} n(A) = 8

(ii) घटना B के लिए शर्त इस प्रकार है कि कार्ड पर होने वाली संख्या पूर्ण वर्ग है ।

B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49} n(B) = 7

उदा. (3) 3 लड़के तथा 2 लड़कियों में से दो विद्यार्थियों की वृक्ष संवर्धन समिति निम्न शर्तों पर बनानी है । नमूना अवकाश S तथा नमूना घटकों की संख्या लिखिए । इसी प्रकार निम्नलिखित घटना समुच्चय रूप में लिखकर नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) घटना A के लिए शर्त समिति में कम से कम एक लड़की हो ।

(ii) घटना B के लिए शर्त समिति में 1 लड़का तथा 1 लड़की हो ।

(iii) घटना C के लिए शर्त समिति में सिर्फ लड़के ही हों ।

(iv) घटना D के लिए शर्त समिति में अधिक-से-अधिक एक लड़की हो ।

हल : माना B_1, B_2, B_3 यह तीन लड़के तथा G_1, G_1 दो लड़कियाँ हैं ।

दो सभासदों की संवर्धन समिति बनानी है ।

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(S) = 10$

(i) घटना A के लिए शर्त, समिति में कम से कम एक लड़की हो ।

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(A) = 7$

(ii) घटना B के लिए शर्त, समिति में 1 लड़का तथा 1 लड़की हो ।

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(B) = 6$

(iii) घटना C के लिए शर्त, समिति में सिर्फ लड़के ही हों ।

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$ $\quad n(C) = 3$

(iv) घटना D के लिए शर्त, समिति में अधिक से अधिक एक लड़की हो ।

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(D) = 9$

उदा. (4) दो पाँसे फेंके गए हों तो नमूना अवकाश 'S' तथा नमूना अवकाश के घटकों की संख्या n(S) लिखिए । निम्नलिखित शर्त पूरी करने वाली घटना समूह के रूप में लिखकर नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल अभाज्य संख्या है ।

(ii) ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 5 का गुणज है ।

(iii) ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 25 है ।

(iv) पहले पाँसे पर मिलने वाली संख्या दूसरे पाँसे पर मिलने वाली संख्या से छोटी है ।

हल : नमूना अवकाश,

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ $n(S) = 36$

(i) माना, E यह घटना, ऊपर के पृष्ठभाग पर संख्याओं का योगफल अभाज्य संख्या है ।

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$ $n(E) = 15$

(ii) F यह घटना, पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 25 के गुणज है ।

$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \}$ $n(F) = 7$

(iii) G यह घटना ऊपर के पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 25 है ।

$G = \{ \ \} = \phi$ $n(G) = 0$

(iv) H यह घटना पहले पाँसे के पृष्ठभाग पर स्थित संख्या दूसरे पाँसे के पृष्ठभाग पर होने वाली संख्या से कम होने के लिए शर्त है । $H = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)$
$(3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 6)\}$ $n(H) = 15$

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रयोग के लिए नमूना अवकाश 'S' उनके नमूना घटकों की संख्या n(S), समुच्चय की सहायता से घटनाएँ A, B, C और n(A), n(B) और n(C) लिखिए ।

(1) एक पाँसा उछालने पर,

घटना A के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या सम है ।

घटना B के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या विषम है ।

घटना C के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या अभाज्य है ।

(2) दो पाँसे फेकने पर,

घटना A के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभागों पर स्थित संख्याओं का योगफल 6 का गुणज है ।

घटना B के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठों पर आने वाली संख्याओं का योगफल कम से कम 10 है ।

घटना C के लिए शर्त, दोनों ऊपरी पृष्ठभागों पर आने वाली संख्या समान है ।

(3) तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर,

घटना A के लिए शर्त, कम से कम दो 'चित' प्राप्त हो इस प्रकार है ।

घटना B के लिए शर्त, 'चित' प्राप्त न हो, इस प्रकार है ।

घटना C के लिए शर्त, दूसरे सिक्के पर 'चित' प्राप्त हो, इस प्रकार है ।

(4) अंको की पुनरावृत्ति न करते हुए अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 की सहायता से दो अंकोंवाली संख्याएँ तैयार की गई हैं।

घटना A के लिए शर्त इसप्रकार है कि, वे संख्याएँ सम संख्या हो ।

घटना B के लिए शर्त इसप्रकार है कि, संख्या 3 से विभाजित है ।

घटना C के लिए शर्त इसप्रकार है कि, संख्या 50 से बड़ी है ।

(5) तीन पुरुष तथा दो स्त्रियों में से दो लोगों की 'पर्यावरण समिति' बनाना है ।

घटना A के लिए शर्त इसप्रकार है कि, उसमें कम-से-कम एक स्त्री समाविष्ट हो ।

घटना B के लिए शर्त इसप्रकार है कि, समिति में एक पुरुष तथा एक स्त्री समाविष्ट हो ।

घटना C के लिए शर्त इसप्रकार है कि, समिति में स्त्री समाविष्ट नहीं हो ।

(6) एक सिक्का तथा एक पाँसा एक साथ उछाला गया ।

घटना A के लिए शर्त इसप्रकार है कि, 'चित' तथा विषम संख्या मिले ।

घटना B के लिए शर्त इसप्रकार है कि, H या T प्राप्त हो और संख्या सम संख्या हो ।

घटना C के लिए शर्त इसप्रकार है कि, पाँसे पर 7 से बड़ी संख्या हो तथा सिक्के पर 'पट' मिले ।

आओ जानें

घटना की संभाव्यता (Probability of an event)

एक सरल प्रयोग पर विचार कीजिए । एक थैली में समान आकार की चार गेंदें हैं । उनमें से तीन गेंदें सफेद तथा चौथी गेंद काले रंग की है । आँखें बंद कर थैली में से एक गेंद निकालनी है, निकाली गई गेंद सफेद रंग की होने की संभावना अधिक है, यह आसानी से समझा जा सकता है ।

गणितीय भाषा में किसी एक अपेक्षित घटना की संभावना दर्शाने वाली संख्या को ही संभाव्यता कहा जाता है । इसे दिए गए सूत्र का उपयोग कर संख्या में या प्रतिशत में दर्शाते हैं ।

किसी यादृच्छिक प्रयोग के लिए नमूना अवकाश S हो और A प्रयोग संबंधी अपेक्षित घटना हो तब उस घटना A की संभाव्यता 'P(A)' इस प्रकार दर्शाते हैं तथा निम्न सूत्रों से निश्चित करते हैं ।

$$P(A) = \frac{\text{घटना 'A' के नमूना घटकों की संख्या}}{\text{नमूना अवकाश के कुल घटकों की संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ऊपर्युक्त प्रयोग में 'निकाली गई गेंद सफेद हो' यह घटना A है। तो n(A) = 3 क्योंकि सफेद गेंदें तीन है और कुल गेंद चार हैं अर्थात n(S) = 4

निकाली गई गेंद सफेद हो इसकी संभाव्यता $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

इसी प्रकार 'निकाली गई गेंद काली हो' यह घटना B हो तो, n(B) = 1 $\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) एक सिक्का उछालने पर निम्नलिखित घटना की संभाव्यता ज्ञात कीजिए।

(i) चित मिलना (ii) पट मिलना

हल : माना नमूना अवकाश 'S' है।

$S = \{H, T\}$ $\therefore n(S) = 2$

(i) माना घटना A के लिए शर्त ऊपरी पृष्ठभाग पर चित मिलने की है।

$A = \{H\}$ $n(A) = 1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ $P(A) = \frac{1}{2}$

(ii) माना घटना B के लिए शर्त ऊपरी पृष्ठभाग पर पट मिलने की है।

$B = \{T\}$ $n(B) = 1$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

उदा. (2) एक पाँसा फेकने पर निम्नलिखित प्रत्येक शर्त पूर्ण करने वाली घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए।

(i) ऊपरी पृष्ठभाग पर अभाज्य संख्या मिलना। (ii) ऊपरी पृष्ठभाग पर सम संख्या मिलना।

हल : माना नमूना अवकाश 'S' है।

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $n(S) = 6$

(i) घटना A : ऊपरी पृष्ठभाग पर अभाज्य संख्या मिलना।

$A = \{2, 3, 5\}$ $n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$P(A) = \frac{3}{6}$ $P(A) = \frac{1}{2}$

(ii) घटना B : ऊपरी पृष्ठभाग पर सम संख्या मिलना ।

$B = \{2, 4, 6\}$ $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उदा. (3) अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया हो तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) लाल पत्ता होने की (ii) वह पत्ता चित्रयुक्त होने की, संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

हल : माना, नमूना अवकाश 'S' है । $\therefore n(S) = 52$

(i) घटना A : निकाला गया पत्ता लाल होने की संभावना –

कुल लाल पत्ते = 13 ईंट के पत्ते + 13 पान के पत्ते

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) घटना B : निकाला गया पत्ता चित्रयुक्त होने की संभावना –

गुलाम, रानी तथा राजा चित्रयुक्त पत्ते हैं । कुल चित्रयुक्त पत्ते 12 हैं $\therefore n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

उदा. (4) एक डिब्बे में 5 स्ट्रॉबेरी, 6 कॉफी तथा 2 पिपरमिंट के चॉकलेट हैं । उस डिब्बे में से एक चॉकलेट निकालने पर (i) निकाली गई चॉकलेट कॉफी होने की संभावना (ii) निकाली गई चॉकलेट पिपरमिंट होने की संभावना ज्ञात कीजिए ।

हल : माना नमूना अवकाश 'S' है । $\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

घटना A : निकाली गई चॉकलेट कॉफी की होने की संभावना

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

घटना B : निकाली गई चॉकलेट पिपरमिंट की होने की संभावना

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

इसे ध्यान में रखें

- संभाव्यता बताते समय या लिखते समय अपूर्णांक का या प्रतिशत का उपयोग किया जाता है ।
- किसी घटना की संभाव्यता 0 से 1 या 0% से 100% होती है ।

  माना घटना E हो तो $0 \le P(E) \le 1$ या $0\ \% \le P(E) \le 100\ \%$ उदा. $\frac{1}{4}$ यह संभाव्यता 25 % ऐसा लिखते है ।
- प्रकरण के आरंभ में कक्षा के विद्यार्थियों को वनस्पतियों के नाम की पर्ची निकालने को कहा गया था । उस समय तुलसी नाम की पर्ची विद्यार्थियों को मिलने की संभावना पर विचार किया गया । एक ही पर्ची पर तुलसी यह नाम है । यदि 40 विद्यार्थी द्वारा प्रत्येक एक पर्ची निकाली गई होती तो प्रत्येक को तुलसी इस नाम की पर्ची मिलने की संभाव्यता $\frac{1}{40}$ होती । पहले या बीच में कोई भी विद्यार्थी या अंत में पर्ची निकालने वाले को वह पर्ची मिलने की संभाव्यता उतनी ही होगी ।

प्रश्नसंग्रह 5.4

1. दो सिक्के को उछालने पर निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) कम-से-कम एक चित मिलना । (ii) एक भी चित न मिलना ।

2. दो पाँसे एक ही समय फेंकने पर निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) पृष्ठभागों पर आने वाली संख्याओं का योगफल कम-से-कम 10 है ।

   (ii) पृष्ठभागों पर आने वाली संख्याओं का योगफल 33 है ।

   (iii) पहले पाँसे के ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या दूसरे पाँसे की ऊपरी पृष्ठभाग पर आनेवाली संख्या से बड़ी हो ।

3. एक बक्से में 15 टिकट हैं । प्रत्येक टिकट पर 1 से 15 में से एक संख्या लिखी गई है । उस बक्से में एक टिकट यादृच्छिक पद्धति से निकाली गई हो तो टिकट पर की संख्या –

   (i) सम संख्या हो (ii) संख्या 5 की गुणज हो । इन घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

4. अंकों की पुनरावृत्ति न करते हुए 2, 3, 5, 7, 9 अंकों से दो अंकों वाली संख्या बनायी गई हो तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) वह संख्या विषम हो । (ii) वह संख्याएँ 5 की गुणज हो ।

5. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों में से एक पता निकाला गया तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) इक्का मिलना (ii) हुकुम का पता मिलना ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह – 5

1. नीचे दिए गए बहु वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरो में से सही विकल्प चुनिए ।

(1) निम्नलिखित विकल्प में से कौन–सी संभाव्यता नहीं हो सकती ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) एक पाँसा फेकने पर ऊपरी पृष्ठभाग पर 3 से कम संख्या आने की संभाव्यता . . . होती है ।

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 से 100 में से चुनी गई संख्या के अभाज्य संख्या होने की संभाव्यता . . . होगी ।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

(4) प्रत्येक कार्ड पर एक संख्या इस प्रकार 1 से 40 यह संख्या लिखी गई है । 40 कार्ड थैली में हैं । इनमे से एक कार्ड निकाला गया उस कार्ड की संख्या 5 के गुणज में रहने की संभाव्यता . . . होगी ।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(5) यदि $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$ तब $n(s) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. बास्केटबाल के खिलाड़ी जॉन, वासिम और आकाश एक निश्चित जगह बास्केटबाल डालने का अभ्यास कर रहे थे । बास्केटबाल डालने की जॉन की संभाव्यता $\frac{4}{5}$, वसिम की 0.83 तथा आकाश की 58% है । किसकी संभाव्यता अधिक है ?

3. एक हॉकी टीम में 6 बचाव करने वाले 4 आक्रमक तथा एक गोलरक्षक ऐसे खिलाड़ी हैं । यादृच्छिक पद्धति से इनमें से एक खिलाड़ी का कप्तान के रूप में चुनाव करना है । तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) गोलरक्षक का कप्तान होना (ii) बचाव करने वाले खिलाड़ी का कप्तान होना

4. जोसेफ ने एक थैली में प्रत्येक कार्ड पर अंग्रेजी वर्णमाला का एक अक्षर इस प्रकार कुल 26 अक्षरों के कार्ड रखे हैं । उनमें से अक्षरों का एक कार्ड यादृच्छिक पद्धति से निकालना हो तो निकाले गए कार्ड का स्वर होने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

5. एक गुब्बारेवाले के पास 2 लाल, 3 नीला और 4 हरा ऐसे रंगीन गुब्बारों में से एक गुब्बारे को यादृच्छिक पद्धति से देना है तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) प्राप्त गुब्बारे का लाल होना

(ii) प्राप्त गुब्बारे का नीला होना

(iii) प्राप्त गुब्बारे का हरा होना

6. एक बक्से में 5 लाल पेन, 8 नीली पेन और 3 हरी पेन है । यादृच्छिक पद्धति से ऋतुजा को एक पेन निकालना है । तो उस पेन के नीला होने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

7. एक पाँसे के छह पृष्ठभाग निम्न प्रकार से हैं ।

A	B	C	D	E	A

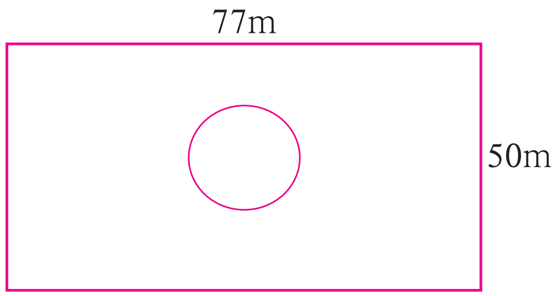
यह पाँसा एक बार फेंकने पर दी गई घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) ऊपरी पृष्ठभाग पर 'A' मिलना । (ii) ऊपरी पृष्ठभाग पर 'D' मिलना ।

8. किसी बक्से में 30 टिकट हैं । प्रत्येक टिकट पर 1 से 30 में से एक ही संख्या लिखी गई है । इसमें से कोई एक टिकट यादृच्छिक पद्धति से निकाला गया तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) टिकट पर विषम संख्या मिलने पर । (ii) टिकट पर पूर्ण वर्गसंख्या मिलने पर ।

9. किसी बगीचे की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 77 मी. तथा 50 मी. है । बगीचे में 14 मी. व्यास वाला तालाब है । बगीचे के पास की इमारत की छत पर सुखाने के लिए रखा गया तौलिया हवा से उड़कर बगीचे में गिरा । तो उसके बगीचे के तालाब में गिरने की संभावना ज्ञात कीजिए ।



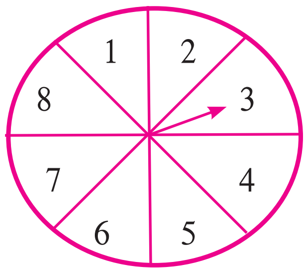
10. संयोग के खेल में 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 में से किसी एक अंक पर तीर स्थिर होता है और यह समसंभाव्यता का फल है । तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(1) वह तीर 8 अंक पर स्थिर होगा ।

(2) वह तीर विषम अंक पर स्थिर होगा ।

(3) तीर से दर्शाई गई संख्या 2 से बड़ी होगी ।

(4) तीर से दर्शाई गई संख्या 9 से छोटी होगी ।



11. प्रत्येक कार्डपर एक इस प्रकार से 0 से 5 यह पूर्णांक संख्याएँ लिखकर बने छह कार्ड बक्से में रखे गए हैं । निम्नलिखित प्रत्येक घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) निकाले गए कार्ड की संख्या प्राकृत संख्या हो ।

(ii) निकाले गए कार्ड की संख्या 1 से छोटी हो ।

(iii)निकाले गए कार्ड की संख्या पूर्ण संख्या हो ।

(iv) निकाले गए कार्ड की संख्या 5 से बड़ी हो ।

12. किसी बैग में तीन लाल, तीन सफेद, तथा तीन हरी गेंदें हैं । बैग में से यादृच्छिक पद्धति से एक गेंद निकाली गई हो । तो निम्नलिखित प्रत्येक घटना की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) निकाली गई गेंद का लाल होना । (ii) निकाली गई गेंद लाल रंग की न होना ।

(iii) निकाली गई गेंद का लाल या सफेद होना ।

13. प्रत्येक कार्डपर एक इस प्रकार 'mathematics' शब्द के अक्षरों को लिखकर वह कार्ड टेबल पर उलटकर रखा गया । इनमें से एक अक्षर उठाने पर उस अक्षर के 'm' होने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

14. किसी विद्यालय के 200 विद्यार्थियों में से 135 विद्यार्थी कबड्डी का खेल पसंद करते हैं तथा अन्य को यह खेल पसंद नहीं है । सभी विद्यार्थियों में से 1 विद्यार्थी को चुना गया तो उसके कबड्डी खेल पसंद न करने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

15.★ 0, 1, 2, 3, 4 इन अंकों की सहायता से दो अंकोंवाली संख्या बनानी है । अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती हो तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) वह संख्या अभाज्य संख्या होगी । (ii) वह संख्या 4 की गुणज होगी

(iii) वह संख्या 11 की गुणज होगी ।

16.★ किसी पाँसे के पृष्ठभाग पर 0, 1, 2, 3, 4, 5 यह अंक हैं । इस पाँसे को दो बार फेंकने पर ऊपरी पृष्ठभाग पर मिलने वाले अंकों का गुणनफल शून्य होने की संभाव्यता ज्ञात करें ।

17. निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

कृति I : आपके कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या n(S) = [ ]

कक्षा में चश्मा लगाने वाले विद्यार्थियों की संख्या n(A) = [ ]

सभी विद्यार्थियों में से चश्मा लगाने वाले एक विद्यार्थी के यादृच्छिक पद्धति से चुने जाने की संभावना

P(B) = [ ]

कृति II : नमूना अवकाश स्वयं निश्चित करके निम्नलिखित चौखट भरें ।

नमूना अवकाश → S = { } → n(S) = [ ]

घटना A के लिए शर्त है कि संख्या 'सम' हो । → A = { } → n(A) = [ ]

$P(A) = \frac{[\ ]}{[\ ]} = [\ ]$