5 احتمال (Probability)

آیئے، سیکھیں۔

- احتمال : تعارف
- بے ترتیب تجربات اور ماحصل
- نمونہ وسعت اور وقوعہ
- وقوعہ کا احتمال

آیئے، بحث کریں۔

استاد : عزیز طلبہ! اپنی جماعت میں طلبہ کی تعداد کے مساوی چٹھیاں اس بکس میں رکھی ہوئی ہیں۔ ہر ایک طالب علم کو ایک چٹھی اُٹھانی ہے۔ چٹھیوں پر الگ الگ پودوں کے نام لکھے ہوئے ہیں۔ ایک ہی پودے کا نام کوئی بھی دو چٹھیوں پر نہیں ہے۔ آیئے، دیکھیں تلسی نام کے پودے کی چٹھی کسے ملتی ہے؟ تمام طلبہ رول نمبر کی ترتیب سے قطار میں کھڑے ہو جائیں۔ آخری چٹھی اُٹھانے تک کوئی بھی چٹھی کھول کر نہ دیکھے۔

اریبہ : سر، قطار میں مَیں پہلی ہی ہوں لیکن میں پہلے چٹھی نہیں اُٹھاؤں گی کیونکہ اتنی تمام چٹھیوں میں سے وہ چٹھی مجھے ہی ملے گی اس کا امکان بہت کم ہے۔

زرینہ : سر، قطار میں سب سے آخر میں مَیں ہوں، میں آخر میں چٹھی نہیں نکالوں گی کیونکہ تلسی نام کی چٹھی شاید میرے اُٹھانے سے قبل ہی اُٹھالی گئی ہوگی۔

مختصراً پہلے اور آخری طالب علم کو محسوس ہوتا ہے کہ انھیں تلسی نام والی چٹھی ملنے کا امکان بہت ہی کم ہے۔ مذکورہ بالا مکالمے میں امکان کم یا زیادہ ہونے پر غور ہوا ہے۔ ہم روزمرہ گفتگو میں امکان کے لیے ذیل کے الفاظ استعمال کرتے ہیں۔

- احتمال
- غالباً
- ناممکن
- یقیناً
- قریب قریب
- 50 - 50

مستقبل میں امکانات سے متعلق ذیل کے بیان دیکھیے۔

- غالباً آج بارش ہوگی۔
- مہنگائی میں اضافے کا امکان زیادہ ہے۔
- بھارت کو آئندہ کرکٹ کے مقابلے میں شکست دینا ناممکن ہے۔
- یقیناً مجھے پہلا درجہ ملے گا۔
- بچے کو وقت پر پولیو ڈوز دیں تو اس کو پولیو ہونے کا امکان نہیں ہوتا۔

یہاں دی ہوئی تصویر میں کرکٹ کے کھلاڑی سکّہ اُچھال رہے ہیں۔اس میں کون کون سے امکانات ہیں؟

☐ یا ☐

یعنی،سکہ اُچھالنے کے ☐ امکانات ہیں۔

عملی کام 1: جماعت کا ہر طالب علم ایک سکہ صرف ایک مرتبہ اُچھال کر دیکھے۔آپ کو کیا محسوس ہوتا ہے؟
(استاد تختۂ سیاہ پر درج ذیل جدول بناتے ہیں اور اسے پُر کرواتے ہیں؟)

پٹ(T)	چت(H)	امکانات
. . .	. . .	طلبہ کی تعداد

عملی کام 2: اب ہر طالب علم ایک سکہ دو مرتبہ اُچھال کر دیکھے۔کون کون سے امکانات ہیں؟

TT	TH	HT	HH	امکانات
				طلبہ کی تعداد

عملی کام 3: آپ کے پاس کے پانسہ کو ایک دفعہ پھینکیے۔اوپری رُخ پر نقطے آنے کے کون کون سے امکانات ہیں،اس پر غور کیجیے۔

یہاں ہر امکان یعنی پانسہ پھینکنے کا ممکنہ احتمال نتیجہ صرف ایک ہے۔

آیئے،سمجھ لیں۔

بے ترتیب تجربات (Random Experiment)

جس تجربے میں تمام احتمالی نتائج پہلے ہی سے معلوم ہوتے ہیں لیکن ان میں سے کسی بھی نتیجے کو یقینی طور پر بتایا نہیں جاسکتا۔تمام نتائج کے صحیح ہونے کا امکان مساوی ہوتا ہے،ایسے تجربے کو' بے ترتیب تجربہ' کہتے ہیں۔

مثال : سکّہ اُچھالنا، پانسہ پھینکنا، 1 سے 50 تک عدد لکھے ہوئے کارڈ کے سیٹ سے ایک کارڈ نکالنا،کھیل میں تاش کے پتوں کو مناسب طریقے سے خلط ملط کر کے پتوں میں سے ایک پتہ نکالنا وغیرہ۔

ماحصل (Outcomes)

بے ترتیب تجربہ کے نتائج کو 'ماحصل' کہتے ہیں۔

مثال (1) ایک سکہ اُچھالنے کے بے ترتیب تجربے کے دو ہی ماحصل ہوتے ہیں۔

چت (H) یا پٹ (T)

(2) ایک پانسہ پھینکنے کے بے ترتیب تجربہ میں پانسہ کے اوپری رُخوں پر دھبوں کی تعداد سے 6 ماحصل ممکن ہیں۔

1 یا 2 یا 3 یا 4 یا 5 یا 6

(3) 1 سے 50 تک اعداد لکھے ہوئے کارڈ کے سیٹ سے ایک کارڈ نکالنا، اس تجربے میں 50 ماحصل ممکن ہیں۔

(4) تاش کے کھیل میں پتوں کو مناسب طریقے سے خلط ملط کر کے ایک پتہ نکالنے کے بے ترتیب تجربے میں 52 ماحصل ہوتے ہیں۔ تاش کی گڈی میں 52 پتے ہوتے ہیں۔ وہ درج ذیل کے مطابق ہیں۔

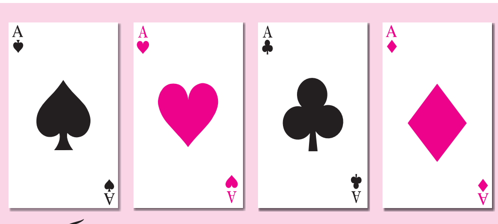
کل پتے 52

26 سیاہ پتے — 26 سرخ پتے

13 حکم کے پتے — 13 چڑیا کے پتے — 13 اینٹ کے پتے — 13 پان کے پتے

پتوں کی گڈی میں ایک اینٹ (Diamond)، پان (Heart)، چڑیا (Club) اور حکم (Spade) کے چار قبیل (suit) ہوتے ہیں۔ ہر سیٹ میں بادشاہ، رانی، غلام، 10، 9، 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2 اور اِکا (A) اس طرح 13 پتے ہوتے ہیں۔

بادشاہ، رانی، غلام انھیں تصویری پتے کہتے ہیں۔ ہر گڈی میں بادشاہ کے چار، رانی کے چار اور غلام کے چار، اس طرح کل 12 تصویری پتے ہوتے ہیں۔



حکم اِکّا — پان اِکّا — چڑیا اِکّا — اینٹ اِکّا

مساوی ممکنہ حاصلات (Equally Likely Outcomes)

اگر ہم ایک پانسہ پھینکیں تو پانسے کے اوپری رُخ پر 1، 2، 3، 4، 5، 6 اِن میں سے کوئی ایک عدد حاصل ہونے کا امکان مساوی ہوتا ہے۔ لہٰذا 1 سے 6 میں سے کوئی بھی ایک عدد اوپری رُخ پر حاصل ہوسکتا ہے۔ پھر بھی اگر پانسہ ایسا بنا ہو کہ کوئی خاص عدد ہی اوپری رُخ پر بار بار حاصل ہوتا ہے تو وہ پانسہ نقص والا (biased) ہوتا ہے۔ ایسی حالت میں ماحصل مساوی ممکنہ واقع نہیں ہوتے۔ آئندہ ہم بے ترتیب تجربات میں استعمال ہونے والے بے عیب، نقائص سے پاک (unbiased یا fair) پانسہ تصور کریں گے۔

دیے ہوئے حاصلات میں سے کوئی بھی ماحصل اولیت کی ترتیب میں حاصل نہیں ہوتا ہو یا تمام حاصلات مساوی ممکنہ ہوں تو وہ احتمالی ماحصل ہوتے ہیں۔مثال: اگر ہم ایک سکہ اُچھالیں تو پٹ یا چت حاصل ہونے کے مساوی ممکنہ حاصلات ہوتے ہیں۔اسی طرح 1 سے 6 عدد مختلف رُخوں پر ہونے کی وجہ سے پانسہ پھینکنے پر اس میں کوئی بھی ایک عدد اوپری رُخ پر آنے کے ممکنات کی جانچ کیجیے۔ یہاں تمام حاصلات کے مساوی احتمال ہیں۔

مشقی سیٹ 5.1

1. ذیل کے تجربات میں ہر ایک سے متعلق کتنے امکانات ہیں؟

(1) وِنیتا کو مہاراشٹر میں ذیل کے قابل دید مقامات کی معلومات ہے۔اس میں سے ایک مقام پر مئی مہینے کی تعطیل میں وہ جانے والی ہے۔اجنتا، مہابلیشور، لونار جھیل، تڑوبا چڑیا گھر، آمبولی، رائے گڑھ، ماتھیران، آنندوَن۔

(2) ایک ہفتے کے دنوں کو بے ترتیب تجربہ کے طریقے سے منتخب کرنا ہے۔

(3) تاش کی گڈی سے ایک پتہ بے ترتیب تجربے کے طریقے سے نکالنا ہے۔

(4) ہر کارڈ پر ایک عدد، اس طرح 10 سے 20 تک اعداد لکھے ہوئے ہیں۔اس میں سے ایک کارڈ بے ترتیب تجربے سے نکالنا ہے۔

آیئے، غور کریں۔

ذیل کے تجربات میں سے کون سے تجربے میں ماحصل کے امکانات زیادہ ہیں؟

(1) ایک پانسہ پھینکنے پر (اوپری رُخ پر) عدد 1 حاصل ہونا۔

(2) ایک سکہ اُچھال کر چت حاصل ہونا۔

آیئے، سمجھ لیں۔

نمونہ وسعت (Sample Space)

بے ترتیب تجربے کے تمام ممکنہ حاصلات کے سیٹ کو نمونہ وسعت کہتے ہیں۔نمونہ وسعت 'S' یا ' Ω ' (Ω یونانی حرف ہے، اس کا تلفظ 'اومیگا' ہے۔) اِن علامتوں سے سیٹ کی نوعیت کو ظاہر کرتے ہیں۔نمونہ وسعت میں ہر رکن کو 'نمونہ نقطہ' (Sample Point) کہتے ہیں۔نمونہ وسعت 'S' میں کل ارکان کی تعداد n (S) سے ظاہر کرتے ہیں۔اگر n (S) محدود ہو تو اس کو محدود نمونہ وسعت کہتے ہیں۔ محدود نمونہ وسعت کی بعض مثالیں ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہیں۔

نمبر شمار	بے ترتیب تجربہ	نمونہ وسعت	نمونہ نقاط (ارکان) کی تعداد
1	ایک سکہ اُچھالنا	S = {H, T}	n(S) = 2
2	دو سکے اُچھالنا	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) = ☐
3	تین سکے اُچھالنا	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	ایک پانسہ پھینکنا	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) = ☐
5	2 پانسے پھینکنا	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 سے 25 اعداد لکھے ہوئے کارڈوں کے سیٹ سے ایک کارڈ نکالنا	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) = ☐
7	مناسب طریقے سے خلط ملط کیے گئے تاش کے 52 پتوں سے ایک پتہ نکالنا	اینٹ = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, غلام, رانی, بادشاہ حکم = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, غلام, رانی, بادشاہ پان = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, غلام, رانی, بادشاہ چڑیا = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, غلام, رانی, بادشاہ	n(S) = 52

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) ایک سکہ دو مرتبہ اُچھالیں یا دو سکے ایک مرتبہ اُچھالیں، اِن دونوں بے ترتیب تجربات کا نمونہ وسعت ایک جیسا ہے۔ یہی تین سکوں کے بارے میں بھی صحیح ہے۔

(2) 'ایک پانسہ دو دفعہ پھینکنا' یا 'دو پانسے بیک وقت پھینکنا' اِن دونوں کے لیے نمونہ وسعت یکساں ہے۔

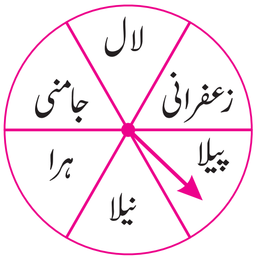
مشقی سیٹ 5.2

.1 ذیل میں سے ہر ایک تجربات کے لیے نمونہ وسعت 'S' اور اس کے نمونہ نقاط کی تعداد n (S) لکھیے۔

(1) بیک وقت ایک پانسہ اُچھالنا اور ایک سکہ پھینکنا

(2) 2، 3، 5 اِن ہندسوں سے، ہندسوں کے دہرائے بغیر دو ہندسی عدد بنانا۔

.2 چھے رنگوں کی پھرکی پر تیر گھمانے پر وہ کس رنگ پر ٹھہرتی ہے، اس کا مشاہدہ کیجیے۔



.3 سال 2019ء کے مارچ کے مہینے میں 5 کے ضعف میں آنے والی تاریخوں کا دن حاصل کرنا (بازو میں دیے ہوئے کیلنڈر کا صفحہ دیکھیے۔)

MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

.4 2 لڑکے (B_1, B_2) اور دو لڑکیاں (G_1, G_2) ان میں سے دو رُکنی محافظِ راہ کمیٹی بنانا ہے تو اس کے لیے نمونہ وسعت لکھنے کے لیے درج ذیل عملی کام پورا کیجیے۔

(1) دو لڑکوں کی کمیٹی = ☐ (2) دو لڑکیوں کی کمیٹی = ☐

(3) ایک لڑکا اور ایک لڑکی سے مل کر بننے والی کمیٹی = B_1, G_1 ☐ ☐ ☐

∴ نمونہ وسعت = { ( ), ( ), ( ), ( ), ( ), ( ) }

آیئے، سمجھ لیں۔

وقوعہ (Event)

مخصوص شرط پورا کرنے والے حاصلات کو موافق ماحصل (favourable outcome) کہتے ہیں۔

نمونہ وسعت دیا ہوا ہو تو موافق حاصلات کے سیٹ کو 'وقوعہ' کہتے ہیں۔ وقوعہ، نمونہ وسعت کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

وقوعہ کو انگریزی بڑے حروف A، B، C، D جیسے حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال : دو سکے اُچھالیں تو، فرض کیجیے وقوعہ A ، کم سے کم ایک پٹ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں موافق ماحصل ذیل کے مطابق ہے۔

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

وقوعہ A میں نمونہ نقاط (ارکان) کی تعداد کو n (A) سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں n (A) = 3

مزید معلومات کے لیے	وقوعوں کی اقسام
(i) یقینی وقوعہ (Certain event)	(iv) ایک وقوعے کا مکملہ (Complement of an event)
(ii) ناممکن وقوعہ (Impossible event)	(v) باہم غیر مشمولی وقوعہ (Mutually exclusive event)
(iii) یک رکنی وقوعہ (Simple event)	(vi) جامع وقوعہ (Exhaustive event)

حل کردہ مثالیں

مثال(1) دو سکے بیک وقت اُچھالنے کے تجربہ کے لیے نمونہ وسعت 'S' لکھیے۔ اس میں نمونہ نقاط کی تعداد n (S) لکھیے۔ اس تجربہ سے متعلق درج ذیل وقوعہ کو سیٹ کی صورت میں لکھیے اور اس کے نمونہ نقاط معلوم کیجیے۔

(i) وقوعہ A کے لیے شرط، کم سے کم ایک چت حاصل ہو۔

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، صرف ایک چت حاصل ہو۔

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط، زیادہ سے زیادہ ایک پٹ حاصل ہو۔

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

حل : دو سکے بیک وقت اُچھالے گئے،

$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad , \quad n(S) = 4$

(i) وقوعہ A کے لیے شرط، کم سے کم ایک چت حاصل ہو۔

$A = \{HH, HT, TH\} \quad , \quad n(A) = 3$

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، صرف ایک چت حاصل ہو۔

$B = \{ HT, TH\} \quad , \quad n(B) = 2$

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط، زیادہ سے زیادہ ایک پٹ حاصل ہو۔

$C = \{HH, HT, TH\} \quad , \quad n(C) = 3$

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

$D = \{TT\} \; , \; n(D) = 1$

مثال(2) ایک تھیلی میں 50 کارڈ ہیں۔ ہر کارڈ پر 1 سے 50 میں سے ایک عدد لکھا ہوا ہے۔ اس میں سے کوئی بھی ایک کارڈ بے ترتیب تجربے سے نکالا گیا تو نمونہ وسعت 'S' لکھیے۔

وقوعہ A ، B کے نمونہ نقاط (ارکان) کی تعداد لکھیے۔

(i) وقوعہ A کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد 6 سے تقسیم پذیر ہے۔

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد کامل مربع عدد ہے۔

حل : نمونہ وسعت 'S' ہے : $n(S) = 50 \quad , \quad S = \{1, 2, 3, . . ., 49, 50\}$

وقوعہ A کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد 6 سے تقسیم پذیر ہے۔

$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}, \quad n(A) = 8$

وقوعہ B کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد کامل مربع عدد ہے۔

$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}, \quad n(B) = 7$

مثال(3) 3 لڑکے اور 2 لڑکیوں سے دو طلبہ پر مشتمل شجرکاری مہم کی کمیٹی ذیل کی شرط کے مطابق بنانا ہے۔نمونہ وسعت 'S' اور نمونہ نقاط کی تعداد لکھیے ۔اسی طرح درج ذیل کو سیٹ کی صورت میں لکھ کر نمونہ نقاط کی تعداد لکھیے ۔

(i) وقوعہ A کے لیے شرط ، کمیٹی میں کم سے کم ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، کمیٹی میں ایک لڑکا اور ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط، کمیٹی میں صرف لڑکے ہونے چاہیے۔

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، کمیٹی میں زیادہ سے زیادہ ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

حل : فرض کیجیے، B_1 ، B_2 ، B_3 تین لڑکے ہیں اور G_1 ، G_2 دو لڑکیاں ہیں۔ان لڑکے لڑکیوں سے دو ممبران کی شجرکاری مہم کی کمیٹی بنانا ہے۔

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$, $n(S) = 10$

(i) وقوعہ A کے لیے شرط ، کمیٹی میں کم سے کم ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$, $n(A) = 7$

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، کمیٹی میں ایک لڑکا اور ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$, $n(B) = 6$

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط، کمیٹی میں صرف لڑکے ہونے چاہیے۔

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$, $n(C) = 3$

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، کمیٹی میں زیادہ سے زیادہ ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$, $n(D) = 9$

مثال(4) دو پانسے پھینکے گئے تو نمونہ وسعت 'S' اور نمونہ وسعت میں ارکان کی تعداد $n(S)$ لکھیے ۔

درج ذیل شرائط پوری کرنے والے وقوعہ کو سیٹ کی صورت میں لکھیے اور ان کے نمونہ نقاط کی تعداد لکھیے ۔

(i) اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کی جمع مفرد عدد ہو۔

(ii) اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کی جمع 5 کے ضعف میں ہو۔

(iii) اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کی جمع 25 ہو۔

(iv) پہلے پانسے پر ملنے والا عدد، دوسرے پانسے پر کے عدد سے چھوٹا ہو۔

حل : نمونہ وسعت

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$
$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$
$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$$
$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \quad , \quad n(S) = 36$$

(i) فرض کیجیے E ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ مفرد عدد ہے۔

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$$
$$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \quad , \quad n(E) = 15$$

(ii) فرض کیجیے F ایسا وقوعہ ہے جس کے اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ 5 کا ضعف ہے۔

$$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \} \ , \ n(F) = 7$$

(iii) فرض کیجیے G ایسا وقوعہ ہے کہ اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ 25 ہے۔

$$G = \{ \ \} = \phi \quad , \quad n(G) = 0$$

(iv) فرض کیجیے H ایسا وقوعہ ہے کہ پہلے پانسے پر آنے والا عدد، دوسرے پانسے پر آنے والے عدد سے چھوٹا ہے۔

$$H = \{(1, 2)\ (1, 3)\ (1, 4)\ (1, 5)\ (1, 6)\ (2, 3)\ (2, 4)\ (2, 5)\ (2, 6)$$
$$(3, 4)\ (3, 5)\ (3, 6)\ (4, 5)\ (4, 6)\ (5, 6)\} \quad , \quad n(H) = 15$$

مشقی سیٹ 5.3

1. مندرجہ ذیل تجربات میں نمونہ وسعت 'S' کے ارکان کی تعداد n(S) اسی طرح وقوعہ C ، B ، A سیٹ کی صورت میں لکھیے اور n(A)، n(B) اور n(C) لکھیے۔

(1) ایک پانسہ پھینکا گیا ہے

A ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر آنے والا عدد جفت ہے۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر آنے والا عدد طاق ہے۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر آنے والا عدد مفرد ہے۔

(2) دو پانسے ایک ہی وقت میں پھینکے گئے،

A ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ 6 کا ضعف ہے۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ کم از کم 10 ہے۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے عدد یکساں ہیں۔

(3) تین سکے بیک وقت اُچھالے گئے۔

A ایسا وقوعہ ہے جس میں کم از کم دو چِت حاصل ہوں۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں ایک بھی چِت حاصل نہ ہو۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں دوسرے سکے پر چِت حاصل ہو۔

(4) 0, 1, 2, 3, 4, 5 ہندسوں کی مدد سے کسی بھی ہندسے کو دہرائے بغیر دو ہندسی عدد بنایا گیا ہے۔

A ایسا وقوعہ ہے جس میں حاصل ہونے والا عدد جفت ہے۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں حاصل ہونے والا عدد 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں حاصل ہونے والا عدد 50 سے بڑا ہے۔

(5) تین مرد اور دو خواتین ہیں۔ ان کے ذریعے دو رکنی ماحولیاتی کمیٹی بنانا ہے۔

A ایسا وقوعہ ہے کہ کمیٹی میں کم از کم ایک خاتون ہو۔

B ایسا وقوعہ ہے کہ کمیٹی میں ایک مرد اور ایک خاتون ہو۔

C ایسا وقوعہ ہے کہ کمیٹی میں ایک بھی خاتون نہ ہو۔

(6) بیک وقت ایک سکہ اُچھالا گیا اور ایک پانسہ پھینکا گیا۔

A ایسا وقوعہ ہے جس میں چِت اور طاق عدد حاصل ہو۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں H یا T اور جفت عدد حاصل ہو۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں پانسے پر 7 سے بڑا عدد اور سکے پر ایک پٹ حاصل ہو۔

آیئے، سمجھ لیں۔

وقوعہ کا احتمال (Probability of an event)

ایک آسان سے تجربے پر غور کرتے ہیں۔ ایک تھیلی میں چار گیندیں مساوی حجم کی ہیں۔ ان میں تین گیندیں سفید ہیں اور چوتھی گیند سیاہ ہے۔ آنکھیں بند کرکے تھیلی میں سے ایک گیند نکالنا ہے۔

نکالے گئے گیندوں میں سے سفید گیند کے امکانات زیادہ ہوں گے۔ ایسا سمجھ میں آتا ہے۔

ریاضی کی زبان میں ایسے ممکنہ متوقع وقوعے کے امکان کو ظاہر کرنے والے عدد کو احتمال کہتے ہیں۔ اسے ذیل کا ضابطہ استعمال کرکے عدد میں یا فیصد میں ظاہر کرتے ہیں۔

کسی بے ترتیب تجربے میں اگر نمونہ وسعت S ہو اور A اس تجربے میں ممکنہ وقوعہ ہو تو اس وقوعہ کا احتمال 'P(A)' سے ظاہر کرتے ہیں اور اسے مندرجہ ذیل ضابطے کے ذریعے معلوم کرتے ہیں۔

$$P(A) = \frac{\text{وقوعہ A میں نمونہ ارکان کی تعداد}}{\text{نمونہ وسعت میں ارکان کی تعداد}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مندرجہ بالا تجربے میں نکالی گئی گیند سفید ہے۔ اگر یہ وقوعہ A ہو تو $n(A) = 3$ کیونکہ تین سفید گیندیں ہیں اور کل چار گیندیں ہیں اس لیے $n(S) = 4$

نکالی گئی سفید گیند کا احتمال , $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

اسی طرح نکالی گئی گیند سیاہ ہے اسے وقوعہ B سے ظاہر کریں تو $n(B) = 1$ اس لیے $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک سکہ اُچھالا گیا ہے۔ درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(i) چت حاصل ہوتا ہے (ii) پٹ حاصل ہوتا ہے۔

حل : فرض کریں نمونہ وسعت S ہے۔

$$S = \{H, T\} \quad , \quad n(S) = 2$$

(i) فرض کیجیے A ایسا وقوعہ ہے جس میں چت حاصل ہوتا ہے۔

$$A = \{H\} \quad , \quad n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) فرض کیجیے B ایسا وقوعہ ہے جس میں پٹ حاصل ہوتا ہے۔

$$B = \{T\} \quad , \quad n(B) = 1$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

مثال (2) ایک پانسہ پھینکا گیا ہے۔ درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(i) اوپری رُخ پر مفرد عدد حاصل ہو۔ (ii) اوپری رُخ پر جفت عدد حاصل ہو۔

حل : فرض کیجیے نمونہ وسعت S ہے۔

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad n(S) = 6$$

(i) فرض کیجیے A ایسا وقوعہ ہے کہ اوپری رُخ پر مفرد عدد حاصل ہوتا ہے۔

$$A = \{2, 3, 5\} \quad , \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) فرض کیجیے B ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر جفت عدد حاصل ہوتا ہے۔

$B = \{2, 4, 6\} \quad , \quad n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (3) 52 پتوں کی تاش کی گڈی کو اچھی طرح سے خلط ملط کرنے کے بعد اس سے ایک پتہ نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔ (i) سرخ پتہ حاصل ہوتا ہے۔ (ii) تصویری پتہ حاصل ہوتا ہے۔

حل : فرض کیجیے نمونہ وسعت S ہے۔ $\therefore \; n(S) = 52$

(i) فرض کیجیے A ایسا وقوعہ ہے جس میں نکالا گیا پتہ سرخ ہے۔

کل سرخ پتے = 13 پان کے پتے + 13 اینٹ کے پتے

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) فرض کیجیے B ایسا وقوعہ ہے جس میں نکالا گیا پتہ تصویری ہے۔

تاش کی گڈی میں بادشاہ، رانی اور غلام کے کل 12 تصویری پتے ہوتے ہیں۔

$\therefore \; n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

مثال (4) ایک بکس میں 5 اسٹرابیری، 6 کافی اور 2 پیپرمنٹ چاکلیٹ ہیں۔ اس بکس میں سے ایک چاکلیٹ نکالا گیا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ (i) نکالا گیا چاکلیٹ کافی کا ہے، اور

(ii) نکالا گیا چاکلیٹ پیپرمنٹ ہے۔ اور ان کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے نمونہ وسعت 'S' ہے۔ $\therefore \; n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

(i) وقوعہ A = نکالا گیا چاکلیٹ کافی کا ہے۔

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

(ii) نکالا گیا چاکلیٹ پیپرمنٹ کا ہے۔

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

- احتمال کہتے یا لکھتے وقت کسر یا فیصدی کا استعمال کرتے ہیں۔
- کسی بھی وقوعے کا احتمال 0 (صفر) سے 1 تک یا 0% سے 100% تک ہوتا ہے۔

فرض کیجیے، وقوعہ E ہو تو، $0 \leq P(E) \leq 1$ یا $0\ \% \leq P(E) \leq 100\ \%$ ۔ مثلاً $\frac{1}{4}$ احتمال کو 25% بھی لکھتے ہیں۔

- سبق کی ابتدا میں جماعت میں طلبہ کو چٹھی پر پودوں کے نام لکھ کر ہر طالب علم سے ایک چٹھی اُٹھانے کے لیے کہا گیا۔ اس وقت تلسی لکھی ہوئی چٹھی نکالنے کے احتمال پر غور کیا گیا جبکہ ایک ہی چٹھی پر تلسی لکھا ہوا ہے۔ اگر 40 طلبہ ہیں۔ ہر ایک کو ایک ہی چٹھی نکالنا ہے۔ ہر طالب علم کو 'تلسی' لکھی ہوئی چٹھی نکلنے کا احتمال $\frac{1}{40}$ ہے۔ پہلی یا درمیانی یا آخری چٹھی نکالنے والے کے لیے وہ چٹھی ملنے کا احتمال اتنا ہی ہے۔

مشقی سیٹ 5.4

.1 بیک وقت دو سکے اُچھالے گئے۔ درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) کم از کم ایک چت حاصل ہو۔ (2) ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

.2 دو پانسے بیک وقت پھینکے گئے ہیں۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اوپری رُخوں کے اعداد کا مجموعہ کم سے کم 10 ہے۔

(2) اوپری رُخوں کے اعداد کا مجموعہ 33 ہے۔

(3) پہلے پانسے کا عدد، دوسرے پانسے کے عدد سے بڑا ہے۔

.3 ایک بکس میں 1 سے 15 تک اعداد والے 15 کارڈ ہیں۔ اس بکس سے ایک کارڈ بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے تو احتمال معلوم کیجیے جبکہ

(1) جفت عدد ہو۔ (2) عدد 5 کے ضعف میں ہو۔

.4 2, 3, 5, 7, 9 ہندسوں کا استعمال کرکے کسی بھی ہندسے کو دہرائے بغیر دو ہندسی عدد بنایا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) طاق عدد ہو۔ (2) وہ عدد 5 کا ضعف ہو۔

.5 52 پتوں کی گڈی کو اچھی طرح خلط ملط کرنے کے بعد اس سے ایک پتہ نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اِکّا حاصل ہوتا ہے۔ (2) حکم کا پتہ حاصل ہوتا ہے۔

مجموعۂ سوالات - 5

.1 مندرجہ ذیل سوالوں کے لیے صحیح متبادل جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں دیے ہوئے متبادل میں سے کون سا احتمال ممکن نہیں ہے؟

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15% (D) 0.7

(2) ایک پانسہ پھینکا گیا ہے تو اوپری رُخ پر 3 سے چھوٹا عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس وقوعے کا احتمال .... ہے۔

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

(3) 1 سے 100 کے درمیان لیے گئے مفرد اعداد کا احتمال .... ہے۔

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

(4) ایک تھیلی میں 1 سے 40 تک اعداد والے 40 کارڈ ہیں۔ اس تھیلی سے ایک کارڈ نکالا گیا ہے۔ کارڈ کا عدد 5 کا ضعف ہے۔ اس وقوعے کا احتمال .... ہے۔

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(5) اگر $n(A) = 2$ ، $P(A) = \frac{1}{5}$ ہو تو $n(S) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

.2 باسکٹ بال کھلاڑی جان، وسیم اور آ کاش ایک مخصوص جگہ سے باسکٹ جالی میں گیند ڈالنے کی مشق کر رہے تھے۔ باسکٹ میں گیند جانے کا احتمال جان کے لیے $\frac{4}{5}$ ، وسیم کے لیے 0.83 اور آ کاش کے لیے 58% ہے۔ کس کا احتمال سب سے زیادہ ہے۔

.3 ایک ہاکی ٹیم میں 6 کھلاڑی مدافعت کرنے والے، 4 کھلاڑی حملہ آور اور ایک کھلاڑی گول کیپر ہے۔ ان میں سے ایک کھلاڑی کو کپتان کے لیے بے ترتیب طریقے سے منتخب کرنا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) گول کیپر ٹیم کا کپتان ہے۔ (2) مدافعت کرنے والا کھلاڑی ٹیم کا کپتان ہے۔

.4 جوزف نے ایک ٹوپی میں 26 کارڈ رکھے۔ ہر کارڈ پر انگریزی کے حروفِ تہجی میں سے ایک حرف لکھا گیا ہے۔ اس میں سے ایک کارڈ بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے۔ نکالے گئے کارڈ پر حرف 'حرفِ علت' ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.5 ایک غبارے والے کو 2 سرخ، 3 نیلے اور 4 سبز غباروں میں سے ایک غبارہ بے ترتیب طریقے سے دینا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) ملنے والا غبارہ سرخ ہے۔

(2) ملنے والا غبارہ نیلا ہے۔

(3) ملنے والا غبارہ سبز ہے۔

.6 ایک بکس میں 5 سرخ قلم، 8 نیلے قلم اور 3 سبز قلم ہیں۔ بے ترتیب طریقے سے مجتبیٰ کو ایک قلم نکالنا ہے تو نکالا گیا پین نیلا ہے اس کا احتمال معلوم کیجیے۔

.7 ایک پانسے کے چھے رخ درج ذیل کے مطابق ہیں۔

A   E   D   C   B   A

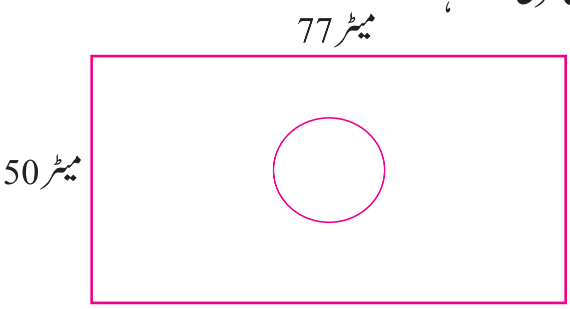
پانسہ ایک مرتبہ پھینکا جائے تو درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اوپری رُخ پر A حاصل ہوتا ہے۔   (2) اوپری رُخ پر D حاصل ہوتا ہے۔

.8 ایک بکس میں 30 کارڈ ہیں۔ ہر کارڈ پر 1 سے 30 میں سے صرف ایک ہی عدد لکھا گیا ہے۔ بکس میں سے ایک کارڈ بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) کارڈ کا عدد طاق ہے۔   (2) کارڈ کا عدد کامل مربع عدد ہے۔

.9 ایک باغ کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 77 میٹر اور 50 میٹر ہے۔ باغ میں 14 میٹر قطر کا تالاب ہے۔ باغ کے قریب عمارت کی چھت پر ایک تولیہ سوکھنے کے لیے پھیلایا گیا ہے۔ تیز ہوا کی وجہ سے تولیہ باغ میں گر گیا۔ باغ کے تالاب میں تولیے کے گرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔



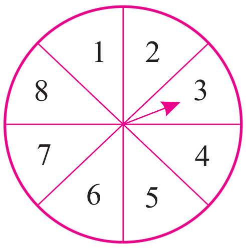
.10 چکری گھمانے کے کھیل میں جب چکری گھماتے ہیں تو چکری پر لکھے ہوئے اعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 میں سے چکری ساکن ہونے کے بعد کسی ایک عدد پر اشاریہ (تیر) رُکتا ہے اور وہ ممکنہ وقوعہ ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اشاریہ 8 پر رُکتا ہے۔

(2) اشاریہ طاق عدد پر رُکتا ہے۔

(3) اشاریہ کے ذریعے ظاہر کیا گیا عدد 2 سے بڑا ہے۔

(4) اشاریہ کے ذریعے ظاہر کیا گیا عدد 9 سے کم ہے۔



.11 6 کارڈ ہیں۔ ہر کارڈ پر 0 سے 5 اعداد میں سے صرف ایک عدد لکھا گیا اور انھیں ایک بکس میں رکھا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) نکالے گئے کارڈ کا عدد طبعی عدد ہے۔

(2) نکالے گئے کارڈ کا عدد 1 سے کم ہے۔

(3) نکالے گئے کارڈ کا عدد مکمل عدد ہے۔

(4) نکالے گئے کارڈ کا عدد 5 سے بڑا ہے۔

.12 ایک تھیلی میں 3 سرخ، 3 سفید اور 3 سبز گیندیں ہیں۔ تھیلی سے ایک گیند بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) نکالی گئی گیند سرخ ہے۔ (2) نکالی گئی گیند سرخ نہیں ہے۔ (3) نکالی گئی گیند سرخ یا سفید ہے۔

.13 ہر کارڈ پر لفظ mathematics کے حروف سے صرف ایک حرف لکھ کر انھیں اوندھا کر کے رکھا گیا ہے۔ ان میں سے ایک کارڈ نکالا گیا ہو تو وہ حرف 'm' حاصل ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.14 ایک اسکول میں 200 طلبہ میں سے 135 طلبہ کو کبڈی کا کھیل پسند ہے۔ باقی طلبہ کو یہ کھیل پسند نہیں ہے۔ تمام طلبہ میں سے ایک طالب علم کا انتخاب کریں اس طرح کہ اسے کبڈی کا کھیل پسند نہیں ہے تو اس کا احتمال معلوم کیجیے۔

.15★ 0, 1, 2, 3, 4 اعداد سے دو ہندسی عدد تیار کرنا ہے اس طرح کہ اعداد کو دہرایا بھی جاسکتا ہے تو مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) وہ مفرد عدد ہے۔ (2) وہ عدد 4 کا ضعف ہے۔ (3) وہ عدد 11 کا ضعف ہے۔

.16★ ایک پانسے کے رُخوں پر 0, 1, 2, 3, 4, 5 اعداد لکھے ہوئے ہیں۔ پانسہ دو مرتبہ پھینکا گیا ہے تو اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کا حاصلِ ضرب صفر ہے۔ اس وقوعے کا احتمال معلوم کیجیے۔

درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے،

عملی کام I :

n(S) = آپ کی جماعت کے طلبہ کی کل تعداد = ☐

n(A) = جماعت میں عینک استعمال کرنے والے طلبہ کی تعداد = ☐

P(A) = تمام طلبہ میں سے عینک پہننے والے ایک طالب علم کے بے ترتیب طریقے سے انتخاب کا احتمال = ☐

P(B) = تمام طلبہ میں سے عینک نہیں پہننے والے ایک طالب علم کے بے ترتیب طریقے سے انتخاب کا احتمال = ☐

عملی کام II : نمونہ وسعت خود طے کر کے درج ذیل خالی چوکونوں کو پُر کیجیے۔

نمونہ وسعت → S = {   } → n(S) = ☐

وقوعہ A کے لیے شرط جفت عدد حاصل ہو → A = {   } → n(A) = ☐

$P(A) = \frac{\square}{\square} = \square$

NIS78Z