1 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

चला, शिकूया.

- दोन चलांतील रेषीय समीकरणे सोडवण्याच्या पद्धती – आलेख पद्धत, क्रेमरची पद्धत.
- दोन चलांतील रेषीय समीकरणात रूपांतर करण्याजोगी समीकरणे.
- एकसामयिक समीकरणांचे उपयोजन.

जरा आठवूया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरण (Linear equation in two variables)

ज्या समीकरणामध्ये दोन चले वापरली जातात आणि चल असलेल्या प्रत्येक पदाची कोटी 1 असते त्या समीकरणाला दोन चलांतील रेषीय समीकरण असे म्हणतात, हे आपण मागील इयत्तेत अभ्यासले आहे.

$ax + by + c = 0$ हे दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचे सामान्यरूप आहे. येथे a, b, c या वास्तव संख्या असून a आणि b हे एकाच वेळी शून्य नसतात हेही आपल्याला माहीत आहे.

उदा. $3x = 4y - 12$ या समीकरणाचे $3x - 4y + 12 = 0$ हे सामान्यरूप आहे.

कृती : खालील सारणी पूर्ण करा.

क्रमांक	समीकरण	दोन चलांतील रेषीय समीकरण आहे की नाही?
1	$4m + 3n = 12$	आहे.
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

एकसामयिक रेषीय समीकरणे (Simultaneous linear equations)

जेव्हा आपण दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणांचा एकाच वेळी विचार करतो तेव्हा त्या समीकरणांना एकसामयिक समीकरणे म्हणतात.

मागील इयत्तेत एका चलाचा लोप करून समीकरणे सोडवण्याच्या पद्धतींचा अभ्यास आपण केला आहे. त्याची थोडक्यात उजळणी करू

उदा. (1) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$5x - 3y = 8; \ 3x + y = 2$

उकल :

रीत I : $5x - 3y = 8 \ . . . \ (I)$

$3x + y = 2 \ . . . \ (II)$

समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणू

$9x + 3y = 6 \ . . . \ (III)$

$5x - 3y = 8 \ . . . \ (I)$

आता समीकरण (I) व (III) यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ + \ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$3x + y = 2$

$\therefore 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore 3 + y = 2$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ ही उकल आहे.

हीच उकल $(x, y) = (1, -1)$ अशीही लिहितात.

रीत (II)

$5x - 3y = 8 \ . . . \ (I)$

$3x + y = 2 \ . . . \ (II)$

समीकरण (II) वरून y या चलाची किंमत x या चलाच्या रूपात लिहू.

$y = 2 - 3x \ . . . \ (III)$

आता y ची ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$5x - 3y = 8$

$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore 14x - 6 = 8$

$\therefore 14x = 8 + 6$

$\therefore 14x = 14$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण (III) मध्ये ठेवू.

$y = 2 - 3x$

$\therefore y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore y = 2 - 3$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ ही उकल आहे.

उदा. (2) सोडवा: $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

उकल : $3x + 2y = 29$. . . (I) आणि $5x - y = 18$ . . . (II)

दिलेली समीकरणे y या चलाचा लोप करून सोडवू. त्यासाठी खालील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

समीकरण (II) ला 2 ने गुणून

$\therefore\ 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore\ 10x - 2y = \square$ . . . (III)

समीकरण (I) मध्ये समीकरण (III) मिळवू.

$$
\begin{array}{r}
3x + 2y = 29 \\
+\ \square - \square = \square \\
\hline
\square = \square
\end{array}
\qquad \therefore\ x = \square
$$

$x = 5$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$3x + 2y = 29$

$\therefore\ 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore\ \square + 2y = 29$

$\therefore\ 2y = 29 - \square$

$\therefore\ 2y = \square \qquad \therefore\ y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ ही उकल आहे.

उदा. (3) $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

उकल : $15x + 17y = 21$. . . (I)

$17x + 15y = 11$ . . . (II)

या दोन समीकरणांत x आणि y यांच्या सहगुणकांची अदलाबदल आहे. अशा प्रकारची एकसामयिक समीकरणे सोडवताना त्या दोन्ही समीकरणांची बेरीज आणि वजाबाकी घेतली असता दोन नवीन सोपी समीकरणे मिळतात. ती समीकरणे सोडवून समीकरणांची उकल सहज मिळते.

समीकरण (I) व समीकरण (II) यांची बेरीज करून,

$$
\begin{array}{r}
15x + 17y = 21 \\
+\ 17x + 15y = 11 \\
\hline
32x + 32y = 32
\end{array}
$$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस 32 ने भागून

$$x + y = 1 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

समीकरण (I) मधून समीकरण (II) वजा करू.

$$\begin{array}{rl} & 15x + 17y = 21 \\ - & \underset{-}{}17x \underset{-}{+} 15y = \underset{-}{}11 \\ \hline & -2x + 2y = 10 \end{array}$$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस 2 ने भागून,

$$-x + y = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण (III) व समीकरण (IV) यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{rl} & x + y = 1 \\ + & -x + y = 5 \\ \hline & \therefore \; 2y = 6 \qquad \therefore \; y = 3 \end{array}$$

$y = 3$ ही किंमत समीकरण (III) मध्ये ठेवू.

$x + y = 1$

$\therefore \; x + 3 = 1$

$\therefore \; x = 1 - 3 \qquad \therefore \; x = -2$

$(x, y) = (-2, 3)$ ही समीकरणांची उकल आहे.

सरावसंच 1.1

1. खालील कृती पूर्ण करून एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$5x + 3y = 9$ ----- (I)

$2x - 3y = 12$ ----- (II)

समी. (I) व समी. (II) यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{rl} & 5x + 3y = 9 \\ + & 2x - 3y = 12 \\ \hline & \square \; x = \square \end{array}$$

$$x = \frac{\square}{\square} \qquad x = \square$$

$x = 3$ समी.(I) मध्ये ठेवू.

$5 \times \square + 3y = 9$

$3y = 9 - \square$

$3y = \square$

$$y = \frac{\square}{3}$$

$y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ ही समीकरणाची उकल आहे.

2. खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(1) $3a + 5b = 26$; $a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10$; $3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9$; $2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19$; $m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3$; $x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3}$; $2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499$; $101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172$; $57x - 49y = 252$

जरा आठवूया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख (Graph of a linear equation in two variables)

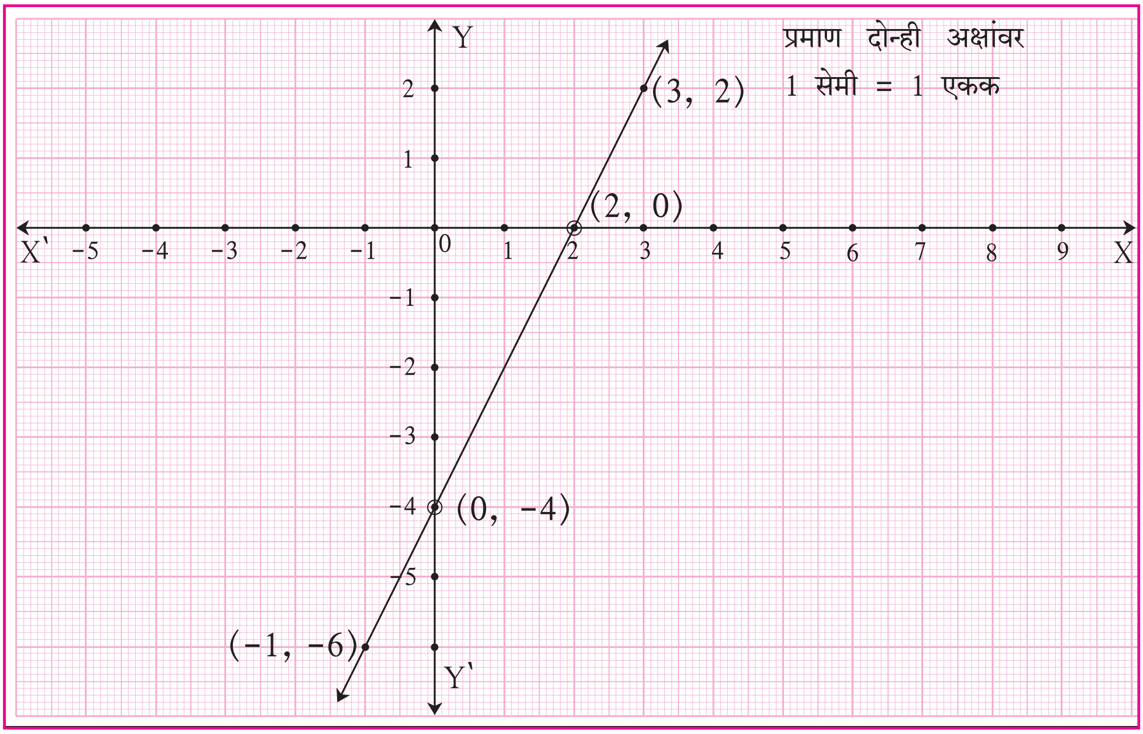
मागील इयत्तेत, दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख ही एक सरळ रेषा असते असे आपण अभ्यासले आहे. जी क्रमित जोडी दिलेल्या समीकरणाचे समाधान करते ती जोडी त्या समीकरणाची उकल असते. तसेच ती क्रमित जोडी त्या समीकरणाच्या आलेखावरील एक बिंदू दर्शवते.

उदाहरण $2x - y = 4$ या समीकरणाचा आलेख काढा.

उकल : $2x - y = 4$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी (x, y) च्या 4 क्रमित जोड्या मिळवू.

x	0	2	3	−1
y	−4	0	2	−6
(x, y)	(0, −4)	(2, 0)	(3, 2)	(−1, −6)

क्रमित जोड्या मिळवताना सारणीत दाखवल्याप्रमाणे x व y यांची शून्य ही किंमत घेणे सोईचे असते.



दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख काढताना खालील पायऱ्या ध्यानात घ्या.

दिलेल्या समीकरणासाठी किमान 4 क्रमित जोड्या (बिंदूंचे निर्देशक) शोधा

↓

आलेख कागदावर X-अक्ष व Y-अक्ष निश्चित करून बिंदू स्थापन करा.

↓

सर्व बिंदू एकरेषीय येतील. त्या बिंदूंतून जाणारी रेषा काढा.

रेषा निश्चित होण्यासाठी दोन बिंदू पुरेसे असतात, परंतु त्यांपैकी एका बिंदूचे निर्देशक काढताना चूक झाली, तर रेषाही चुकते.

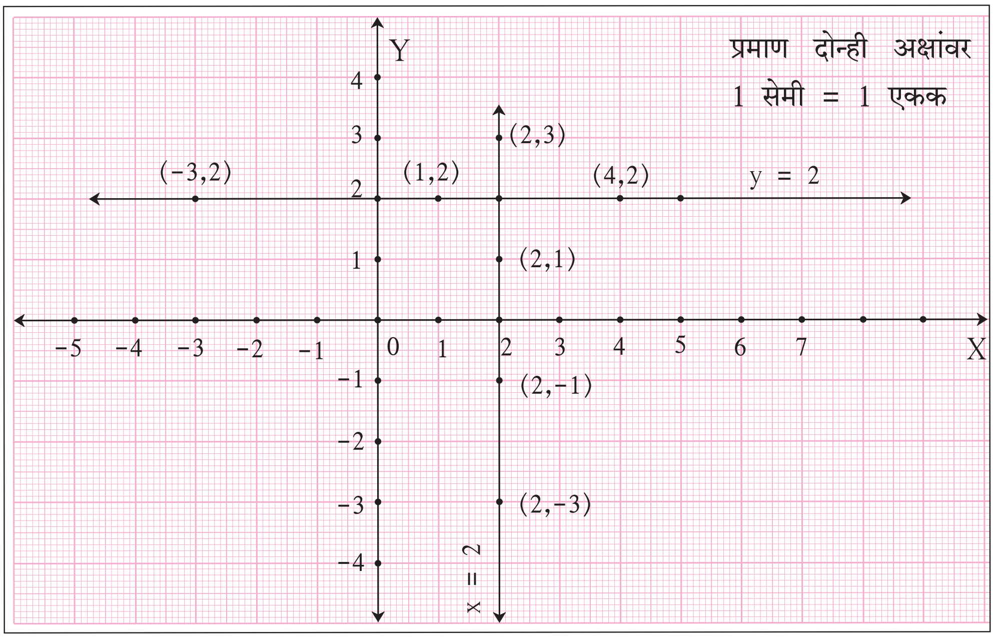
तीन बिंदूंचे निर्देशक काढताना एका बिंदूचे निर्देशक चुकले, तर तीन बिंदू एका रेषेत येणार नाहीत, त्यावरून कोणत्यातरी एकाचे निर्देशक चुकले आहेत हे लक्षात येईल, पण नेमक्या कोणत्या बिंदूचे निर्देशक चुकले आहेत, हे शोधायला वेळ लागेल.

चार बिंदूंचे निर्देशक काढताना जर एका बिंदूचे निर्देशक चुकले, तर तो वगळता इतर तीन बिंदू एकरेषीय येतील. त्यामुळे चूक लगेच लक्षात येईल. म्हणून चार बिंदूंचे निर्देशक ठरवणे हिताचे असते.

$0x + y = 2$ हे समीकरण सोईसाठी $y = 2$ असे लिहितात. या समीकरणाचा आलेख X-अक्षाला समांतर असतो. कारण x निर्देशक कोणताही घेतला तरी प्रत्येक बिंदूचा y निर्देशक 2 हाच येतो.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

तसेच $x + 0y = 2$ हे समीकरण $x = 2$ असे लिहितात व त्याचा आलेख Y- अक्षाला समांतर असतो.



जाणून घेऊया.

एकसामयिक समीकरणे सोडवण्याची आलेख पद्धत
(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

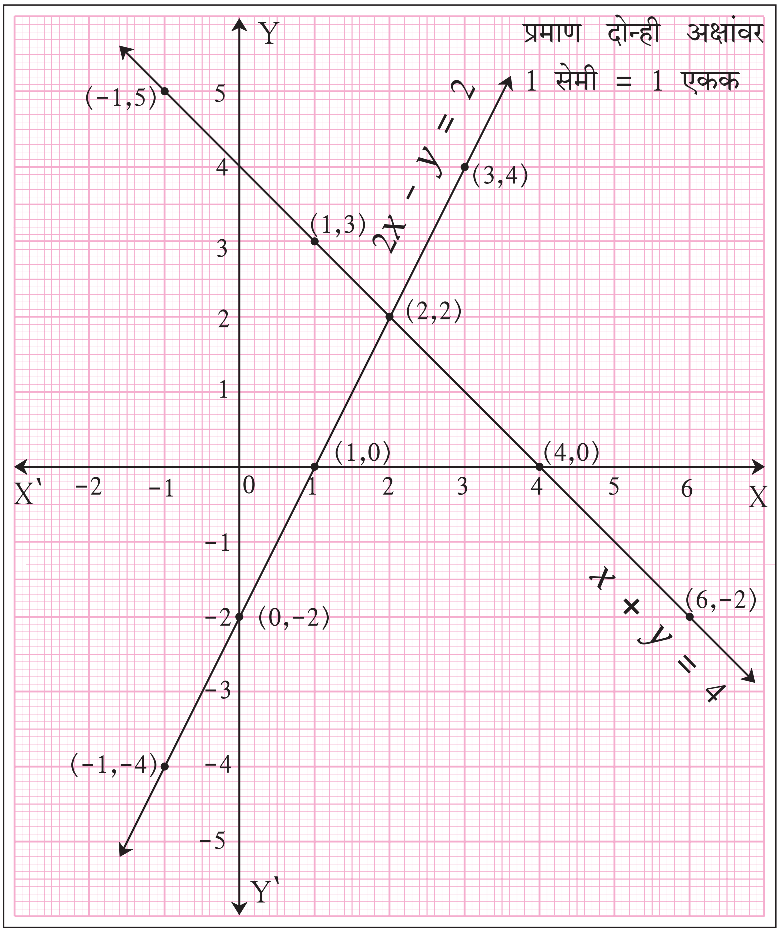
उदा. $x + y = 4$ आणि $2x - y = 2$ या समीकरणांचे आलेख काढून त्यांचे निरीक्षण करू.

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$



आलेखावरील प्रत्येक बिंदू त्या आलेखाच्या समीकरणाचे समाधान करतो. दोन्ही रेषा परस्परांना (2, 2) या बिंदूत छेदतात.

म्हणून (2, 2) ही क्रमित जोडी, म्हणजेच $x = 2$ आणि $y = 2$ या किमती, $x + y = 4$ आणि $2x - y = 2$ या दोन्ही समीकरणांचे समाधान करतात.

चलांच्या ज्या किमतींनी दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांचे समाधान होते, त्या किमती म्हणजे त्या समीकरणांची उकल असते.

$x + y = 4$ आणि $2x - y = 2$ या एकसामयिक समीकरणांची उकल $x = 2$ आणि $y = 2$ आहे.

ही समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवून या उकलीचा पडताळा घेऊ.

$x + y = 4 \; . \; . \; . \; \text{(I)}$

$2x - y = 2 \; . \; . \; . \; \text{(II)}$

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$3x = 6 \quad \therefore \; x = 2$

समीकरण (I) मध्ये $x = 2$ ही किंमत ठेवू.

$x + y = 4$

$\therefore \; 2 + y = 4$

$\therefore \; y = 2$

कृती I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ ही एकसामयिक समीकरणे आलेख पद्धतीने सोडवण्यासाठी खाली दिलेल्या सारण्या पूर्ण करून निर्देशक मिळवा.

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- एकाच निर्देशक पद्धतीवर वरील निर्देशकांनुसार बिंदू स्थापन करा.
- समीकरणांचे आलेख काढा.
- रेषांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक वाचा. त्यांवरून एकसामयिक समीकरणांची उकल लिहा.

कृती II : वर दिलेली एकसामयिक समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवून, आलेखांवरून मिळालेल्या उकलीचा पडताळा घ्या.

विचार करूया.

$5x - 3y = 1$ चा आलेख काढण्यासाठी खालील सारणीत काही निर्देशक काढून दिले आहेत, ते पाहा.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- बिंदू स्थापन करण्यासाठी हे निर्देशक सोईचे आहेत का?
- निर्देशक शोधताना कोणती काळजी घ्यावी, म्हणजे बिंदू स्थापन करणे सोपे होईल?

सरावसंच 1.2

1. खालील एकसामयिक समीकरण आलेखाने सोडवण्यासाठी सारणी पूर्ण करा.

$x + y = 3$; $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	□	□
y	□	5	3
(x, y)	(3, 0)	□	(0, 3)

$x - y = 4$

x	□	-1	0
y	0	□	-4
(x, y)	□	□	(0, -4)

2. खालील एकसामयिक समीकरणे आलेखाने सोडवा.

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$
(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$
(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$
(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$
(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$
(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

चला, चर्चा करूया.

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ ही एकसामयिक समीकरणे दिलेली आहेत, ती आलेख पद्धतीने सोडवण्यासाठी निश्चित केलेल्या काही क्रमित जोड्या खालीलप्रमाणे आहेत.

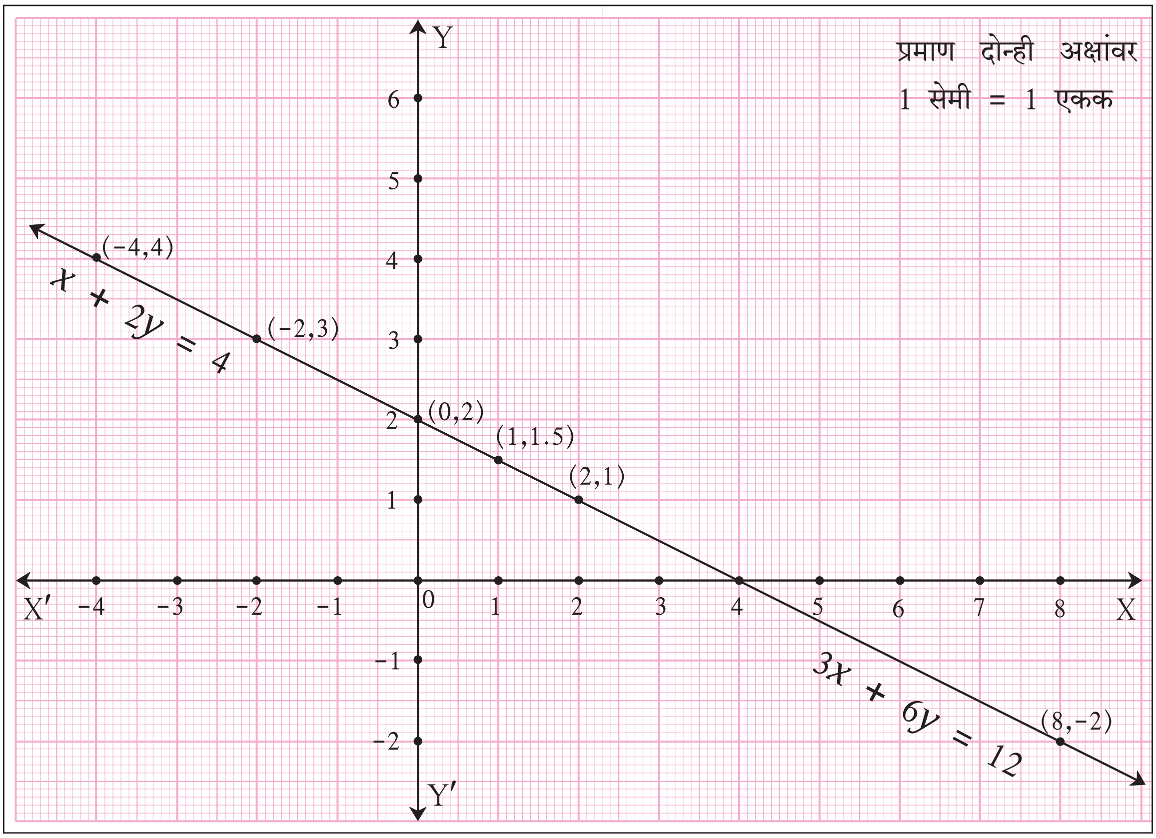
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

या क्रमित जोड्या स्थापन करून काढलेला आलेख खाली दिला आहे. त्याचे निरीक्षण करा आणि दिलेल्या प्रश्नांवर चर्चा करा.



(1) वरील दोन्ही समीकरणांचे आलेख एकच आहेत का भिन्न आहेत?

(2) $x + 2y = 4$ आणि $3x + 6y = 12$ या एकसामयिक समीकरणांच्या उकली कोणत्या? त्या किती आहेत?

(3) वरील दोन्ही समीकरणांतील x चे सहगुणक, y चे सहगुणक आणि स्थिरपदे यांमध्ये कोणता संबंध दिसून येतो?

(4) दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणे दिली असता त्या समीकरणांचे आलेख ही एकच रेषा केव्हा असते हे कसे ओळखता येईल?

आता दुसरे उदाहरण पाहू.

$x - 2y = 4$ आणि $2x - 4y = 12$ या समीकरणांचे आलेख वरीलप्रमाणेच एकाच निर्देशकपद्धतीवर काढा. आलेखांचे निरीक्षण करा. $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ या एकसामयिक समीकरणांच्या उकलीचा विचार करा. x आणि y चे सहगुणक, तसेच स्थिरपदे यांच्यातील संबंधाचा विचार करून निष्कर्ष काढा.

ICT Tools or Links

Geogebra software च्या मदतीने X-अक्ष, Y-अक्ष काढा. विविध एकसामयिक समीकरणांचे आलेख काढून त्यांच्या उकली तपासा.

जाणून घेऊया.

निश्चयक (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ हा चार घटकांचा निश्चयक आहे. यात (a, b), (c, d) या आडव्या ओळी आहेत, तसेच $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ हे दोन (उभे) स्तंभ आहेत. या निश्चयकाची कोटी 2 आहे, कारण प्रत्येक ओळीत व स्तंभात 2 घटक आहेत. हा निश्चयक एका संख्येसाठी लिहिला जातो. ती संख्या $ad\text{-}bc$ असते.

म्हणजे $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad\text{-}bc$

$ad\text{-}bc$ ही $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ या निश्चयकाची किंमत आहे.

निश्चयकांना नाव देण्यासाठी सर्वसाधारणपणे A, B, C, D, ... अशी इंग्रजी कॅपिटल अक्षरे वापरतात.

सोडवलेले उदाहरण

उदाहरण खालील निश्चयकांच्या किमती काढा.

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

उकल :

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$

(2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3) \times 2] = -32 - (-6)$

$= -32 + 6 = -26$

(3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$

जाणून घेऊया.

निश्चयक पद्‌धती (क्रेमरची पद्‌धती) Determinant method (Crammer's Method)

दिलेली एकसामयिक समीकरणे सोप्या पद्‌धतीने व कमीत कमी जागा वापरून निश्चयकांच्या साहाय्याने सोडवता येतात. यालाच एकसामयिक समीकरणे सोडवण्याची निश्चयक पद्‌धती म्हणतात. ही पद्‌धती गेब्रियल क्रेमर या स्विस गणितज्ञाने शोधून काढली म्हणून या पद्‌धतीला क्रेमरची पद्‌धती असेही म्हणतात.

या पद्‌धतीत दिलेली एकसामयिक समीकरणे $a_1x + b_1y = c_1$ आणि $a_2x + b_2y = c_2$ अशी लिहितात.

समजा, $a_1x + b_1y = c_1$ . . . (I)

आणि $a_2x + b_2y = c_2$ . . . (II)

येथे a_1, b_1, c_1 व a_2, b_2, c_2 या वास्तव संख्या आहेत.

आपण ही एकसामयिक समीकरणे निरसन पद्‌धतीने सोडवू.

समीकरण (I) ला b_2 ने गुणून

$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$ . . . (III)

समीकरण (II) ला b_1 ने गुणून

$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1$ . . . (IV)

समीकरण (III) मधून (IV) वजा करून

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -\; a_2 b_1 x \pm b_2 b_1 y = -c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \ldots \quad (V)$$

त्याचप्रमाणे x चे निरसन करून, $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \ldots \quad (VI)$

वरील उकलींमधील $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ या राशी लक्षात ठेवण्यासाठी आणि थोड्या जागेत व्यवस्थित लिहिण्यासाठी निश्चयकांच्या रूपात लिहू.

खालील समीकरणातील सहगुणक व स्थिरपदे पाहा.

$a_1 x + b_1 y = c_1$

आणि $a_2 x + b_2 y = c_2$

येथे $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हे तीन स्तंभ मिळतात.

समीकरण (V) व समीकरण (VI) मधील x व y यांच्या किमती निश्चयकाच्या रूपात लिहू.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

आणि $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

लक्षात ठेवण्यासाठी $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$ असे लिहू.

म्हणजे थोडक्यात $x = \dfrac{D_x}{D}$ व $y = \dfrac{D_y}{D}$

D, D_x, D_y हे निश्चयक लिहिण्यास $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ या स्तंभांचा क्रम लक्षात ठेवा.

आणि $\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}$ या समीकरणांपासून $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हे तीन स्तंभ मिळतात.

- D मध्ये स्थिरपदांचा $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हा स्तंभ वगळला आहे.
- D_x साठी D मधील $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ हा x च्या सहगुणकांचा स्तंभ वगळला आहे. त्याजागी स्थिर पदांचा स्तंभ घेतला आहे.
- D_y साठी D मधील $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ हा y च्या सहगुणकांचा स्तंभ वगळला आहे. त्याजागी स्थिर पदांचा स्तंभ घेतला आहे.

हे लक्षात ठेवूया.

क्रेमरची पद्धती वापरून एकसामयिक समीकरणे सोडवण्याची रीत

दिलेली समीकरणे $ax + by = c$ या स्वरूपात लिहा.

↓

D, D_x व D_y या निश्चयकांच्या किमती काढा.

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ व $y = \frac{D_y}{D}$

यानुसार x व y च्या किमती काढा.

गेब्रियल क्रेमर (Gabriel Cramer)

(31 जुलै, 1704 ते 4 जानेवारी, 1752)

या स्विस गणितज्ञाचा जन्म जिनिव्हा येथे झाला. गणित विषयात ते बालपणापासूनच अतिशय प्रवीण होते. वयाच्या अठराव्या वर्षी त्यांना डॉक्टरेट ही पदवी मिळाली. ते जिनिव्हा येथे प्राध्यापक होते.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. क्रेमरच्या पद्धतीने खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$$5x + 3y = -11 \; ; \; 2x + 4y = -10$$

उकल : दिलेली समीकरणे

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 -(-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 -(-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore$ $(x, y) = (-1, -2)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

कृती 1 : निश्चयक पद्धतीने दिलेली एकसामयिक समीकरणे सोडवण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$y + 2x - 19 = 0 \; ; \; 2x - 3y + 3 = 0$$

उकल : दिलेली समीकरणे $ax + by = c$ या स्वरूपात लिहू.

$$2x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \square \times (-3) - 2 \times (\square) = \square - (\square)$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\square) - (\square) \times (\square) = \square - \square$$

$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$

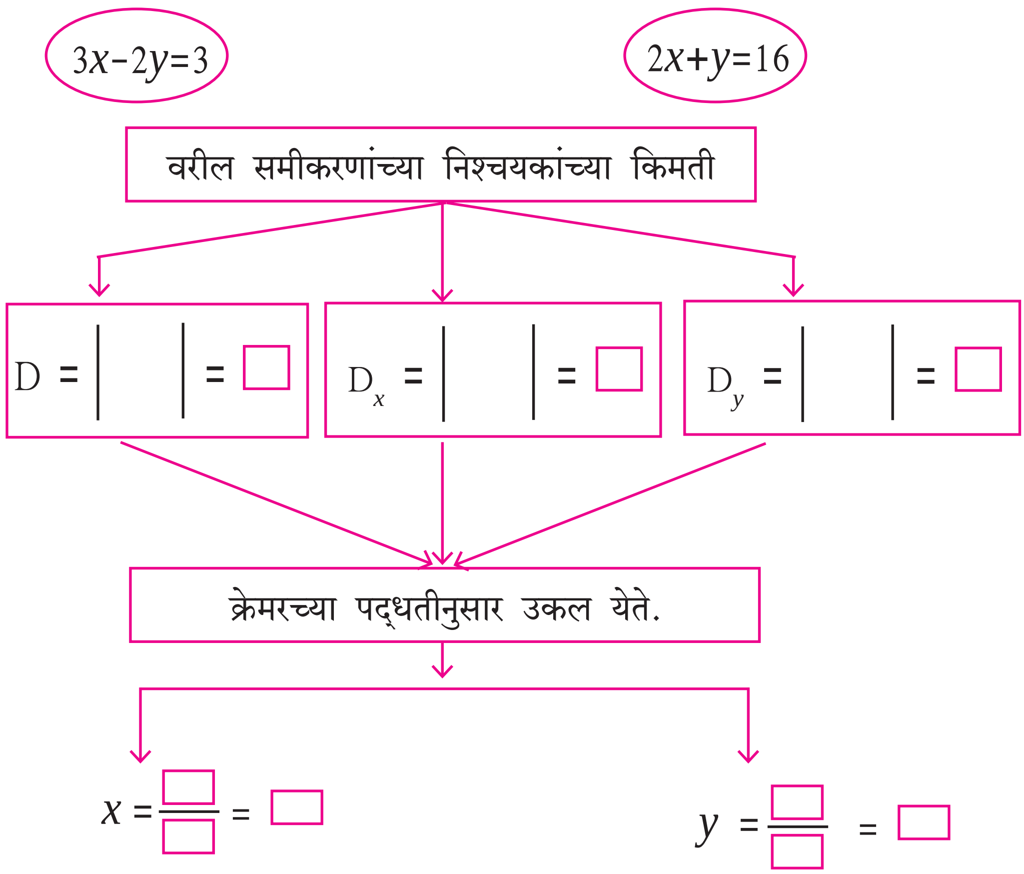
$\therefore\ x = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$y = \dfrac{D_y}{D}$

$y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x, y) = (\square, \square)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

कृती 2 : खालील कृती पूर्ण करा.



$\therefore\ (x, y) = (\square, \square)$ ही उकल आहे.

विचार करूया.

- जर, D = 0 असेल, तर उकलीचे स्वरूप काय असेल?
- सामाईक उकल शक्य नसेल, तर त्या समीकरणांच्या रेषांचे स्वरूप काय असेल?

सरावसंच 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

2. खालील निश्चयकांच्या किमती काढा.

   (1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3. खालील एकसामयिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

   (1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

   (3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

   (5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

जाणून घेऊया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणांत रूपांतर करण्याजोगी समीकरणे :
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

कृती : खालील सारणी पूर्ण करा.

समीकरणे	चलांची संख्या	रेषीय आहे की नाही.
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	नाही
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$		
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$		
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$		

विचार करूया.

वरील सारणीत दोन चलांतील काही समीकरणे दिली आहेत. ती रेषीय नाहीत; परंतु त्या समीकरणांचे रेषीय समीकरणांत रूपांतर करता येईल का?

हे लक्षात ठेवूया.

दिलेल्या चलांमध्ये योग्य तो बदल करून आपण नवीन चलांची निर्मिती करू शकतो. ही नवीन चले वापरून तेच समीकरण रेषीय समीकरणाच्या रूपात लिहिता येते. कोणत्याही $\frac{m}{n}$ अशा अपूर्णांकाचा छेद शून्य असू शकत नाही हे विसरू नका.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) सोडवा : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

उकल : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) मध्ये $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ व $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ मानल्यास खालील समीकरणे मिळतात.

$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad$ (III)

$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad$ (IV)

ही समीकरणे सोडवून,

$m = 3,\ n = -1$ ही उकल मिळते.

आता, $m = \frac{1}{x} \qquad \therefore\ 3 = \frac{1}{x} \qquad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

तसेच, $n = \frac{1}{y} \qquad \therefore\ -1 = \frac{1}{y} \qquad \therefore\ y = -1$

$\therefore\ (x,\ y) = (\frac{1}{3},\ -1)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

उदा.(2) सोडवा : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

उकल : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad (I)$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) व (II) मध्ये $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ व $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ ठेवून पुढील समीकरणे मिळतात.

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad (III)$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

समीकरण (III) व (IV) सोडवून $a = 1$ आणि $b = -1$ या उकली मिळतात.

पण $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ व $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ व $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad (V)$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad (VI)$$

समीकरण (V) व समीकरण (VI) सोडवून $x = 0$ आणि $y = -1$ या उकली मिळतात.

$\therefore$ $(x, y) = (0, -1)$ ही दिलेल्या समीकरणाची उकल आहे.

विचार करूया

वरील उदाहरणांमध्ये रूपांतरित करून आलेली एकसामयिक समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवली आहेत. ती समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने किंवा आलेख पद्धतीने सोडवली असता त्याच उकली मिळतील का ते करून पाहा.

कृती : चौकटीतील समीकरणांची उकल काढण्यासाठी खालील कृती करा.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \; ; \; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ व $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ ठेवून,

नवी समीकरणे

$\square$; $6m - 3n = 1$

समीकरणे सोडवून,

$m = \square$ व $n = \square$

m व n च्या किमती ठेवून मिळणारी समीकरणे

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$; $\square$

समीकरणे सोडवून,

$x = \square$ व $y = \square$

$\therefore$ $(x, y) = (\quad , \quad)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

सरावसंच 1.4

1. खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \; ; \; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \; ; \; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \; ; \; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

जाणून घेऊया.

एकसामयिक समीकरणांचे उपयोजन Application of simultaneous equations

कृती : पुढे चौकटींच्या खाली काही अटी दिल्या आहेत. त्यांवरून मिळणारी समीकरणे संबंधित चौकटींत लिहा.

मी सार्थक. माझे आजचे वय x वर्षे आहे.

माझे आजचे वय y वर्षे आहे. मी साक्षी

सार्थकचे वय साक्षीच्या वयाच्या दुपटीपेक्षा 8 वर्षांनी कमी आहे.

4 वर्षांपूर्वी साक्षीचे वय सार्थकपेक्षा 3 वर्षांनी कमी होते.

सार्थक व साक्षी यांच्या आजच्या वयांची बेरीज 25 वर्षे आहे.

उदा. (1) एका आयताची परिमिती 40 सेमी आहे. आयताची लांबी ही रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 2 सेमीने जास्त आहे, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

उकल : समजा, आयताची लांबी x सेमी व रुंदी y सेमी आहे.

पहिल्या अटीनुसार –

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

दुसऱ्या अटीनुसार –

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore x - 2y = 2 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) निश्चयक पद्धतीने सोडवू.

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$ व $y = \dfrac{D_y}{D}$

$\therefore$ $x = \dfrac{-42}{-3}$ व $y = \dfrac{-18}{-3}$

$\therefore$ $x = 14$ व $y = 6$

$\therefore$ आयताची लांबी 14 सेमी व रुंदी 6 सेमी आहे.

उदा. (2)

सेल ! सेल !! सेल !!! फक्त दोनच दिवस

माझ्याकडे काही काटे असलेली आणि काही डिजिटल घड्याळे आहेत. ती मी सवलतीच्या दरात विकणार आहे.

पहिल्या दिवसाची विक्री	
काटे असलेली घड्याळे	= 11
डिजिटल घड्याळे	= 6
मला मिळाले	4330 रु.

दुसऱ्या दिवसाची विक्री	
काटे असलेली घड्याळे	= 22
डिजिटल घड्याळे	= 5
मला मिळाले	7330 रु.

तर मी विकलेल्या प्रत्येक प्रकारच्या घड्याळाची किंमत किती?

उकल : समजा, काटे असलेल्या एका घड्याळाची किंमत = x रु.

व एका डिजिटल घड्याळाची किंमत = y रु.

पहिल्या अटीनुसार,

$$11x + 6y = 4330 \quad . . . \quad (I)$$

दुसऱ्या अटीनुसार,

$$22x + 5y = 7330 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) ला 2 ने गुणून,

$$22x + 12y = 8660 \quad . . . \quad (III)$$

समीकरण (II) मधून समीकरण (III) वजा करू.

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ -\ 22x \underset{-}{+} 12y = \underset{-}{}8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

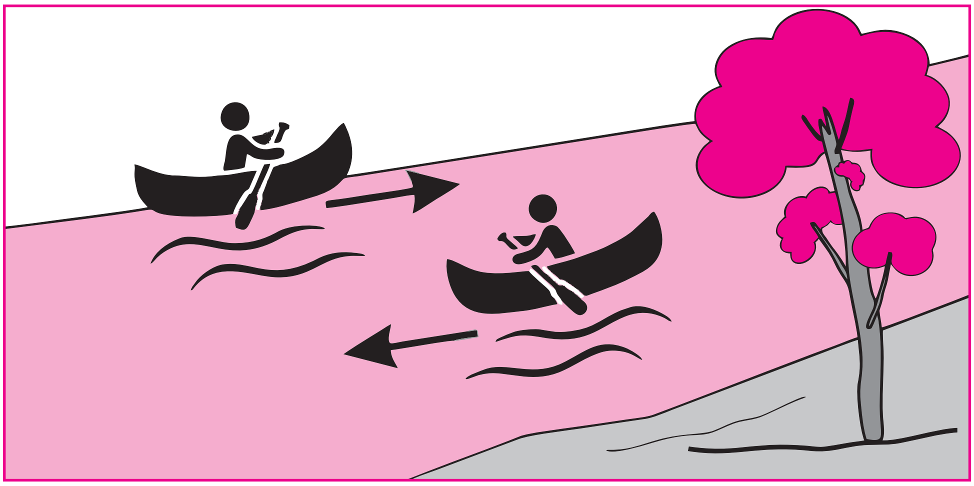
$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ काटे असलेल्या एका घड्याळाची किंमत 290 रु. व एका डिजिटल घड्याळाची किंमत 190 रु. आहे.

उदा. (3)



एक नाव 6 तासांत प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने 16 किमी व प्रवाहाच्या दिशेने 24 किमी जाते.

तीच नाव 13 तासांत प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने 36 किमी आणि प्रवाहाच्या दिशेने 48 किमी जाते.

सांगा बरे! नावेचा संथ पाण्यातील वेग व प्रवाहाचा वेग किती?

उकल : समजा, नावेचा संथ पाण्यातील वेग = x किमी/तास, व प्रवाहाचा वेग = y किमी/तास

$\therefore$ नावेचा प्रवाहाच्या दिशेने वेग = $(x + y)$ किमी/तास

नावेचा प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने वेग = $(x - y)$ किमी/तास

अंतर = वेग × वेळ $\therefore$ वेळ = $\dfrac{\text{अंतर}}{\text{वेग}}$

नावेला प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने 16 किमी जाण्यास लागणारा वेळ = $\dfrac{16}{x-y}$ तास

नावेला प्रवाहाच्या दिशेने 24 किमी जाण्यास लागणारा वेळ = $\dfrac{24}{x+y}$ तास

पहिल्या अटीनुसार,

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

दुसऱ्या अटीनुसार,

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) मध्ये $\dfrac{1}{x-y} = m$ व $\dfrac{1}{x+y} = n$ ठेवून खालील दोन समीकरणे मिळतात.

$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$

$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$

समीकरण (III) व (IV) सोडवून $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$

m व n च्या किमती पुन्हा ठेवून खालील समीकरणे मिळतात.

$x - y = 4$ . . . (V)

$x + y = 12$ . . . (VI)

समीकरण (V) व (VI) सोडवली असता $x = 8$, $y = 4$ या किमती मिळतात.

$\therefore$ नावेचा संथ पाण्यातील वेग = 8 किमी/तास आणि प्रवाहाचा वेग = 4 किमी/तास

उदा. (4) काही रक्कम काही मुलांना सारखी वाटली. जर 10 मुले जास्त असती तर प्रत्येकास 2 रुपये कमी मिळाले असते आणि जर 15 मुले कमी असती तर प्रत्येकी 6 रुपये जास्त मिळाले असते, तर एकूण रक्कम किती होती? ती रक्कम किती मुलांना वाटली?

उकल : मुलांची संख्या x मानू व प्रत्येकाला मिळालेली रक्कम y रुपये मानू.

$\therefore$ एकूण xy रुपये वाटले.

पहिल्या अटीनुसार,

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore -2x + 10y = 20$$

$$\therefore -x + 5y = 10 \quad . . . \text{(I)}$$

दुसऱ्या अटीनुसार,

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore 6x - 15y = 90$$

$$\therefore 2x - 5y = 30 \quad . . . \text{(II)}$$

समीकरण (I) मध्ये समीकरण (II) मिळवू.

$$\begin{array}{r} -x + 5y = 10 \\ + \quad 2x - 5y = 30 \\ \hline x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$-x + 5y = 10$

$\therefore -40 + 5y = 10$

$\therefore 5y = 50$

$\therefore \quad y = 10$

एकूण रक्कम $= xy = 40 \times 10 = 400$ रु.

$\therefore$ 40 मुलांना 400 रुपये सारखे वाटले.

उदा. (5) एक तीन अंकी संख्या तिच्या अंकांच्या बेरजेच्या 17 पट आहे. त्या संख्येत 198 मिळवल्यास तेच अंक उलट्या क्रमाने असलेली संख्या मिळते, तसेच एकक व शतक स्थानच्या अंकांची बेरीज ही मधल्या अंकापेक्षा 1 ने कमी आहे, तर ती तीन अंकी संख्या शोधा.

उकल : शतकस्थानचा अंक x मानू व एककस्थानचा अंक y मानू.

दशक स्थानचा (मधला) अंक = टोकाच्या अंकांच्या बेरजेपेक्षा 1 ने मोठा.

शतक	दशक	एकक
x	$x + y + 1$	y

$\therefore$ तीन अंकी संख्या $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y \quad = 110x + 11y + 10$

या संख्येतील अंकांची बेरीज $= \ x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

$\therefore$ पहिल्या अटीनुसार,

तीन अंकी संख्या $= 17 \times$ (अंकांची बेरीज)

$\therefore 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$\therefore 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$\therefore 76x - 23y = 7 \; . \; . \; . \quad (I)$

दिलेल्या संख्येतील अंक उलट्या क्रमाने लिहून मिळणारी नवी संख्या

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

दिलेली संख्या $= 110x + 11y + 10$

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार, दिलेली संख्या + 198 = अंक उलट क्रमाने मांडून मिळालेली संख्या.

$\therefore 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$\therefore 99x - 99y = -198$

$\therefore \quad x - y = -2$

म्हणजेच $x = y - 2 \; . \; . \; . \quad (II)$

समीकरण (II) मध्ये मिळालेली x ची किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवून,

$\therefore 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore \quad y = 3 \qquad \therefore$ एकक स्थानचा अंक $= 3$

$y = 3$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$x = y - 2$

$\therefore \quad x = 3 - 2 = 1$

$\therefore \qquad x = 1 \qquad \therefore$ शतक स्थानचा अंक $= 1$

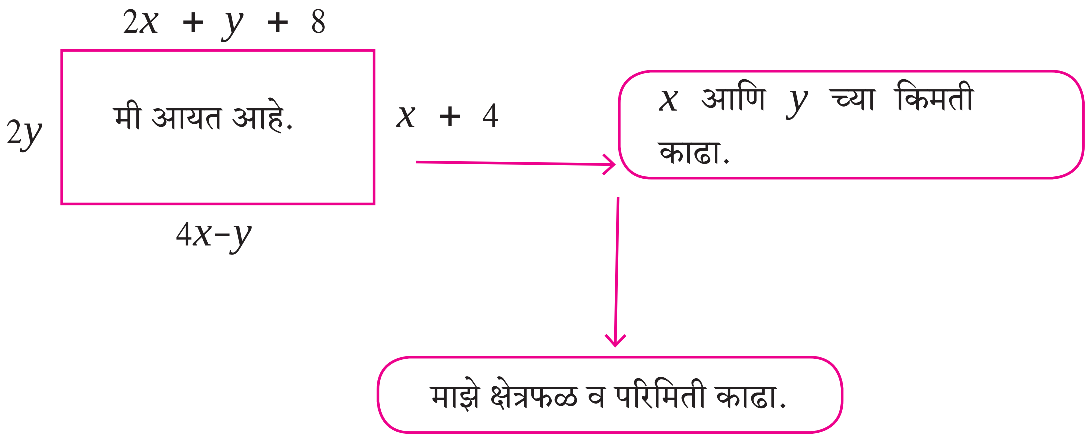
दशक स्थानचा अंक = मधला अंक $= x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

$\therefore$ दिलेली तीन अंकी संख्या = 153.

सरावसंच 1.5

1. दोन संख्यांमधील फरक 3 असून मोठ्या संख्येची तिप्पट आणि लहान संख्येची दुप्पट यांची बेरीज 19 आहे. तर त्या संख्या शोधा.

2. कृती पूर्ण करा.



3. वडिलांच्या वयामध्ये मुलाच्या वयाची दुप्पट मिळवल्यास बेरीज 70 येते आणि मुलाच्या वयामध्ये वडिलांच्या वयाची दुप्पट मिळवल्यास बेरीज 95 येते. तर दोघांची वये काढा.

4. एका अपूर्णांकाचा छेद हा अंशाच्या दुपटीपेक्षा 4 ने मोठा आहे. जर अंश आणि छेद दोन्ही 6 ने कमी केले तर छेद हा अंशाच्या 12 पट होतो, तर तो अपूर्णांक काढा.

5. 10 टनांची क्षमता असणाऱ्या मालवाहू ट्रकमध्ये A आणि B अशा दोन विशिष्ट वजनाच्या पेट्या भरलेल्या आहेत. जर A प्रकारच्या 150 पेट्या व B प्रकारच्या 100 पेट्या भरल्या तर ट्रकची 10 टनांची क्षमता पूर्ण होते. जर A प्रकारच्या 260 पेट्या भरल्या तर तो ट्रक त्याच्या 10 टनांच्या पूर्ण क्षमतेने भरण्यास B प्रकारच्या 40 पेट्या लागतात. तर प्रत्येक प्रकारच्या पेटीचे वजन किती?

★6. विशालने 1900 किमी प्रवासापैकी काही अंतर बसने तर उरलेले अंतर विमानाने पूर्ण केले. बसचा सरासरी वेग 60 किमी दर तास आहे, तर विमानाचा सरासरी वेग 700 किमी/तास आहे. जर हा प्रवास त्याने 5 तासांत पूर्ण केला असेल तर विशालने बसने किती किमी प्रवास केला?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील प्रश्नासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) $4x + 5y = 19$ चा आलेख काढण्यासाठी $x = 1$ असताना y ची किंमत किती?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x व y ही चले असलेल्या एकसामयिक समीकरणासाठी जर $D_x = 49$, $D_y = -63$ व $D = 7$ असेल तर $x =$ किती?

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ या निश्चयकाची किंमत किती?

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ ही एकसामयिक समीकरणे सोडवण्यासाठी D ची किंमत किती?

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; व $mx + ny = d$ या एकसामयिक समीकरणांमध्ये जर $an \neq bm$ तर दिलेल्या समीकरणांना –

(A) एकच उकल असेल. (B) उकल नसेल.

(C) असंख्य उकली असतील. (D) फक्त दोन उकली असतील.

2. $2x - 6y = 3$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी खालील सारणी पूर्ण करा.

x	-5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

3. खालील एकसामयिक समीकरणे आलेख पद्धतीने सोडवा.

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. खालील निश्चयकांच्या किमती काढा.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. खालील एकसामयिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$

(2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$

(4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

7. खालील शाब्दिक उदाहरणे सोडवा.

(1) एक दोन अंकी संख्या व तिच्या अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या यांची बेरीज 143 आहे, जर दिलेल्या संख्येतील एकक स्थानचा अंक हा दशक स्थानच्या अंकापेक्षा 3 ने मोठा असेल तर दिलेली मूळची संख्या कोणती? उत्तर काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

समजा एकक स्थानचा अंक = x

दशक स्थानचा अंक = y

$\therefore$ मूळ संख्या = $\square\, y + x$

अंकांची अदलाबदल करून मिळणारी संख्या = $\square\, x + y$

पहिल्या अटीवरून,

दोन अंकी संख्या + अंकांची अदलाबदल करून मिळणारी संख्या = 143

$\boxed{10y + x} + \square = 143$

$\square\, x + \square\, y = 143$

$x + y = \square$ . . . . . (I)

दुसऱ्या अटीवरून,

एकक स्थानचा अंक = दशक स्थानचा अंक + 3

$x = \square + 3$

$x - y = 3$ . . . . . (II)

(I) व (II) यांची बेरीज करून,

$2x = \square \qquad \therefore\ x = 8$

$x = 8$ समीकरण (I) मध्ये ठेवून,

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$\therefore\ y = \square$

मूळ संख्या $= 10\,y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) कांताबाईंनी दुकानातून दीड किलो चहा व पाच किलो साखर आणली. दुकानात जाऊन येण्यासाठी त्यांना 50 रुपये रिक्षाभाडे द्यावे लागले. यासाठी त्यांचे एकूण 700 रुपये खर्च झाले. नंतर त्यांना असे समजले, की या वस्तू ऑनलाइन ऑर्डर नोंदवून त्याच दराने घरपोच मिळतात. पुढील महिन्यात त्यांनी 2 किलोग्रॅम चहा व 7 किलोग्रॅम साखर ऑनलाइन मागवली, तेव्हा त्यांचा 880 रुपये खर्च झाला. तर चहा आणि साखर यांचा प्रतिकिलोग्रॅम दर काढा.

(3) अनुष्काजवळील 100 रुपयांच्या नोटा $\boxed{x}$ व 50 रुपयांच्या नोटा $\boxed{y}$.

↓

अनुष्काला आनंदने वरील नोटांच्या रूपात दिलेली रक्कम 2500 रुपये आहे. - - - - - - - - समीकरण I	आनंदने तिला नोटांच्या संख्यांची अदलाबदल करून पैसे दिले असते तर ती रक्कम 500 रुपयांनी कमी झाली असती. - - - - - - - - समीकरण II

समीकरणे सोडवून उत्तर लिहा.

100 रुपयांच्या नोटांची संख्या $\square$ 50 रुपयांच्या नोटांची संख्या $\square$

(4) मनीषा आणि सविता यांच्या आजच्या वयांची बेरीज 31 वर्षे आहे. 3 वर्षांपूर्वी मनीषाचे वय सविताच्या त्या वेळच्या वयाच्या चौपट होते, तर त्या दोघींची आजची वये काढा.

★(5) एका कारखान्यातील कुशल आणि अकुशल कामगारांच्या रोजगारांचे गुणोत्तर 5 : 3 आहे. एका कुशल आणि एका अकुशल कामगाराचा एका दिवसाचा एकूण रोजगार 720 रुपये आहे. तर प्रत्येक कुशल कामगाराचा आणि अकुशल कामगाराचा रोजगार काढा.

★(6) एका सरळ रस्त्यावर A आणि B ही दोन ठिकाणे आहेत. त्यांतील अंतर 30 किमी आहे. हमीद मोटारसायकलने A पासून B च्या दिशेने जाण्यास निघतो. त्याच वेळी जोसेफ मोटारसायकलने B पासून A च्या दिशेने जाण्यास निघतो. ते दोघे 20 मिनिटांत एकमेकांना भेटतात. जोसेफ जर त्याच वेळी निघून विरुद्ध दिशेने गेला असता, तर त्याला हमीद तीन तासांनी भेटला असता, तर प्रत्येकाचा प्रवासाचा वेग किती होता?

❑❑❑

46PBE6